



УДК 681.5

СИНТЕЗ РОБАСТНОЙ МНОГОМЕРНОЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ПОДСИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

ОМОРОВ Т.Т., ЖОЛДОШОВ Т.М.

izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается задача управления многомерным линейным объектом, имеющим параметрическую неопределенность в его математическом описании. Разрабатывается процедура параметрического синтеза робастного регулятора с учетом инженерных показателей качества и ограничений на компоненты вектора управления.

Наиболее актуальной проблемой теории и практики автоматического управления является разработка новых подходов и методов управления в условиях априорной неопределенности свойств объекта. Решение этой проблемы осуществляется путем создания робастных управляющих подсистем (регуляторов) и контуров адаптации в структуре систем автоматического управления (САУ). Как известно, точная идентификация параметров модели объекта представляется сложной проблемой, и поэтому создание методов робастного управления имеет большое практическое значение. Более того, параметры автоматических систем в процессе их функционирования могут изменяться в широких пределах, что может привести к потере устойчивости и качества САУ. В связи с этим интенсивно разрабатываются методы синтеза робастных систем управления [1]. При этом, в основном, они направлены на обеспечение робастной устойчивости проектируемых систем. Проблемы робастного управления с учетом показателей качества переходных процессов, т.е. инженерных критериев, рассматривались в рамках принципа гарантируемой динамики [2, 3]. В работе предлагается процедура синтеза робастной управляющей подсистемы для многомерного объекта, параметры которого имеют интервальную неопределенность

Рассмотрим многомерный объект управления, динамика которого описывается векторным уравнением в отклонениях

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор состояния; $u(t)$ – m -мерный вектор управления; A, B – вещественные матрицы соответствующих размерностей: $A = \{a_{ij}\}_{n \times n}$, $B = \{b_{ij}\}_{m \times n}$; x^0 – состояние объекта в начальный момент времени t_0 ; t_k – конечный момент управления.

Далее предполагается, что:

- 1) объект (1) обладает свойством управляемости;
- 2) компоненты вектора состояния $x(t)$ доступны для измерения;
- 3) задана структура регулятора, определяемая уравнением вида

$$u(t) = Kx(t), \quad (2)$$

где $K = \{k_{ij}\}_{m \times n}$ матрица обратной связи (регулятора).

- 4) заданы ограничения на компоненты вектора управления $u(t)$:

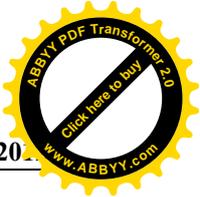
$$|u_\ell(t)| \leq \overline{u_\ell^*}, \quad \ell = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (3)$$

где $\overline{u_\ell^*}$ – максимально допустимое значение управляющей переменной $u_\ell(t)$.

Допустимое подмножество U для вектора $u(t)$ определяется соотношением

$$U = \{u \in R^m : u_\ell(t) \in \overline{U_\ell}, \quad \ell = \overline{1, m}\}, \quad (4)$$

где допустимые области



$$U_\ell = \{u_\ell \in R^1 : |u_\ell(t)| \leq u_\ell^* \}, \quad \ell = \overline{1, m}. \quad (5)$$

5) элементы матрицы A объекта управления имеют интервальную неопределенность, т.е.

$$A = A^* + \Delta A,$$

где $A^* = \{a_{ij}^*\}$ матрица объекта, размерностью $n \times n$, составленная из номинальных значений элементов матриц A; ΔA – матрица, характеризующая неопределенности в задании объекта управления. Считается, что интервалы неопределенностей для матрицы A известны:

$$|\Delta a_{ij}| = |a_{ij} - a_{ij}^*| \leq \Delta a_{ij}^+, \quad (6)$$

где Δa_{ij}^+ – положительные числа, определяющие границы изменения параметрических возмущений Δa_{ij} .

Качество проектируемой САУ будем оценивать следующими критериальными соотношениями:

$$|x_i(t)| \leq \acute{a}_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где $\acute{a}_i(t)$ – положительные функции, которые задают максимально допустимые отклонения $x_i(t)$ в переходном процессе. Следует отметить, что выбор $\acute{a}_i(t)$ осуществляется по первичным (инженерным) требованиям к точности и быстродействию проектируемой системы.

Допустимая область $X_i(t)$ для $x_i(t)$ определяется выражением

$$X_i(t) = \{x_i \in R^1 : |x_i(t)| \leq \acute{a}_i(t)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_o, t_k]. \quad (8)$$

Тогда допустимое подмножество $X(t)$ для вектора $x(t)$ задается соотношением

$$X(t) = \{x \in R^n : x_i(t) \in X_i(t), \quad i = \overline{1, n}\}, \quad t \in [t_o, t_k]. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение вектор-параметр регулятора $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$ размерности $\mu = m \times n$, составленный из строк матрицы K. Для вектор-параметра P на основе условий (3) и (7) определим следующие подмножества:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{p \in R^\mu : x(t) \in X(t)\}, \\ P_2 &= \{p \in R^\mu : u(t) \in U\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача синтеза регулятора заданной структуры в условиях параметрических неопределенностей в описании объекта формулируется следующим образом. Найти такой вектор-параметр p регулятора, принадлежащий пересечению подмножеств P_1 и P_2 , т.е. $p \in P_1 \cap P_2$. При этом заданные требования (3) и (7) к проектируемой САУ будут удовлетворяться.

Для математического описания подмножеств P_1 и P_2 будем использовать функциональные соотношения принципа гарантируемой динамики [2], которые даются следующими утверждениями.

Утверждение 1. Пусть $x_i(t_0) \in X_i(t_0)$. Тогда для того, чтобы при $t > t_0$ ошибки управления $x_i(t) \in X_i(t)$ для каждого момента времени t, достаточно выполнения соотношений

$$\int_{t_0}^t x_i(\tau) \dot{x}_i(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^t \dot{a}_i(\tau) \dot{a}_i(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_k], \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Выполнение условий (11) гарантированным образом обеспечивает принадлежность невязок $x_i(t)$ к допустимым множествам $X_i(t)$. При этом допустимые подмножества

$$X_i(t) = \left\{ x_i(t) \in \mathbb{R}^1 : \int_{t_0}^t [x_i(\tau) \dot{x}_i(\tau) - \dot{a}_i(\tau) \dot{a}_i(\tau)] d\tau \leq 0 \right\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Утверждение 2. Пусть $u_v(t_0) \in U_v$. Тогда для того, чтобы при $t > t_0$ $u_v(t) \in U_v$ для каждого момента времени t , достаточно выполнения соотношений

$$\int_{t_0}^t u_v(\tau) \dot{u}_v(\tau) d\tau \leq u_v^{*2} - u_v^{*2}(t_0), \quad t \in [t_0, t_k], \quad v = \overline{1, m}. \quad (12)$$

При этом допустимые подмножества

$$U_v = \left\{ u_v(t) \in \mathbb{R}^1 : \int_{t_0}^t [u_v(\tau) \dot{u}_v(\tau)] d\tau \leq u_v^{*2} - u_v^{*2}(t_0) \right\}, \quad v = \overline{1, m}.$$

Уравнение замкнутой системы с учетом закона управления (2) имеет вид:

$$\dot{x}(t) = (A^* + \Delta A + BK) x(t). \quad (13)$$

Введем матрицу

$$\bar{B} = \left\{ \tilde{b}_{iv} \right\}_{n \times m} = BK, \quad (14)$$

где $\tilde{b}_{iv} = \sum_{j=1}^n b_{iv} k_{vj}$.

Для описания подмножества P_1 будем использовать соотношения (11). Вначале запишем векторное уравнение (13) в координатной форме с учетом (14)

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Подставляя выражения (15) для $\dot{x}_i(t)$ в левые части соотношений (11) получаем, что

$$\int_{t_0}^t x_i(\tau) \left[\sum_{j=1}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(\tau) \right] d\tau \leq \int_{t_0}^t \dot{a}_i(\tau) \dot{a}_i(\tau) d\tau, \quad (16)$$

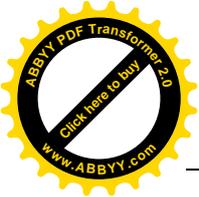
$$i = \overline{1, n}.$$

Для обеспечения условий (16) достаточно выполнения следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_i(t) x_j(t) \leq \dot{a}_i(t) \dot{a}_i(t), \quad (17)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

При попадании переменных (ошибок управления) $x_i(t)$ в момент времени $t > t_0$ на верхние границы допустимых областей $E_i(t)$, т.е. при $x_i(t) = \dot{a}_i(t)$, чтобы ошибки управления оставались в $E_i(t)$ должны выполняться условия



$$\left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) \dot{a}_i^2(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) \dot{a}_i(t) x_j(t) \leq \dot{a}_i(t) \dot{a}_i(t), \quad (18)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

В силу того, что $\dot{a}_i(t) > 0$, $i = \overline{1, n}$, для всех $t \in [t_0, t_k]$ неравенства (18) преобразуются к виду:

$$\left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(t) \leq \dot{a}_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

что равносильно соотношениям:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) \dot{a}_j(t) \leq \dot{a}_i(t) - \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t), \quad (19)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

В случае, когда переменные $x_i(t)$ в момент времени $t > t_0$ попадают на нижние границы допустимых областей $E_i(t)$, т.е. при $x_i(t) = -\dot{a}_i(t)$, чтобы ошибки управления оставались в допустимых областях $E_i(t)$, должны выполняться условия

$$\left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) \dot{a}_i^2(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) \dot{a}_i(t) x_j(t) \leq \dot{a}_i(t) \dot{a}_i(t), \quad (20)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Так как $\dot{a}_i(t) > 0$ для всех $t \in [t_0, t_k]$ неравенства (20) преобразуются к виду:

$$\left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(t) \leq \dot{a}_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

что равносильно соотношениям:

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(t) \leq \dot{a}_i(t) - \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t), \quad (21)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Предположим, что выполняются условия

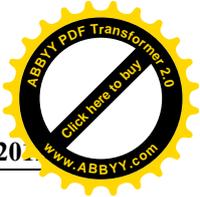
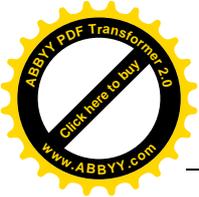
$$\dot{a}_i(t) - \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t) > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда неравенства (19) и (21) эквивалентны следующим условиям:

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(t) \right| \leq \dot{a}_i(t) - \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t), \quad (22)$$

$$i = \overline{1, n},$$

где предполагается, что



$$\dot{a}_i(t) - \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii} + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t) > 0.$$

Введем функции

$$F_i(p, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(a_{ij}^* + \Delta a_{ij} + \tilde{b}_{ij} \right) x_j(t), \tag{23}$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Определим верхние оценки функций $F_i(t)$ на множестве $X(t)$:

$$\overline{F}_i(p, t) = \sup_{x \in X} F_i(p, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(|a_{ij}^*| + \Delta a_{ij}^+ + |\tilde{b}_{ij}| \right) \dot{a}_j(t), \tag{24}$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Не трудно заметить, что соотношения (22) выполняются, если удовлетворяются следующие условия:

$$\overline{F}_i(p, t) \leq \dot{a}_i(t) - \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii}^+ + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{25}$$

Введем функции

$$L_i(p) = \overline{F}_i(p, t) - \dot{a}_i(t) + \left(a_{ii}^* + \Delta a_{ii}^+ + \tilde{b}_{ii} \right) \dot{a}_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда неравенства (25) имеют вид

$$L_i(p) \leq 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{26}$$

Соотношения (26) описывают подмножество P_1 :

$$P_1 = \left\{ p \in R^\mu : L_i(p) \leq 0, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Теперь получим описание подмножества P_2 . Для этой цели будем использовать соотношения (12). Вначале запишем уравнение искомого регулятора, описывающее его динамику. На основе закона управления (2) с учетом того, что $\dot{u} = K\dot{x}(t)$, оно в векторной форме имеет вид:

$$\dot{u} = D x(t), \tag{27}$$

где

$$D = K[(A^* + \Delta A + BK)] = \{d_{vj}\}_{m \times n}.$$

Векторное уравнение (27) запишем в координатной форме:

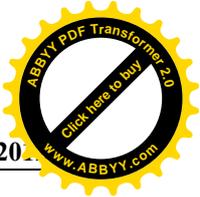
$$\dot{u}_v(t) = \sum_{j=1}^n d_{vj} x_j(t), \quad v = \overline{1, m}. \tag{28}$$

Подставим выражения (28) для $\dot{u}_v(t)$ в левую часть соотношений (12):

$$\int_{t_0}^t u_v(\tau) \left[\sum_{j=1}^n d_{vj} x_j(\tau) \right] d\tau \leq u_v^{*2} - u_v^2(t_0), \quad v = \overline{1, m}. \tag{29}$$

Далее будем предполагать, что $u_v(t_0) = 0$. При этом неравенства (29) можно записать в виде:

$$m_{vv} \int_{t_0}^t u_v^2(\tau) d\tau + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^n d_{vj} \int_{t_0}^t u_v(\tau) x_j(\tau) d\tau \leq u, \quad v = \overline{1, m}. \tag{30}$$



Проведем соответствующие преобразования, аналогичные предыдущему случаю, считая, что переменные управления $u_v(t)$ попадают на верхние $u_v(t) = u_v^*$ и нижние $(u_v(t) = -u_v^*)$ границы допустимых областей U_v для управляющих воздействий. При этом получаем следующие условия, выполнение которых для всех t_0 и $t > t_0$ обеспечивает $u_v(t) \in U_v$:

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^n d_{vj} \int_{t_0}^t u_v^* x_j(\tau) d\tau \right| \leq u_v^{*2} - m_{vv} \int_{t_0}^t u_v^{*2}(\tau) d\tau, \quad v = \overline{1, m}. \quad (31)$$

Введем обозначения:

$$\boxed{F}_v(p, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^n d_{vj} u_v^* \int_{t_0}^t x_j(\tau) d\tau, \quad v = \overline{1, m}. \quad (32)$$

Определим верхние оценки функций $\boxed{F}_v(p, t)$ на множестве $X(t)$:

$$\boxed{F}_v(p, t) = \sup_{x \in X} \boxed{F}_v = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^n |d_{vj}| u_v^* \int_{t_0}^t \dot{x}_j(\tau) d\tau, \quad v = \overline{1, m}. \quad (33)$$

Неравенства (31) удовлетворяются, если выполняются следующие соотношения:

$$\boxed{F}_v(p, t) \leq u_v^{*2} - m_{vv} u_v^{*2} (t - t_0), \quad v = \overline{1, m}. \quad (34)$$

Введем функции

$$\hat{L}_v(p) = \boxed{F}_v(p, t) - u_v^{*2} + m_{vv} u_v^{*2} (t - t_0), \quad v = \overline{1, m}. \quad (35)$$

Теперь условия (34) можно записать в виде

$$\hat{L}_v(p) \leq 0, \quad v = \overline{1, m} \quad (36)$$

Таким образом, соотношения (36) описывают подмножество P_2 :

$$P_2 = \left\{ p \in R^\mu : \hat{L}_v(p) \leq 0, \quad v = \overline{1, m} \right\}. \quad (37)$$



В результате получены описания подмножеств P_1 и P_2 , следовательно, и допустимого подмножества $P = P_1 \cap P_2$. Заключительный этап процедуры синтеза безынерционного регулятора состоит в определении произвольного вектор-параметра $p \in P$. Для этой цели можно использовать специальные алгоритмы [4, 5], а также процедуры, предложенные в рамках принципа гарантируемой динамики [6].

Литература

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. –303 с.
2. Оморов Т. Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. Кн.1. Бишкек: Илим, 2001. – 150 с.
3. Оморов Т. Т., Жолдошов Т.М., Джунушалиев У.Б., Джолдошев Б.О. К динамическому проектированию робастного управляющего устройства для линейных автоматических систем. – Ташкент. «Химическая технология контроля и управления.», № 3 (39), 2011, с.53-57.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.- 319 с.
5. Zakian V. New formulation for the Method of Inequalities. – Proc. IEE, 1979. v.126, –№6, – pp. 579-584.

Оморов Т.Т., Курманалиева Р.Н. Многокритериальный синтез систем управления по показателям качества и сложности. – Бишкек: Илим, 2007. – 136 с.