УДК 681.5

СИНТЕЗ РОБАСТНОЙ МНОГОМЕРНОЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ПОДСИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

ОМОРОВ Т.Т., ЖОЛДОШОВ Т.М.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается задача управления многомерным линейным объектом, имеющим параметрическую неопределенность в его математическом описании. Разрабатывается процедура параметрического синтеза робастного регулятора с учетом инженерных показателей качества и ограничений на компоненты вектора управления.

Наиболее актуальной проблемой теории и практики автоматического управления является разработка новых подходов и методов управления в условиях априорной неопределенности свойств объекта. Решение этой проблемы осуществляется путем создания робастных управляющих подсистем (регуляторов) и контуров адаптации в структуре систем автоматического управления (САУ). Как известно, точная идентификация параметров модели объекта представляется сложной проблемой, и поэтому создание методов робастного управления имеет большое практическое значение. Более того, параметры автоматических систем в процессе их функционирования могут изменяться в широких пределах, что может привести к потере устойчивости и качества САУ. В связи с этим интенсивно разрабатываются методы синтеза робастных систем управления [1]. При этом, в основном, они направлены на обеспечение робастной устойчивости проектируемых систем. Проблемы робастного управления с учетом показателей качества переходных процессов, т.е. инженерных критериев, рассматривались в рамках принципа гарантируемой динамики [2, 3]. В работе предлагается процедура синтеза робастной управляющей подсистемы для многомерного объекта, параметры которого имеют интервальную неопределенность

Рассмотрим многомерный объект управления, динамика которого описывается векторным уравнением в отклонениях

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t), x(t_o) = x^o, \qquad t \in [t_o, t_k], \qquad (1)$$

где x(t) – n-мерный вектор состояния; u(t) – m-мерный вектор управления; A, B – вещественные матрицы соответствующих размерностей: $\mathrm{A} = \{a_{ij}\}_{n\times n}$, $\mathrm{B} = \{b_{ij}\}_{m\times n}$; x^o - состояние объекта в начальный момент времени t_o; t_k - конечный момент управления.

Далее предполагается, что:

1) объект (1) обладает свойством управляемости;
2) компоненты вектора состояния x(t) доступны для измерения;
3) задана структура регулятора, определяемая уравнением вида

$$u(t) = Kx(t), \qquad (2)$$

где $K = \{k_{il}\}_{m\times n}$ матрица обратной связи (регулятора).

4) заданы ограничения на компоненты вектора управления u(t) :

$$|u_\ell(t)| \quad \le \quad u^*_\ell, \quad \ell = \overline{1, m}, \quad t \in [t_o, t_k], \qquad (3)$$

где u^*_ℓ – максимально допустимое значение управляющей переменной $u_\ell(t)$.

Допустимое подмножество U для вектора $u(t)$ определяется соотношением

$$U = \{u \in R^m : \quad u_\ell(t) \in U_\ell, \qquad \ell = \overline{1, m}\}, \qquad (4)$$

где допустимые области

$$U_\ell = \{u_\ell \in R^1 : \quad |u_\ell(t)| \le u_\ell^* \ \}, \qquad \ell = \overline{1, m}. \quad (5)$$

5) элементы матрицы A объекта управления имеют интервальную неопределенность, т.е.

$$A = A^* + \Delta A,$$

где $A^* = \{a_{ij}^*\}$ матрица объекта, размерностью $n \times n$, составленная из номинальных значений элементов матриц A; ΔA – матрица, характеризующая неопределенности в задании объекта управления. Считается, что интервалы неопределенностей для матрицы A известны:

$$\left|\Delta a_{ij}\right| = \left|a_{ij} - a_{ij}^*\right| \le \Delta a_{ij}^+, \quad (6)$$

где Δa_{ij}^+ - положительные числа, определяющие границы изменения параметрических возмущений Δa_{ij}.

Качество проектируемой САУ будем оценивать следующими критериальными соотношениями:

$$\left|x_i(t)\right| \le \acute{a}_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \qquad (7)$$

где $\acute{a}_i(t)$ – положительные функции, которые задают максимально допустимые отклонения $x_i(t)$ в переходном процессе. Следует отметить, что выбор $\acute{a}_i(t)$ осуществляется по первичным (инженерным) требованиям к точности и быстродействию проектируемой системы.

Допустимая область $X_i(t)$ для $x_i(t)$ определяется выражением

$$X_i(t) = \{x_i \in R^1 : |x_i(t)| \le \acute{a}_i(t)\}, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad t \in [t_o, t_k]. \qquad (8)$$

Тогда допустимое подмножество $X(t)$ для вектора $x(t)$ задается соотношением

$$X(t) = \{x \in R^n : x_i(t) \in X_i(t), \quad i = \overline{1, n}\}, \qquad t \in [t_o, t_k]. \qquad (9)$$

Введем в рассмотрение вектор-параметр регулятора $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$ размерности $\mu = m \times n$, составленный из строк матрицы K. Для вектор-параметра p на основе условий (3) и (7) определим следующие подмножества:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{p \in R^\mu : \quad x(t) \in X(t)\}, \\ P_2 &= \{p \in R^\mu : \quad u(t) \in U\}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Задача синтеза регулятора заданной структуры в условиях параметрических неопределенностей в описании объекта формулируется следующим образом. Найти такой вектор-параметр p регулятора, принадлежащий пересечению подмножеств P_1 и P_2, т.е. $p \in P_1 \cap P_2$. При этом заданные требования (3) и (7) к проектируемой САУ будут удовлетворяться.

Для математического описания подмножеств P_1 и P_2 будем использовать функциональные соотношения принципа гарантируемой динамики [2], которые даются следующими утверждениями.

Утверждение 1. Пусть $x_i(t_0) \in X_i(t_0)$. Тогда для того, чтобы при $t > t_0$ ошибки управления $x_i(t) \in X_i(t)$ для каждого момента времени t, достаточно выполнения соотношений

$$\int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau \le \int_{t_0}^{t} \acute{a}_i(\tau)\dot{\acute{a}}_i(\tau)d\tau, \quad t\in[t_0,t_k], \quad i=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Выполнение условий (11) гарантированным образом обеспечивает принадлежность невязок $x_i(t)$ к допустимым множествам $X_i(t)$. При этом допустимые подмножества

$$X_i(t)=\left\{x_i(t)\in R^1: \quad \int_{t_0}^{t}\left[x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)-\acute{a}_i(\tau)\dot{\acute{a}}_i(\tau)\right]d\tau\le 0\right\}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Утверждение 2. Пусть $u_\nu(t_0)\in U_\nu$. Тогда для того, чтобы при $t>t_0$ $u_\nu(t_0)\in U_\nu$ для каждого момента времени t, достаточно выполнения соотношений

$$\int_{t_0}^{t} u_\nu(\tau)\dot{u}_\nu(\tau)d\tau \le u_\nu^{*2}-u_\nu^{*2}(t_0), \qquad t\in[t_0,t_k], \qquad \nu=\overline{1,m}. \tag{12}$$

При этом допустимые подмножества

$$U_\nu=\left\{u_\nu(t)\in R^1: \quad \int_{t_0}^{t}\left[u_\nu(\tau)\dot{u}_\nu(\tau)\right]d\tau\le u_\nu^{*2}-u_\nu^{*2}(t_0)\right\}, \quad \nu=\overline{1,m}.$$

Уравнение замкнутой системы с учетом закона управления (2) имеет вид:

$$\dot{x}(t)=\left(A^*+\Delta A+BK\right)x(t). \tag{13}$$

Введем матрицу

$$\tilde{B}=\left\{\tilde{b}_{i\nu}\right\}_{n\tilde{o}m}=BK, \tag{14}$$

где $\quad \tilde{b}_{i\nu}=\sum_{j=1}^{n} b_{i\nu}k_{\nu j}.$

Для описания подмножества P_1 будем использовать соотношения (11). Вначале запишем векторное уравнение (13) в координатной форме с учетом (14)

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^*+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j(t), \qquad i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Подставляя выражения (15) для $\dot{x}_i(t)$ в левые части соотношений (11) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^*+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j(\tau)\right]d\tau\le\int_{t_0}^{t}\acute{a}_i(\tau)\dot{\acute{a}}_i(\tau)d\tau, \tag{16}$$

$$i=\overline{1,n}.$$

Для обеспечения условий (16) достаточно выполнения следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^*+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_i(t)x_j(t)\le\acute{a}_i(t)\dot{\acute{a}}_i(t), \tag{17}$$

$$i=\overline{1,n}.$$

При попадании переменных (ошибок управления) $x_i(t)$ в момент времени $t>t_0$ на верхние границы допустимых областей $E_i(t)$, т.е. при $x_i(t)=\acute{a}_i(t)$, чтобы ошибки управления оставались в $E_i(t)$ должны выполняться условия

$$\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)\acute{a}_i^2\left(t\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)\acute{a}_i\left(t\right)x_j\left(t\right)\le \acute{a}_i\left(t\right)\dot{\acute{a}}_i\left(t\right), \qquad (18)$$

$$i=\overline{1,n}.$$

В силу того, что $\acute{a}_i\left(t\right)>0$, $i=\overline{1,n}$, для всех $t\in[t_o,t_k]$ неравенства (18) преобразуются к виду:

$$\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i\left(t\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j\left(t\right)\le \dot{\acute{a}}_i\left(t\right), \qquad i=\overline{1,n},$$

что равносильно соотношениям:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)\acute{a}_j\left(t\right)\le \dot{\acute{a}}_i\left(t\right)-\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i\left(t\right), \qquad (19)$$

$$i=\overline{1,n}.$$

В случае, когда переменные $x_i(t)$ в момент времени $t>t_0$ попадают на нижние границы допустимых областей $E_i(t)$, т.е. при $x_i\left(t\right)=-\acute{a}_i(t)$, чтобы ошибки управления оставались в допустимых областях $E_i(t)$, должны выполняться условия

$$\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)\acute{a}_i^2\left(t\right)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)\acute{a}_i\left(t\right)x_j\left(t\right)\le \acute{a}_i\left(t\right)\dot{\acute{a}}_i\left(t\right), \qquad (20)$$

$$i=\overline{1,n}.$$

Так как $б_i(t)>0$ для всех $t\in[t_o,t_k]$ неравенства (20) преобразуются к виду:

$$\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i\left(t\right)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j\left(t\right)\le \dot{\acute{a}}_i\left(t\right), i=\overline{1,n},$$

что равносильно соотношениям:

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j\left(t\right)\le \dot{\acute{a}}_i\left(t\right)-\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i\left(t\right), \qquad (21)$$

$$i=\overline{1,n}.$$

Предположим, что выполняются условия

$$\dot{\acute{a}}_i\left(t\right)-\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i\left(t\right)>0, \qquad i=\overline{1,n}.$$

Тогда неравенства (19) и (21) эквивалентны следующим условиям:

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j\left(t\right)\right|\le \dot{\acute{a}}_i\left(t\right)-\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i\left(t\right), \qquad (22)$$

$$i=\overline{1,n},$$

где предполагается, что

$$\dot{\acute{a}}_i(t)-\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i(t)>0\,.$$

Введем функции

$$F_i(p,t)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(a_{ij}^{*}+\Delta a_{ij}+\tilde{b}_{ij}\right)x_j(t), \qquad (23)$$

$$i=\overline{1,n}\,.$$

Определим верхние оценки функций $F_i(t)$ на множестве $X(t)$:

$$\bar{F}_i(p,t)=\sup_{x\in X}F_i(p,t)\leq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\left|a_{ij}^{*}\right|+\Delta a_{ij}^{+}+\left|\tilde{b}_{ij}\right|\right)\acute{a}_j(t), \qquad (24)$$

$$i=\overline{1,n}\,.$$

Не трудно заметить, что соотношения (22) выполняются, если удовлетворяются следующие условия:

$$\bar{F}_i(p,t)\leq\dot{\acute{a}}_i(t)-\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}^{+}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i(t),\qquad i=\overline{1,n}\,. \qquad (25)$$

Введем функции

$$L_i(p)=\bar{F}_i(p,t)-\dot{\acute{a}}_i(t)+\left(a_{ii}^{*}+\Delta a_{ii}^{+}+\tilde{b}_{ii}\right)\acute{a}_i(t),\qquad i=\overline{1,n}\,.$$

Тогда неравенства (25) имеют вид

$$L_i(p)\leq 0,\qquad i=\overline{1,n}\,. \qquad (26)$$

Соотношения (26) описывают подмножество P_1:

$$P_1=\left\{p\in R^{\mu}:\ L_i(p)\leq 0,\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Теперь получим описания подмножества P_2. Для этой цели будем использовать соотношения (12). Вначале запишем уравнение искомого регулятора, описывающее его динамику. На основе закона управления (2) с учетом того, что $\dot{u}=K\dot{x}(t)$, оно в векторной форме имеет вид:

$$\dot{u}=Dx(t), \qquad (27)$$

где
$$D=K[(A^{*}+\Delta A+BK)]=\{d_{vj}\}_{m\tilde{o}n}\,.$$

Векторное уравнение (27) запишем в координатной форме:

$$\dot{u}_v(t)=\sum_{j=1}^{n}d_{vj}x_j(t),\qquad v=\overline{1,m}\,. \qquad (28)$$

Подставим выражения (28) для $\dot{u}_v(t)$ в левую часть соотношений (12):

$$\int_{t_0}^{t}u_v(\tau)\left[\sum_{j=1}^{n}d_{vj}x_j(\tau)\right]d\tau\leq u_v^{*2}-u_v^{2}(t_0),\qquad v=\overline{1,m}\,. \qquad (29)$$

Далее будем предполагать, что $u_v(t_0)=0$. При этом неравенства (29) можно записать в виде:

$$m_{vv}\int_{t_0}^{t}u_v^{2}(\tau)d\tau+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}d_{vj}\int_{t_0}^{t}u_v(\tau)x_j(\tau)d\tau\leq u\,,\qquad v=\overline{1,m}\,. \qquad (30)$$

Проведем соответствующие преобразования, аналогичные предыдущему случаю, считая, что переменные управления $u_\nu(t)$ попадают на верхние $u_\nu(t)=u_\nu^*$ и нижние $(u_\nu(t)=-u_\nu^*)$ границы допустимых областей U_ν для управляющих воздействий. При этом получаем следующие условия, выполнение которых для всех t_0 и $t>t_0$ обеспечивает $u_\nu(t)\in U_\nu$:

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{n} d_{\nu j}\int_{t_0}^{t} u_\nu^* x_j(\tau)\,d\tau\right| \le u_\nu^{*2} - m_{\nu\nu}\int_{t_0}^{t} u_\nu^{*2}(\tau)\,d\tau, \qquad \nu=\overline{1,m}. \tag{31}$$

Введем обозначения:

$$\bar{F}_\nu(p,t)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{n} d_{\nu j}u_\nu^*\int_{t_0}^{t} x_j(\tau)\,d\tau, \qquad \nu=\overline{1,m}. \tag{32}$$

Определим верхние оценки функций $\bar{F}_\nu(p,t)$ на множестве $X(t)$:

$$\bar{F}_\nu(p,t)=\sup_{x\in X}\bar{F}_\nu=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{n} \left|d_{\nu j}\right| u_\nu^*\int_{t_0}^{t} \acute{a}_j(\tau)\,d\tau, \qquad \nu=\overline{1,m}. \tag{33}$$

Неравенства (31) удовлетворяются, если выполняются следующие соотношения:

$$\bar{F}_\nu(p,t)\le u_\nu^{*2} - m_{\nu\nu}u_\nu^{*2}(t-t_0), \qquad \nu=\overline{1,m}. \tag{34}$$

Введем функции

$$\hat{L}_\nu(p)=\bar{F}_\nu(p,t)-u_\nu^{*2}+m_{\nu\nu}u_\nu^{*2}(t-t_0), \qquad \nu=\overline{1,m}. \tag{35}$$

Теперь условия (34) можно записать в виде

$$\hat{L}_\nu(p)\le 0, \qquad \nu=\overline{1,m} \tag{36}$$

Таким образом, соотношения (36) описывают подмножество P_2:

$$P_2=\left\{p\in R^\mu:\ \hat{L}_\nu(p)\le 0, \qquad \nu=\overline{1,m}\right\}. \tag{37}$$

В результате получены описания подмножеств P_1 и P_2, следовательно, и допустимого подмножества $P = P_1 \bigcap P_2$. Заключительный этап процедуры синтеза безынерционного регулятора состоит в определении произвольного вектор-параметра $p \in P$. Для этой цели можно использовать специальные алгоритмы [4, 5], а также процедуры, предложенные в рамках принципа гарантируемой динамики [6].

Литература

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. –303 с.
2. Оморов Т. Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. Кн.1. Бишкек: Илим, 2001. – 150 с.
3. Оморов Т. Т., Жолдошов Т.М., Джунушалиев У.Б., Джолдошев Б.О. К динамическому проектированию робастного управляющего устройства для линейных автоматических систем. – Ташкент. «Химическая технология контроля и управления.»., № 3 (39), 2011, с.53-57.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.- 319 с.
5. Zakian V. New formulation for the Method of Inequalities. – Proc. IEE, 1979. v.126, –№6, – pp. 579-584.

Оморов Т.Т., Курманалиева Р.Н. Многокритериальный синтез систем управления по показателям качества и сложности. – Бишкек: Илим, 2007. – 136 с.