УДК 004.023

О МЕТОДАХ МАТЕМАТИЗАЦИИ СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ

ХИЖНЯК М. А.
ТТИ КГТУ им. И. Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

Актуальность проблемы связана с многовековым развитием и проникновением математических методов в различные области человеческой деятельности, которые со временем только расширяются и углубляются. В настоящее время мы видим бурный рост числа математических приложений, связанный, прежде всего с развитием компьютерных технологий, появлением глобальной сети Internet. Те математические идеи, которые раньше не покидали области академической науки, сейчас являются привычными в обиходе программистов, прикладников, экономистов.

Topicality of the problem is connected with centuries-old development and penetration of mathematical methods into different spheres of human activity, which gets broaden and expanded with the lapse of time. Nowadays we can observe explosive growth of number of mathematical applications, and this is first of all connected with computer technologies development, and occurrence of Internet global system. Those mathematical ideas that were tight within academic science sphere now become casual in the life of programmers, application-programmers, and economists.

Цель исследования: чтобы ответить на вопрос, в чем заключается мощь и удивительная плодотворность применения математики в различных науках, нужно проанализировать некоторые методы математизации.

Методы решения проблемы: важнейший метод – это математическое моделирование. Он состоит в том, что исследователь строит математическую модель рассматриваемой области, то есть выделяет существенные для него свойства и количественные характеристики явления, выделяет существенные отношения между ними и пытается найти какой-либо похожий объект в математике [1].

Например, изучая численность популяций сардин и рыб-хищников в Средиземном море, В.Вольтерра, являясь крупным специалистом в теории дифференциальных уравнений, находит необходимый объект в математике – систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy \\ y' = Cxy - Dy \end{cases},$$

где A, B, C, D – некоторые положительные коэффициенты, зависящие от конкретных природных условий. Изучая затем эту систему методами, разработанными другими математиками задолго до него, Вольтерра получает описание и объяснение многих явлений, замеченных за долгую историю рыболовства в Италии, таких например, как странные колебания величины улова сардин (а значит и их общей численности).

Этот пример показывает еще одну идею моделирования – некоторое упрощение, отбрасывание лишней, не нужной информации. Здесь это допущения одинаковости особей, равновероятности их встреч, равновозможности производить потомство. Мы как будто бы абстрагируемся от конкретной сардины и выделяем только нужные для нас ее свойства. Конечно в итоге мы получаем несколько упрощенную картину явления, но в данном случае нам это и требовалось. Важнейшим моментом является то, чтобы при упрощении не упустить нужные черты, не огрубить модель настолько, чтобы она перестала достаточно хорошо описывать явление. С другой стороны, модель не должна получиться очень сложной, не поддающейся математическому анализу. Правда, с появлением мощных ЭВМ возможности анализа заметно расширились, но некоторые задачи, например долгосрочное прогнозирование погоды, до сих пор являются недоступными.

Удивительным образом оказывается, что одна и та же математическая модель может описывать много разнообразных явлений в различных областях. Например, одно дифференциальное уравнение может описывать и рост численности популяции, и химический распад, и цепную ядерную реакцию, и распространение информации в социальной группе.

Такую всеприменимость математических моделей можно объяснить следующим образом. Когда исследователь изучает какое-то явление и строит, скажем, количественную модель, он стремится к простоте модели и выделяет только небольшое число параметров и отношений между ними. В итоге по огромному количеству явлений получает модели, связанные, скажем, с определенными дифференциальными уравнениями. Но в теории дифференциальных уравнений эти уравнения классифицированы в достаточно небольшое число типов, которые различаются по свойствам и методам их решения. В итоге и получается, что дифференциальные уравнения (а значит и модели) для большого числа явлений попадают в один класс, в котором они практически неразличимы.

Помимо моделей, связанных с дифференциальными уравнениями, есть еще огромное число других моделей, в том числе и не количественных (то есть не связанных с какими-либо числовыми параметрами). Например, в математической логике и теории алгоритмов существует модель, описывающая работу человека, решающего какую-нибудь проблему по строго описанной программе (рецепту). Эта модель называется машиной Тьюринга и придумана в 1936 году английским математиком Аланом Тьюрингом в связи с проблемой формализации понятия алгоритма. Она оказалась очень полезной для разработки первых ЭВМ, и с тех пор является общепринятой математической моделью современных компьютеров.

Удивительно то, что эта простая модель, прекрасно описывающая работу современных компьютеров, родилась раньше, чем появились первые ЭВМ.

Этапы построения математической модели. Из каких этапов будет состоять построение, зависит, вообще говоря, от области, в которой разрабатывается эта модель. Например, в экономике этапы можно выделить такие [1]:

1. Определение цели, то есть чего хотят добиться, решая поставленную задачу.
2. Определение параметров модели, то есть заранее известных фиксированных факторов, на значение которых исследователь не влияет.
3. Формирование управляющих переменных, изменяя значение которых, можно приближаться к поставленной цели. Значения управляющих переменных являются решениями задачи.
4. Определение области допустимых решений, то есть тех ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.
5. Выявление неизвестных факторов, то есть величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.
6. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, то есть формирование целевой функции, называемой также критерием оптимальности задачи.

Это связано со спецификой области: в экономике важны именно такие числовые модели, так как предметная область там в основном состоит из понятий, которые имеют количественный характер. Такие примеры, как машина Тьюринга, под эту схему не подходят.

Исходя из изложенного выше, можно выделить следующие основные черты метода математического моделирования:

- абстракция, некоторое упрощение предметной области, выделение только существенных для исследователя черт рассматриваемого явления;
- выявление нужных параметров или характеристик процесса, которые и составляют предмет дальнейшего исследования;
- выявление существенных взаимоотношений между этими параметрами;
- поиск нужного математического объекта, который будет описывать все исследуемые параметры и отношения между ними;
- применение математического аппарата к этому объекту для описания исходного явления.

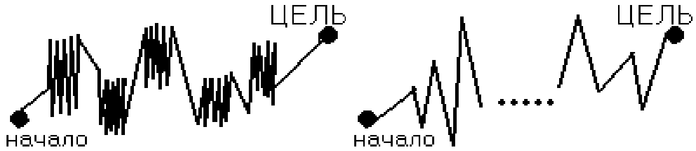
Выражаясь математическим языком, можно сказать, что происходит отображение предметной области, реального явления в математические множества (понятия, структуры). Причем это отображение обладает свойством сохранять некоторые отношения между реальными объектами, в том смысле, что при изменении в реальности происходит похожее изменение и в математическом ее образе.

Не следует думать, что математика всегда располагает необходимым аппаратом для исследования математической модели. Зачастую приходилось открывать новые понятия и методы в математике или разрабатывать старые, чтобы делать это. Например, Ньютон открыл основные

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

понятия дифференциального исчисления, чтобы как раз использовать их в механике. И вооб большинство областей современной математики имеют такое практическое происхождение.

Столь большая применимость математических моделей, самого математического языка для изучения многих явлений в различных науках связана с непревзойденной строгостью и точностью математического языка, а отчасти и с его эффективностью и сжатостью. Профессор А. К. Гуц иллюстрировал эту эффективность следующим отличием гуманитарного мышления от математического. Когда гуманитарий решает какую-нибудь проблему, на пути к ее решению он должен пройти очень большое число промежуточных этапов, на каждом из которых делаются, анализируются и проверяются какие-то логические выводы. Это можно изобразить на диаграмме:



Так как таких промежуточных шагов может быть много, путь к решению может занять очень много времени. Теперь рассмотрим решение задачи математиком. Движение его к цели, по сути, тоже заключается в серии промежуточных шагов, но он может применять теоремы, формулы, факты, установленные и проверенные другими математиками, которые заключают в себе сотни, тысячи элементарных логических шагов, которые уже нет необходимости проделывать. Его путь можно изобразить такой диаграммой:

здесь “сгустки” – это факты, проверенные другими. Поэтому за тот же промежуток времени математик может сделать гораздо больше.

Адекватность математики при отражении реальности в своих моделях связана с тем, что сама математика, ее понятия и структуры являются не чем иным, как абстракцией самой объективной реальности. Когда мы создаем какое-то множество математических понятий, абстрагируясь от реальных объектов, мы неявно переносим в понятия и связи между этими объектами, которые затем возникают при построении математических моделей. Выдающийся физик, лауреат Нобелевской премии. Поль Дирак говорил: *“При построении физической теории следует не доверять всем физическим концепциям. ... Следует доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой”.*

Можно отдельно выделить метод математизации, который неявно является частью математического моделирования: *формализация*. Он состоит в том, что все изучаемые объекты реальности и отношения между ними заменяются наборами символов и отношений между ними в некотором искусственном языке. Так, в модели машины Тьюринга все объекты – слова в каком-то алфавите, и рассматриваются правила работы с этими словами. Да и вообще, система удобных обозначений – важная часть любой области математики. Этот искусственный язык должен быть по возможности компактным, недвусмысленным и простым. Это отличает его от естественных человеческих языков, для которых характерна некоторая неоднозначность и неопределенность семантики и синтаксиса. Недаром до сих пор не создано удовлетворительных автоматических систем перевода с одного языка на другой. Поэтому важнейшей частью формализации является правильный перевод предметной области на формальный язык. В самой математике процесс формализации начался еще с древнегреческого математика Диофанта, который предложил некоторую еще несовершенную систему алгебраических обозначений. Привычные нам обозначения основных математических объектов вводились постепенно, начиная с Виета, Декарта, Лейбница и заканчивая Эйлером, Лагранжем, Коши. Этот процесс продолжается до сих пор, так как каждый день возникают новые и новые математические понятия и объекты.

Широко используемые в современной науке математические описания различных объектов, процессов, являются ярким примером формализации. Под формализацией понимается особый подход в научном познании, который заключается в использовании специальной символики, позволяющей отвлечься от изучения реальных объектов, от содержания описывающих их теоретических положений и оперировать вместо этого некоторым множеством символов (знаков). При этом математическая и другая символика не только помогает точно выразить и закрепить уже имеющиеся знания об исследуемых объектах, явлениях, но и выступает своего рода инструментом в процессе дальнейшего их познания.

Для построения любой формальной системы необходимо:

а) задание алфавита, т.е. определенного набора знаков;

б) задание правил, по которым из исходных знаков этого алфавита могут быть получены «слова», «формулы»;

в) задание правил, по которым от одних слов, формул данной системы можно переходить к другим словам и формулам (так называемые правила вывода).

В результате создается формальная знаковая система в виде определенного искусственного языка. Важным достоинством этой системы является возможность проведения в ее рамках исследования какого-либо объекта чисто формальным путем (через оперирование знаками, формулами) без непосредственного обращения к этому объекту. Здесь отношения знаков заменяют собой высказывания о свойствах и отношениях объектов.

Еще одним методом математизации является *аксиоматизация*. Она состоит в том, что в некоторой области знания из всех истинных утверждений выделяется набор некоторых простейших утверждений или аксиом, из которых посредством логического вывода можно в принципе получить любое утверждение этой области. Конечно, желательно, чтобы этот набор был достаточно компактным (хотя бы конечным) и простым. Классическим примером аксиоматически построенной теории является геометрия Евклида (хотя у него список аксиом был неполный). Конституция государства и всевозможные кодексы в некотором смысле являются списками аксиом в юриспруденции. Правила дорожного движения есть не что иное, как аксиомы теории правильного уличного движения. Продолжалась и продолжается аксиоматизация в самой математике: благодаря аксиомам в алгебре определяются важнейшие понятия группы, поля, кольца; аксиоматика Колмогорова сделала теорию вероятностей математической наукой.

Выводы: Одна из характерных тенденций современной науки – ее усиленная математизация: все более широкое применение языка математики и математических методов исследования в самых различных отраслях научного познания. Это связано с тем, что без познания количественных отношений в изучаемых объектах нельзя правильно отразить его качественную специфику и закономерности развития. Эти количественные отношения и есть предмет математики. Её применение в науке придает знаниям строгость и точность. Отмечая это, И. Кант утверждал, что в науке столько истины, сколько в ней математики. К. Маркс подчеркивал, что наука только тогда достигает своих вершин, точности и совершенства, когда ей удается пользоваться математикой. При этом следует иметь в виду, что применение математического аппарата возможно на сравнительно высоком уровне развития той или иной науки, когда описательный метод в ней становится подчиненным.

В современном научном познании роль математики непрерывно возрастает, ее аппарат совершенствуется, а язык ее становится своеобразным и сложным, недоступным для неспециалистов. В последние десятилетия все чаще встречается чисто математическое творчество в физике, в синергетике. Необходимо, однако, помнить, что математические формализмы не являются самоцелью в научном познании, они – всего лишь вспомогательное средство познания процессов природы и организации научного знания.

Наиболее широко и эффективно применимы в современном естествознании математические методы теоретического исследования: аксиоматический метод, метод математической гипотезы и математического моделирования. В настоящее время математическое моделирование часто осуществляется с использованием компьютерной техники.

Литература

1. Хазанова Л. Э. Математические методы в экономике. - М.: Изд-во “Бек”, 2002.
2. Гуц А. К. Лекции по семинару “Основные идеи в математике” , 2 семестр, 2000.
3. История математики. Под ред. А. П. Юшкевича. Т. 1-3. - М.: Наука, 2007. – 512 с.
4. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. - М.: Наука, 2005. – 325 с.
5. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 2005. – 177 с.

Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. - М.: Мир, 2006. – 311 с.