

УДК 539.4

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО ТРЕХСВЯЗНОГО КОРОБЧАТОГО СТЕРЖНЯ

АБДРАХМАНОВ С.А., ДОТАЛИЕВА Ж.Ж., ДЖАНУЗАКОВА А.А.
abdrahmanov7@rambler.ru, dotalieva@rambler.ru

В данной работе рассматривается анализ напряженно-деформированного состояния при кручении тонкостенного трехсвязного коробчатого стержня с переборкой. Получены формулы, содержащие два параметра x и n, через которые определяются местоположение и толщина (жесткость) переборки.

In this work the analysis of stress-strain state of a thin-walled torsion box triconnected rod bulkhead. The formulas containing two parameters x and n, are determined by the location and thickness (stiffness) of the bulkhead.

Рассмотрим случай свободного кручения тонкостенного упругого стержня трехсвязного профиля. Поперечное сечение такого стержня показано на рис.1. Примем, что на участке ДАВ толщина поперечного сечения постоянная и равна delta_1, длина дуги равна l_1, а касательное напряжение равно tau_1. Аналогично, на участке ВСД толщина равна delta_2, длина дуги - l_2, касательное напряжение - tau_2, и в переборке ВД, соответственно: delta_3, l_3, tau_3. Из условия постоянства циркуляции касательного напряжения, имеем

tau_1*delta_1 = tau_2*delta_2 + tau_3*delta_3 (1)

Вычислим крутящий момент относительно произвольно взятого полюса Р (рис.1). Учитывая постоянство циркуляции касательного напряжения, запишем

M_kp = tau_1*delta_1 * integral_{l_1} rds_1 + tau_2*delta_2 * integral_{l_2} rds_2 + tau_3*delta_3 * integral_{l_3} rds_3 (2)

Замечая, что элемент секториальной площади d*omega = rds, формулу (2) перепишем в виде

M_ew = tau_1*delta_1*(2F_1 - 2F_PBD) + tau_2*delta_2*(2F_2 + 2F_PBD) + tau_3*delta_3*2F_PBD (3)

Здесь F_1 и F_2 - площади левой и правой части поперечного сечения. Очевидно, они равны

F_1 = F_PDAB + F_PBD, F_2 = F_PBCD - F_PBD (4)

Формула (3), с учетом (1) и (4) запишется в виде

M_ew = 2*tau_1*delta_1*F_1 + 2*tau_2*delta_2*F_2 (5)

Применим к замкнутым контурам DABD и DBCD формулу для определения осевого перемещения, т.е.

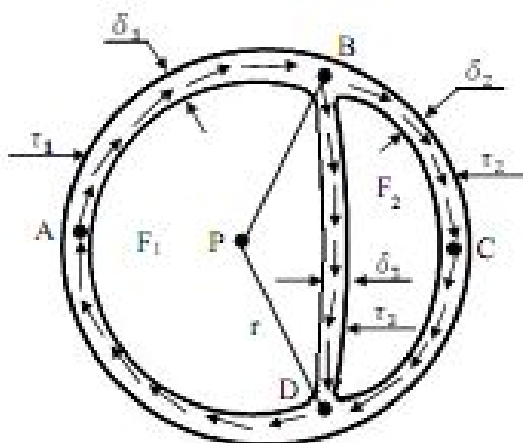


Рис.1

$$W_s = \frac{1}{G} \int_0^s \tau ds + \theta \omega_s$$

Здесь G – модуль сдвига; θ – относительный угол закручивания; ω_s – секториальная площадь.

Расписывая последнюю формулу, получаем следующие выражения:

$$\tau_1 l_1 + \tau_3 l_3 = 2F_1 G \theta \quad (6)$$

$$\tau_2 l_2 - \tau_3 l_3 = 2F_2 G \theta \quad (7)$$

Решение уравнений (1,5,6,7) приводят к следующим зависимостям [1,2]:

$$\theta = \frac{\tau_1 l_1 + \tau_2 l_2}{2G(F_1 + F_2)} \quad (8)$$

$$\tau_1 = \frac{(\ell_3 \delta_2 (F_1 + F_2) + \ell_2 \delta_3 F_1) M_{кр}}{k} \quad (9)$$

$$\tau_2 = \frac{(\ell_3 \delta_3 (F_1 + F_2) + \ell_1 \delta_3 F_2) M_{кр}}{k} \quad (10)$$

$$\tau_3 = \frac{\tau_1 \delta_1 - \tau_2 \delta_2}{\delta_3} \quad (11)$$

где

$$k = 2\ell_3 \cdot \delta_1 \delta_2 (F_1 + F_2)^2 + 2\delta_3 \delta_1 \ell_2 F_1^2 + 2\delta_3 \delta_2 \ell_1 \cdot F_2^2 \quad (12)$$

Таким образом, при заданном крутящем моменте по формулам (8-11) можно найти напряжения и угол закручивания стержня.

Применим эти формулу для анализа кручения коробчатого стержня с «подвижной» переборкой. Форма поперечного сечения с указанием размеров приведена на рис. 2. Для рассматриваемой задачи примем:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, \quad \delta_3 = n\delta$$

Здесь n положительное число ($n > 0$). В этом случае имеем:

$$\ell_1 = 2(a + x); \quad \ell_2 = 2(4a - x); \quad \ell_3 = 2a;$$

$$F_1 = 2ax; \quad F_2 = 2(3a^2 - ax).$$

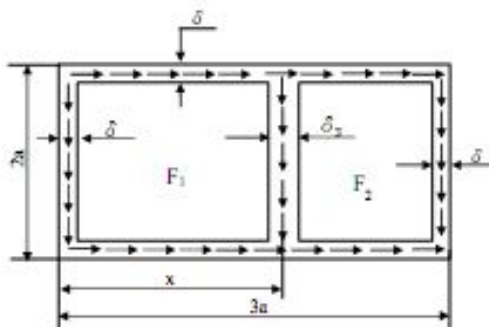


Рис.2

Перепишем формулы (8-11) с учетом последних равенств. Для четырех неизвестных получаем следующие равенства:

$$\tau_1 = \frac{3a^2 + n \cdot (4ax - x^2)}{4a^2 \delta [(1+n) \cdot 9a^2 + n \cdot (3ax - x^2)]} \cdot M_{кр} \quad (12)$$

$$\tau_2 = \frac{(1+n) \cdot 3a^2 + n \cdot (2ax - x^2)}{4a^2 \delta [(1+n) \cdot 9a^2 + n \cdot (3ax - x^2)]} \cdot M_{кр} \quad (13)$$

$$\tau_3 = \frac{2ax - 3a^2}{4a^2 \delta [(1+n) \cdot 9a^2 + n \cdot (3ax - x^2)]} \cdot M_{кр} \quad (14)$$

$$\theta = \frac{[3a^2 + n \cdot (24a^2 + 18ax - 6x^2)]}{48Ga^3 \delta [(1+n) \cdot 9a^2 + n \cdot (3ax - x^2)]} \cdot M_{кр} \quad (15)$$

Обозначив через $\tau_0 = M_{кр} / 4a^2 \delta$, $\theta_0 = M_{кр} / 48Ga^3 \delta$ и $\bar{x} = x/3a$, перепишем формулы (12-15) в безразмерных координатах: $\bar{\tau}_1 = \tau_1 / \tau_0$, $\bar{\tau}_2 = \tau_2 / \tau_0$, $\bar{\tau}_3 = \tau_3 / \tau_0$ и $\bar{\theta} = \theta / \theta_0$:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{3 \cdot T} \cdot (1 + n\bar{x} \cdot (4 - 3\bar{x})), \quad \bar{\tau}_2 = \frac{1}{3 \cdot T} \cdot ((1+n) + n\bar{x} \cdot (2 - 3\bar{x})), \quad \bar{\tau}_3 = \frac{1}{3 \cdot T} \cdot (2\bar{x} - 1), \quad (16)$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{10}{3} + n \cdot \left(\frac{8}{3} + 6\bar{x} - 6\bar{x}^2 \right) \right), \quad (17)$$

где $T = 1 + n + n\bar{x}(1 - \bar{x})$, $0 \leq \bar{x} \leq 1$.

По этим формулам проведены расчеты и построены соответствующие графики. На рис.3 приведена зависимость θ от \bar{x} для различных n . При этом для всех графиков (кроме рис.7) кривая 1 соответствует $n = 0,5$, кривая 2 – $n = 1$, кривая 3 – $n = 3$, кривая 4 – $n = 5$. Из этих графиков видно, что установка переборки в середине поперечного сечения практически не влияет на жесткость стержня. Её влияние на жесткость оказывается существенным при перемещении переборки от центра к левому или к правому краю сечения. Причем, как видно из графика, с увеличением толщины переборки жесткость стержня существенно возрастает (сравните кривые 1 и 4 около левого или правого края).

На рисунках 4 и 5 показаны зависимости $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ от \bar{x} . Как видим, эти графики симметричны относительно значения $\bar{x} = 0,5$, т.е. относительно перегородки установленной в середине сечения. С увеличением толщины перегородки касательные напряжения $\bar{\tau}_1$ (слева) и $\bar{\tau}_2$ (справа) от значения $\bar{x} = 0,5$ падают. Причем это падение существенно при приближении перегородки к краям поперечного сечения (сравните кривые 1 и 4).

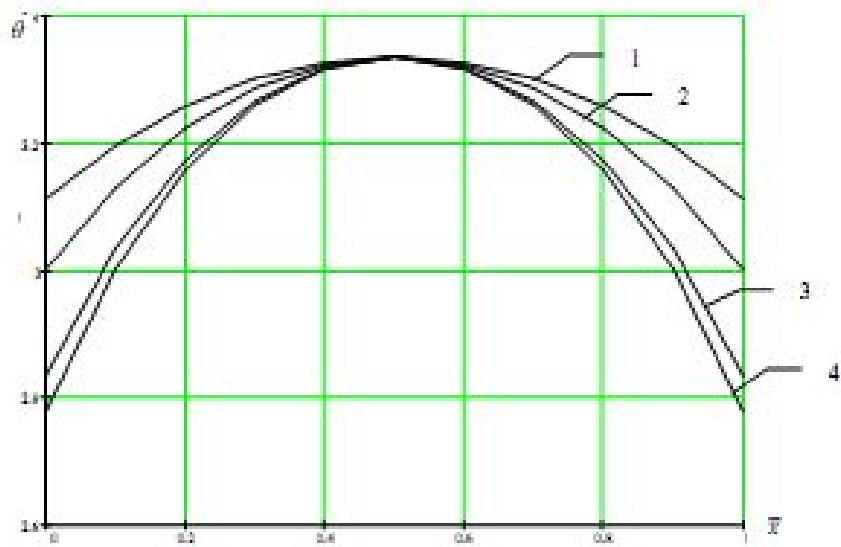
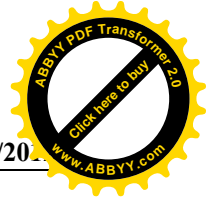
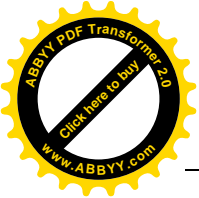


Рис.3

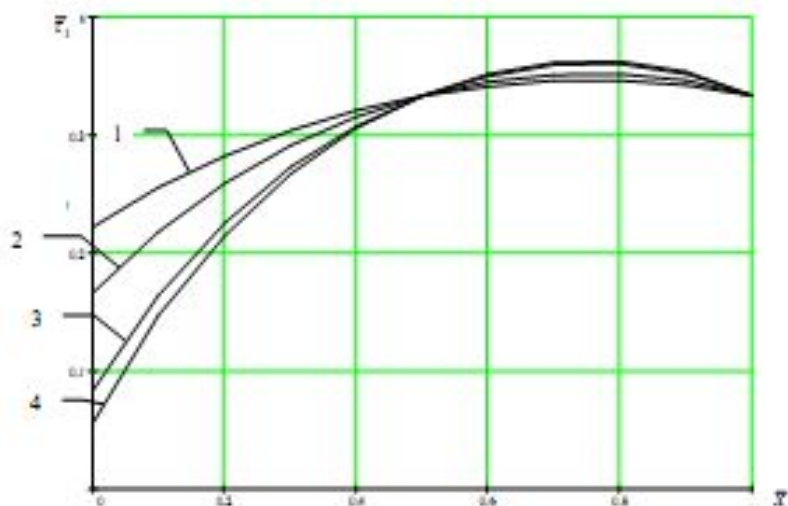


Рис.4

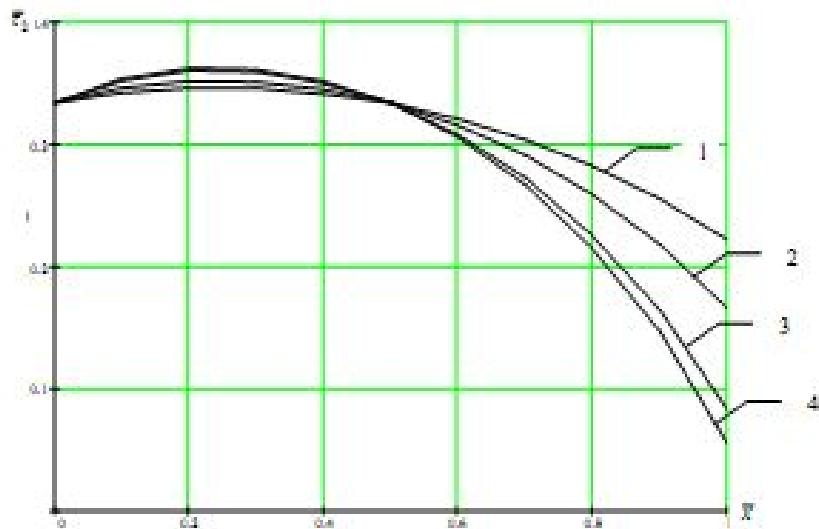
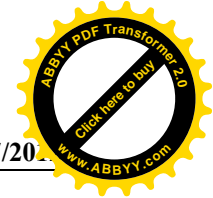
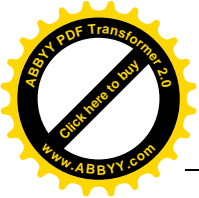


Рис.5



На рис.6 показана зависимость $\bar{\tau}_3$ от \bar{x} . Видно, что при установке переборки в середине коробчатого сечения она не воспринимает крутящий момент и следовательно, $\bar{\tau}_3 = 0$. С перемещением перегородки с левого на правый край и наоборот, напряжения меняют знак. График $\bar{\tau}_3$ относительно $\bar{x} = 0,5$ имеет антисимметричный характер, причем абсолютная величина касательного напряжения увеличивается с ростом толщины перегородки. Это увеличение существенно, если перегородка близка к краю (левому или правому) сечения.

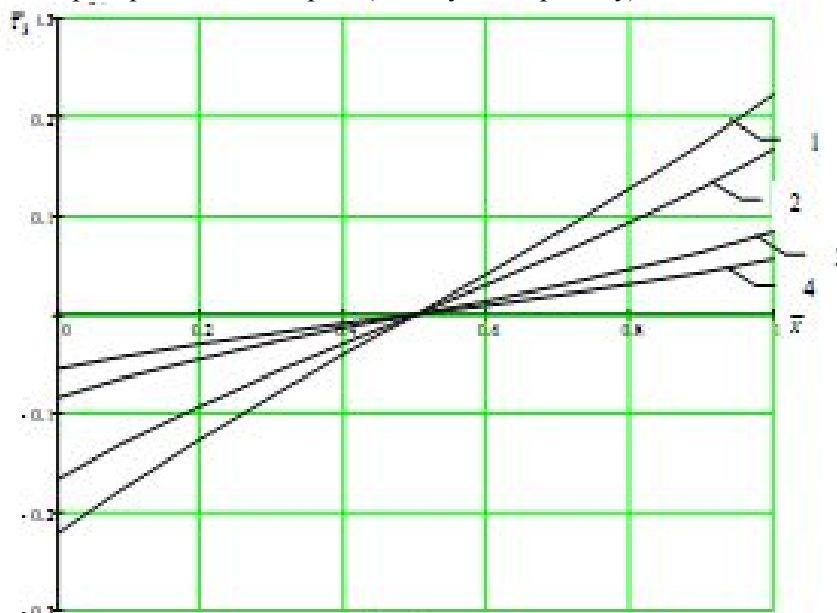


Рис.6

На рис.7 показана зависимость безразмерного угла закручивания $\bar{\theta}$ от толщины перегородки ($n\delta$), установленной на расстоянии $\bar{x} = 0,25$ от левого края сечения. Видно, как сильно падает (увеличивается жесткость стержня) угол закручивания с увеличением толщины перегородки.

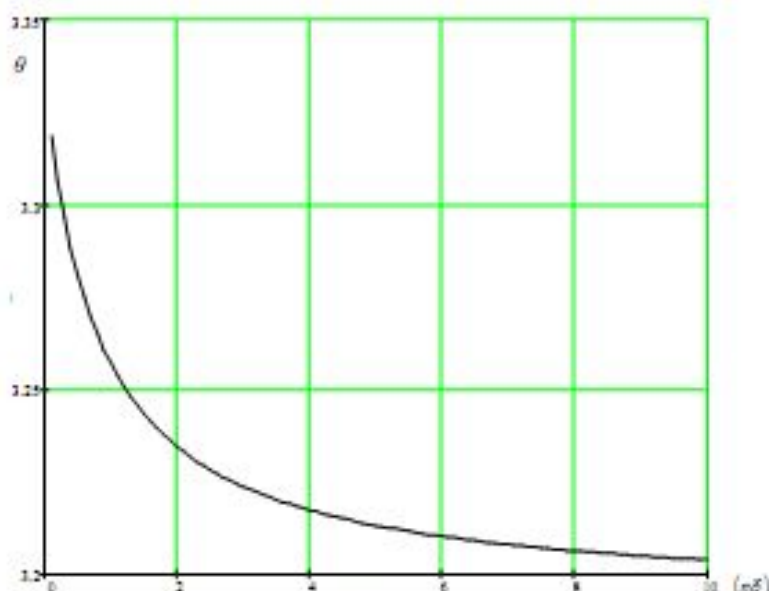


Рис.7



Таким образом, нами получены безразмерные формулы (16,17) для анализа напряженно-деформированного состояния при кручении тонкостенного трехсвязного коробчатого стержня. Как видно из формул, они содержат два параметра \bar{x} и n . Через эти параметры определяются местоположение и толщина (жесткость) переборки. Меняя эти параметры, можно оценить их влияние на напряженно-деформированное состояние коробчатого стержня с переборкой.

Литература

1. Власов В.З. Избранные труды. Т. II. Тонкостенные упругие стержни, М. Наука, 1963.
Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Машиностроение, 1973