

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СТРОИТЕЛЬСТВА, ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ  
им. Н. ИСАНОВА**

На правах рукописи  
УДК 624.012.35+624.012.45

**ЗУЛПУЕВ АБДИВАП МОМУНОВИЧ**

**ТЕОРИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ  
В РАСЧЕТАХ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ  
МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ**

*Специальность 05.23.01 - строительные конструкции,  
здания и сооружения*

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора технических наук

*Научный консультант: докт. техн. наук, проф. А.А.Абдыкалыков*

Бишкек- 2013

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ .....	5
<b>ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА, ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ .....</b>	<b>12</b>
Конструктивные системы отечественных и зарубежных многоэтажных зданий .....	12
Расчетные модели несущих систем многоэтажных зданий.....	19
Соотношения "напряжения-деформации" для бетона и арматуры при однократном загрузении кратковременной нагрузкой .....	21
Соотношения "напряжения-деформации" для бетона при различной длительности загрузения .....	27
Цель и задачи работы.....	30
<b>ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ ПО МЕТОДУ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В УПРУГОЙ СТАДИИ .....</b>	<b>35</b>
2.1. Формирование матричных соотношений «усилия – перемещения» для стержней в упругой постановке.....	35
2.2. Матрица внешней жесткости; вычисления ее элементов через единичные перемещения .....	40
2.3. Формирование матрицы внешней жесткости с помощью матричных операций .....	44
Граничные условия в методе сосредоточенных деформаций. Определение внутренних усилий. Оценка точности МСД. Примеры .....	50
Расчет железобетонных стержней и стержневых систем по деформированной схеме .....	57
Пространственно работающие упругие стержни .....	60
Выводы по главе .....	68
<b>ГЛАВА 3. ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ     КОНСТРУКЦИИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ.     ИССЛЕДОВАНИЯ ИХ РАБОТЫ В УСЛОВИЯХ     НЕЛИНЕЙНОСТИ .....</b>	<b>69</b>
3.1. Дискретная расчетная модель для нормальных сечений	

железобетонных стержней .....	69
3.2. Сопоставительный анализ расчетных моделей с растяжимым и ограниченно растяжимым бетоном .....	186
3.3. Соотношения между внутренними силами и деформациями в нормальных сечениях .....	73
3.4. Деформации и прочность по нормальным сечениям железобетонных элементов при заданных силах .....	78
3.4. Деформации и прочность по нормальным сечениям железобетонных элементов при заданных силах .....	86
Метод сосредоточенных деформаций для расчета прочности и перемещений статически неопределимых стержней с учетом деформированной расчетной схемы .....	96
3.6. Расчет по МСД железобетонных стержневых систем с учетом физической и геометрической нелинейности .....	110
Результаты расчета на ЭВМ железобетонных сечений и стержней. Сопоставительный анализ результатов расчета с опытными данными .....	112
Напряженно-деформированное состояние в нормальных сечениях железобетонных элементов при сложных режимах загрузки .....	126
Выводы по главе .....	133

#### **ГЛАВА 4. ПЛОСКО НАПРЯЖЕННЫЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПО МЕТОДУ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ .....**

Сопоставительный анализ основных положений МКЭ и МСД в задачах о плоско напряженных железобетонных элементах .....	134
4.2. Расчетная модель МСД для плоско напряженных несущих систем многоэтажных зданий .....	136
4.3. Учет граничных условий и конструктивных особенностей реальных швов .....	148
4.4. Соотношения между внутренними силами и перемещениями. Учет коэффициента поперечного расширения .....	155
4.5. Расчет плоско напряженных железобетонных несущих систем многоэтажных зданий МСД.....	164
4.6. Алгоритм, блок-схема и программа «МСД» для расчета плоско напряженных несущих систем многоэтажных зданий в упругой стадии работы. Примеры расчета .....	178
4.7. Выводы по главе .....	185

#### **ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННО-ДЕФОРМИРУЕМЫЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ В НЕСУЩИХ СИСТЕМАХ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ РАБОТЫ .....**

186

Сопоставительный анализ основных положений МКЭ и МСД в задачах изгибаемых железобетонных плит перекрытий .....	
Расчет изгибаемых железобетонных плит перекрытий и их фрагментов МСД.....	188
Экспериментальные исследования по выявлению «эффекта распора» на балочных плитах и фрагментах сборных железобетонных перекрытий на натуральных образцах .....	205
Метод сосредоточенных деформаций при расчете изгибаемых железобетонных плитных элементов и их систем с учетом нелинейной работы.....	207
Расчет балочных плит и плит перекрытий опертых по контуру МСД. Сопоставление их результатов с данными эксперимента .....	232
Выводы по главе .....	241

## **ГЛАВА 6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ**

<b>ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ СБОРНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ И ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ .....</b>	<b>242</b>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------

Экспериментально-теоретические исследования предельных состояний фрагмента сборного железобетонного перекрытий при	242
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----



вертикальном воздействии.....	
6.1.1. Конструктивные особенности фрагмента перекрытия .....	242
6.1.2. Исследование физико-механических свойств на напрягающем цементе НЦ-10.....	243
6.1.3. Исследование физико-механических характеристик межплитных швов .....	244
6.1.4. Испытание фрагмента сборного железобетонного перекрытия на вертикальное воздействие.....	245
6.1.5. Сопоставительный анализ результатов испытания с данными расчетов по МСД .....	245
Экспериментально-теоретические исследования предельных состояний фрагмента сборного железобетонного перекрытия при горизонтальных воздействиях.....	251
6.2.1. Испытание фрагмента перекрытия на диагонально- сжимающую нагрузку .....	251
6.2.2. Испытание фрагмента перекрытия по балочной схеме.....	258
Теоретические исследования предельных состояний элементов фрагмента перекрытия при горизонтальном воздействии .....	262
6.4. Предельные состояния железобетонных плит при длительном действии вертикальной нагрузки .....	266
6.5. Учет длительности действия вертикальной нагрузки при определении прогиба железобетонных изгибаемых элементов.....	271
6.6. Выводы по главе .....	275
<b>ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ .....</b>	<b>276</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>278</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	<b>306</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Прогнозы развития человечества на будущее показывают, что концентрация населения вокруг мегаполисов является закономерным, объективным и глобальным процессом, связанным с ростом народонаселения и развитием производительных сил.

По данным ООН в 1880 году в городах жило всего 1,7% населения мира, в 1950 году - 13,1 %, в 1970 году - 17 %, а к концу 2010 года в городах будет проживать 80-85 % обитателей планеты. В странах СНГ в 1927 году в городах проживало 18 % населения, в 1984 году - 65 %, к концу 2010 года процент городского населения достигнет более 80 %.

Разумеется, что в условиях природной ограниченности земли и всё возрастающей её стоимости города не могут безгранично расплзаться вширь, они растут, и будут расти вверх за счёт повышения этажности жилых, гражданских и общественных зданий.

"С ростом этажности здания становятся сложными и ответственными инженерными сооружениями. Об их ответственности говорит тот факт, что в жилом или административном высотном здании одновременно пребывают

тысячи людей, жизнь и благополучие которых непосредственно зависят от знания и умения проектировщиков и строителей, осуществляющих эти сооружения" [121].

Несущие системы современных многоэтажных зданий образуются, как правило, из стержневых и плоскостных железобетонных элементов, общее число которых может составлять многие сотни и тысячи. Надежная работа отдельных элементов и их совокупности должна быть обеспечена расчетом на все нагрузки и воздействия в стадии изготовления, монтажа и эксплуатации.

В этих расчетах наиболее ответственным этапом является построение расчетных моделей для отдельных элементов и несущих систем в целом. Расчетные модели должны отвечать двум диалектически противоречащим требованиям: - с одной стороны, расчетная модель должна наиболее адекватно отражать свойства моделируемого элемента несущей системы, с другой стороны, расчетная модель должна быть проста и легко реализуема с применением вычислительных средств.

Различные исследователи могут предлагать существенно различные математические модели для описания одной и той же системы, и здесь нельзя указать простого и четкого критерия для их дискретизации.

Хорошо воспринимаются лишь те модели, которые попадают в резонанс с интуитивными представлениями о природе рассматриваемой системы. Явное раздражение вызовут слишком сложные модели с множеством оговорок и поправок" [258].

В настоящее время для несущих систем многоэтажных зданий чаще всего применяются два типа расчетных моделей: дискретно-континуальные и дискретные.

Дискретно-континуальная расчетная модель для многоэтажных зданий различных конструктивных схем получила наибольшее развитие в трудах [18, 44, 79, 117-121, 207, 229, 278, 288, 301, 304, 349 и др.].

Дискретная модель для расчета многоэтажных зданий развивалась в работах [2, 3, 40, 42, 49, 56, 89-91, 142-144, 181, 189, 197-200, 238, 259 и др.].

Тенденции дальнейшего совершенствования железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий требуют соединения в расчетных моделях теории нелинейного деформирования железобетона с методами строительной механики и вычислительной техники для получения исчерпывающих и достоверных сведений о напряженно-деформированном состоянии в элементах и их соединениях, несущих системах в целом, на основании чего могут быть запроектированы и осуществлены на практике экономичные и надежные конструктивные решения многоэтажных зданий.

Ц е л ь ю работы является развитие теории упругих сосредоточенных деформаций проф. А.Р. Ржаницына и разработка на ее основе дискретных расчетных моделей для расчета несущих систем многоэтажных зданий, возведенных из железобетона; составление алгоритмов и программ для ЭВМ; проведение экспериментальных исследований на фрагментах из натуральных

железобетонных элементов для решения вопроса о достоверности полученных результатов расчета по предлагаемым методам расчета.

Н а у ч н у ю н о в и з н у составляют:

- развитие метода сосредоточенных деформаций (МСД) для расчета стержневых, плосконапряженных и изгибаемых железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, учитывающий реальные диаграммы нелинейного деформирования бетона и арматуры при различной длительности нагружения;

- методы получения матриц жесткости для железобетонных конструкций при различных видах напряженно-деформированного состояния и длительности нагружения, обеспечивающие научно-методическую совокупность в решении расчетных задач различных типов;

- данные результатов экспериментальных исследований фрагментов железобетонных перекрытий из натуральных элементов на вертикальные и горизонтальные воздействия, отражающие реальные условия работы конструкции в системе многоэтажных зданий;

- новые данные расчетов с привлечением вычислительной техники, учитывающие реальные диаграммы деформирования бетона и арматуры различных элементов несущих систем по методу сосредоточенных деформаций (МСД) и результаты их сопоставлений с данными натуральных экспериментов и другими расчетными методами;

- новая расчетная модель, учитывающая влияние податливости связи между отдельными сборными железобетонными элементами на общее напряженно- деформированное состояние системы в целом и дающая реальную их картину при любом уровне загрузки;

Н а з а щ и т у в ы н о с я т с я :

- дискретные расчетные модели для железобетонных стержневых и плоскостных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, позволяющие в условиях учета реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры, получить исчерпывающую и достоверную информацию о напряженно-деформированном состоянии на различных стадиях их работы и отличающиеся общностью, математической простотой, компактностью и удобством реализации на современной вычислительной технике;

-методы учета деформирования расчетной схемы железобетонных стержневых и плоскостных конструкций, сводящиеся к итерационной корректировке векторов внешних сил одновременно с корректировкой матриц жесткости при учете физической и геометрической нелинейности;

-методика экспериментальных исследований фрагментов междуэтажных перекрытий из натуральных образцов, с учетом совместной работы отдельных элементов в условиях нелинейности, на действие вертикальных и горизонтальных статических нагрузок и методика определение усилий распора;

-результаты расчетов на современной вычислительной технике на прочность, деформации и перемещения железобетонных стержневых и плоскостных конструкций несущих систем многоэтажных зданий в условиях

учета реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры и сопоставления их с данными эксперимента на натуральных образцах и полученными другими расчетными методами;

- расчетная модель, учитывающая влияние податливости связи между отдельными сборными железобетонными элементами на общее напряженно-деформированное состояние системы в целом и дающая реальную их картину при любом уровне загрузки;

**Практическое значение.** Разработанные дискретные нелинейные расчетные модели и алгоритмы, и рекомендации по методике испытаний фрагментов сборных железобетонных перекрытий из натуральных элементов, обеспечивают получение экономичных проектных решений для стержневых и плоскостных конструкций несущих систем многоэтажных зданий; результаты проведенных исследований получили применение в проектной и научно-исследовательской работах, и используются в учебном процессе при подготовке специалистов по специальности «Промышленное и гражданское строительство».

По результатам исследований разработан нормативный документ «Рекомендации по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами», (согласовано за № ОЮ/04-747 от 02.03.07 г. Госархитекстрой РУз Ташкент 2007 г.) и «Руководство по применению программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных деформаций», (г. Бишкек 07.03.07 г., приказ № 14-ПР (ОН)).

Применение рекомендаций по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами с использованием в них обычной и высокопрочной арматуры, позволяет сократить расход металла на единицу сборного железобетона до 30 %.

**Достоверность результатов.** Основные положения методики расчета железобетонных стержневых и плоскостных конструкций по методу сосредоточенных деформаций основываются на экспериментальных данных на натуральных образцах; деформативных и прочностных характеристиках материалов конструкций и их узловых соединений. Большинство расчетов реализовано в числовых примерах и проведено широкое сопоставление результатов вычислений с данными полученными опытным путем и другими расчетными приемами.

**Внедрение результатов.** Результаты теоретических положений по развитию методики расчета по методу сосредоточенных деформаций и разработанные на их основе пакет прикладных программ для расчета железобетонных стержневых и плоскостных конструкций используются с 2004 года в Ошском филиале Кыргызского научно-исследовательского проектного института по архитектуре и градостроительству и Главном управлении архитектуры и строительства в южном регионе Кыргызской республики, ОАО «Промпроект» и ОАО «Кыргызгипрострой» города Бишкек.

С 2006 года включены в учебный процесс строительного-технологического факультета КГУСТА им. Н.Исанова, инженерно-строительного факультета Ошского технологического университета для специальностей «Промышленное и гражданское строительство», «Автомобильные дороги и аэродромы» и «Экспертиза и управление недвижимостью». Предложенная методика расчета с пакетом прикладных программ для расчета железобетонных конструкций используется при выполнении курсового и дипломного проекта, в научно-исследовательской работе студентов и применена при выполнении госбюджетных и хоздоговорных научно-исследовательских работ.

С 2000 года, предложенный пакет прикладных программ используется в ООО «Ферганагражданпроект» для расчета сборных железобетонных плит перекрытий. В 2007 году в Госархитекстрой РУз внедрены рекомендации по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами для проектного института ЗАО «УзЛИТТИ».

В Кыргыз НИИП сейсмостойкого строительства при Госагентархитекстрой Кыргызской Республики в 2007 году внедрено «Руководство по применению программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных деформаций».

**А п р о б а ц и я р а б о т ы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались: на XV научно-производственном региональном совещании – семинаре «Автоматизация проектирования и исследований железобетонных конструкций многоэтажных зданий» в г. Львов в 1989 году; на Всесоюзном координационном совещании «Экономичное армирование железобетонных конструкций» в г. Фрунзе в 1990 году; на Межгосударственной научно-технической конференции «Строительные конструкции и перспективы их развития», «Теория и практика», в г. Москве в 1992 году; на Международной научно-теоретической конференции «Решение проблемных вопросов теории механизмов и машин» в г. Фергана в 1994 году; на Международной научно-теоретической конференции «Современные методы и средства информационных технологий» в г. Ош в 1995 году; на Республиканской научно-технической конференции «Ахборот ва ишлаб чикариш технологияларининг илгор усулларининг тадқиқоти ва техникаси» в г. Фергана в 2003 году; на региональной научно-практической конференции «Кыргызская государственность и наука в новом столетии» в г. Сулюкта в 2003 году, на научно-практической конференции «Проблемы инновационных технологий», посвященной 10-летию КИТЭП БатГУ в г. Кызылкия в 2005 году.

**П у б л и к а ц и и.** Основное содержание работы изложено в трех монографиях, опубликовано в 31 работах, важнейшие из них размещены в списке литературы.

**О б ъ е м р а б о т ы.** Диссертация состоит из введения, 6 глав, основных выводов, списка литературы и приложений. Общий объем работы 305 страниц (без приложений), в том числе: 110 рисунков. 82 таблицы, библиографии из 402 наименований.

**В первой главе кратко излагается состояние вопроса, формулируются основные направления исследований и их методические предпосылки; анализируются конструктивные особенности несущих систем многоэтажных**

зданий и методы их расчета, а также соотношение "напряжения-деформации" для бетона и арматуры при различных длительностях нагружения, в результате сформулированы основные задачи исследований.

Во второй главе развивается метод сосредоточенных деформаций (МСД) в наиболее простом варианте применительно к упругим однородным стержням, устанавливаются в матричной форме соотношения между внутренними силами и перемещениями граней элементов МСД; излагаются два способа составления элементов матрицы внешней жесткости для стержневой системы; рассматриваются наиболее часто встречающиеся граничные условия и выводятся элементы матриц жесткости для учета этих граничных условий; дается способ учета нелинейности при расчете стержней и стержневых систем; приводятся примеры для оценки точности МСД при расчете стержней.

В третьей главе развиваются дискретные расчетные модели для нормальных сечений железобетонных стержней произвольной поперечной формы, позволяющие описывать в единой математической форме поведение бетона и арматуры в сечениях элементов на всех уровнях загрузки; приводятся диаграммы одноосного сжатия-растяжения для бетона и арматуры при различных длительностях загрузки; устанавливаются соотношения между внутренними силами и перемещениями в элементах метода сосредоточенных деформаций; для статически определимых стержневых систем излагается алгоритм и приводится блок-схема программы для расчета прочности, трещиностойкости и деформаций в нормальных сечениях при заданных режимах загрузки. Приводятся примеры расчета железобетонных сечений при плоском и косом изгибе, косом внецентренном сжатии, а также гибких внецентренно сжатых стержней и изгибаемых балочных элементов, расчетные данные сопоставляются с опытными; излагаются основные положения расчета железобетонных сечений и элементов при сложных режимах загрузки; дается сопоставление расчетных методик при ограниченно и неограниченно растяжимых бетонах при оценке трещиностойкости и ширины раскрытия трещин.

В четвертой главе рассматриваются плосконапряженные железобетонные элементы несущих систем многоэтажных зданий; формулируются основные положения метода сосредоточенных деформаций для них, устанавливаются связи между внутренними силами и перемещениями граней плоских элементов МСД, выводятся формулы для локальных матриц внутренней и внешней жесткости; рассмотрены наиболее характерные для практики условия опирания плоских элементов и для них составлены выражения для соответствующих матриц жесткости; изложены алгоритм и блок-схема программы для расчета упругих плоско напряженных систем типа балок-стенок, глухих и проемных диафрагм жесткости, комбинированных

несущих систем и т.д.; приводятся примеры расчета и результаты сравниваются с решениями, полученными другими способами; дается развитие метода сосредоточенных деформаций для плосконапряженных несущих систем многоэтажных зданий с упругопластическими связями между отдельными элементами; опытные данные сопоставляются с результатами найденными из расчетов на ЭВМ.

В пятой главе исследуются железобетонные пространственно-деформируемые плитные конструкции; на первом этапе формулируется теория расчета упругих изотропных изгибаемых плит; рассматривается напряженно-деформированное состояние элементов по методу сосредоточенных деформаций; выявлено, что полные деформации складываются из изгибов в двух направлениях с постоянными кривизнами, сдвигов (распоров) и кручения; этим элементарным состояниям соответствуют изгибные, сдвиговые (распорные) и крутильные жесткости; получены формулы для элементов матриц внутренней и внешней жесткости; изучены типичные условия опирания плит (шарнирное, точечное, защемленное и т.д.) и для этих условий опирания составлены специальные формулы в матрицах жесткости; сделано обобщение решения на случай соединения сборных железобетонных элементов реальными связями с заданными характеристиками жесткости; для железобетонных изгибаемых плит рассмотрен элемент МСД с шестью степенями свободы, вследствие чего в изгибаемой анизотропной железобетонной плите улавливаются компоненты усилий изгибного напряженно-деформированного состояния (изгибающие моменты, поперечные силы, крутящие моменты) и плоского напряженно-деформированного состояния (нормальные силы (распор), сдвигающие силы и изгибающие моменты в плоскости); для этого общего случая составлены формулы для элементов матриц жесткости; приведены примеры расчета изгибаемых железобетонных плит с различными граничными условиями и схемами загрузки; расчетные значения сопоставлены с данными полученными опытным путем и другими методами расчета.

В шестой главе описываются расчетная модель МСД для междуэтажных перекрытий многоэтажных зданий смонтированных из сборных железобетонных элементов в натуральную величину, излагаются основные положения их расчетов по указанному методу; приведена методика экспериментальных исследований фрагментов междуэтажных перекрытий многоэтажных зданий смонтированных из сборных железобетонных элементов в натуральную величину на вертикальные и горизонтальные воздействия; получены характеристики податливости связей для межплитных швов и бетонного заполнения; приводятся результаты нелинейного расчета по МСД и сопоставление их результатов с данными экспериментальных исследований.

Диссертация заканчивается основными выводами, списком литературы и приложениями.

Диссертация выполнена в Кыргызском государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова и Кызылкийском институте технологии, экономики и права Баткенского Государственного университета.

Автор выражает благодарность ректору Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова, доктору технических наук, профессору А.А. Абдыкалыкову и заведующему кафедрой «Железобетонные конструкции» кандидату технических наук, и.о. профессору К. Темикееву за ценные советы, предложения и замечания сделанные ими при подготовке данной диссертационной работы.

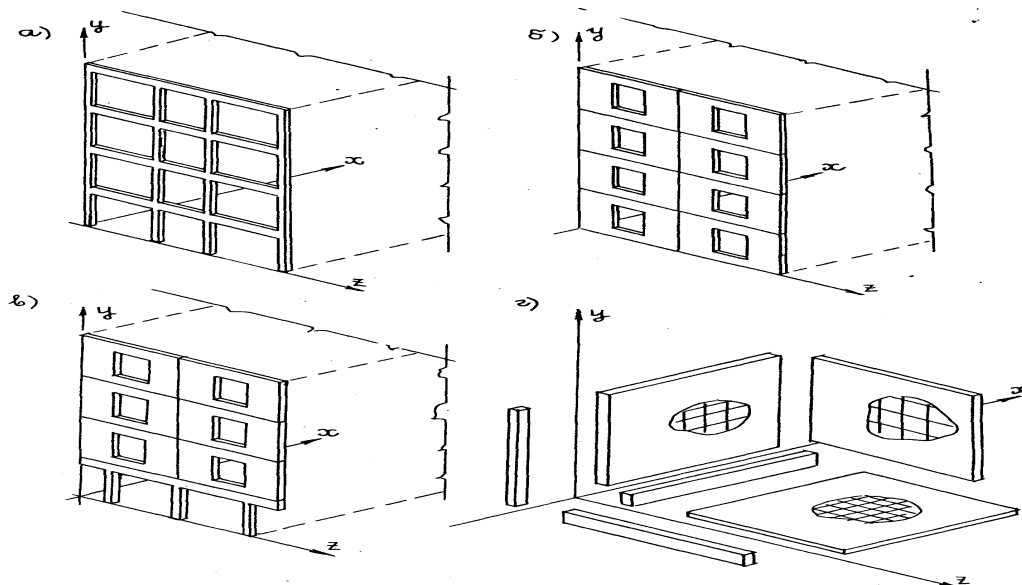
## ГЛАВА I. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА, ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

### 1.1. Конструктивные системы отечественных и зарубежных многоэтажных зданий.

**Под конструктивной системой понимается согласно [106] совокупность взаимосвязанных конструктивных элементов здания, характеризующаяся способом передачи нагрузок и решением главных конструктивных элементов.**

Более общим с точки зрения расчетов является термин несущая система [121], широко употребляемый в современной технической литературе. Существуют различные классификации конструктивных систем многоэтажных зданий [18,120,133,229,288 и др.]. В настоящей работе, в соответствии с ее направленностью, рассматриваются основные наиболее распространенные конструктивные системы: стержневые (каркасные), плоскостные (панельные) и комбинированные (рис. 1.1.1). Развиваемый в настоящей работе расчетный метод сосредоточенных деформаций [88, 89, 119, 158, 160, 299 и др.] построен таким образом, что в нем нет обычно распространенного различия между стержневыми и плоскостными элементами и системами из них.

Более того, железобетонная изгибаемая плита как элемент МСД с шестью степенями свободы может рассматриваться как элемент общего типа, на основе которого строятся как частные случаи все другие: железобетонные стержни (колонны, ригели, перемычки и др.), плосконапряженные элементы (стенные панели, диафрагмы жесткости, монолитные стены и др.), изгибаемые плитные элементы с поперечной нагрузкой (перекрытия, фундаменты, стеновые панели с эксцентриситетами из их плоскости и др.).





**Рис. 1.1.1. Конструктивные системы многоэтажных зданий а - каркасная, б - панельная, в - комбинированная, г – стержневые и плоскостные элементы в несущих системах**

Каркасные системы обладают рядом достоинств, а именно:

- минимальным весом конструкций в единице общего объема сооружения;
- большим многообразием объемно-планировочных решений при ограниченной номенклатуре изделий;
- возможностью создания крупных помещений и трансформации их в процессе эксплуатации;
- использованием высокопрочных бетонов и арматурных сталей, составляющих основу в перспективном строительстве.

По способу восприятия нагрузок каркасные системы делятся на рамные, рамно-связевые и связевые.

Сравнение стального и железобетонного каркасов в проектах торговых зданий показывает, что железобетонные каркасы обеспечивают экономию металла в 2,5 раза, снижение трудоемкости до 60%, стоимости сооружения до 25% [226].

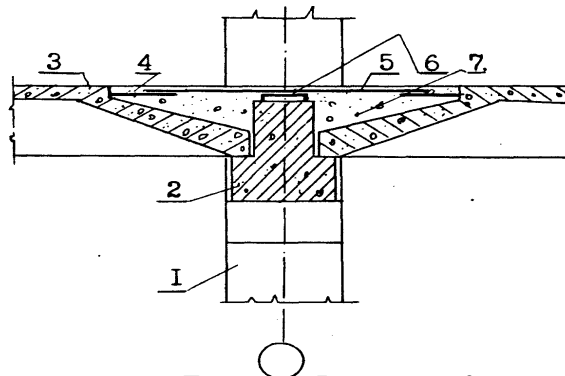
При строительстве административных зданий на проспекте Калинина, гостиниц "Националь" и "Белград" в Москве в сборном железобетоне достигнуто снижение расхода стали в 2 раза, трудозатрат в 1,5 раза, стоимости на 20% по сравнению с вариантами при стальном каркасе.

В многоэтажных промышленных зданиях стальные каркасы требуют в 2-2,5 раза больше металла при одинаковой стоимости с железобетонными.

Сборные каркасные конструкции из железобетона широко применяются за рубежом: в США, Германии, Японии, Франции, Италии, Чехии, Словакии, Венгрии, Польши, Болгарии и др., хотя объем сборных железобетонных конструкций за рубежом не превышает 25% общего объема бетонных и железобетонных конструкций.

В зарубежных странах конструктивные системы не унифицируются, в странах СНГ внедряются унифицированные каркасные системы.

В Болгарии распространена рамная система с большепролетными перекрытиями (рис.1.1.2), при сетках 6x12, 9x12 и 12x12м.



**Рис.1.1.2. Каркасная система в Болгарии; 1 - колонна, 2 - ригель, 3 - настил 2Т, 4 - арматурные выпуски, 5 - дополнительная сетка, 6 - хомуты-выпуски из ригеля, 7 - монолитный бетон**

Настилы перекрытий - типа 2Т с выпусками арматуры на массивных торцах; ригели таврового сечения, из верхней части которых выпущены замкнутые хомуты для образования с арматурой настилов и дополнительно укладываемой верхней арматурой неразрезности перекрытий. На стадии монтажа каркас является шарнирным и требует временных инвентарных связей, в стадии эксплуатации он работает по рамной схеме с жесткими узлами; при необходимости эта система применяется в промышленных и общественных зданиях, обеспечивает разнообразие архитектурных решений, достигается хорошая освещенность при малой строительной высоте перекрытия, применима в сейсмических районах.

В Чехии и Словакии разработана каркасная система STU трех типов (рис.1.1.3), состоящая из сборных железобетонных колонн, прогонов (плоских, с полками вниз и вверх), многопустотных панелей и типа 2Т. Характерно во всех этих сериях системы STU стремление к снижению строительной высоты перекрытия путем опирания панелей на нижние полки ригелей или подрезкой панелей на опорах.

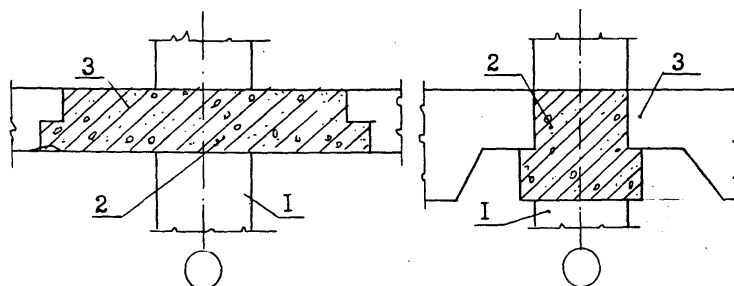


Рис.1.1.3. Каркасная система STU (Словакия); 1 - колонна, 2 - ригель, 3 – настил

Каркасная связевая система SKBS-75 (Германия) состоит из сборных железобетонных колонн высотой один-три этажа, одинарных или спаренных балок прямоугольного сечения и многопустотных преднапряженных плит; в отличие от всех других типов каркасных систем здесь опирание ригеля на колонну принято бесконсольным (рис.1.1.4) [385, 388, 399, 401, 402].

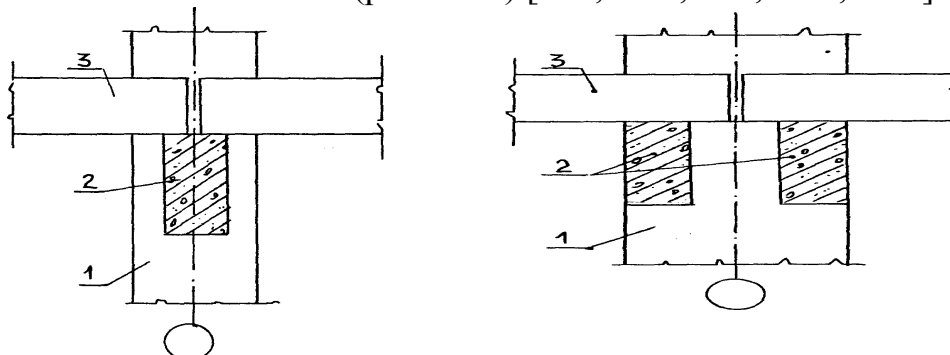


Рис.1.1.4. Каркасная система SKBS- 75 (Германия); 1- колонна, 2-ригель, 3-настил

- Из анализа зарубежного опыта каркасного строительства следует, что:
- этажность каркасных зданий определяется несущей способностью колонн, сечения которых должны быть минимальными;
  - наблюдается тенденция к укрупнению пролетов и росту временных нагрузок;
  - чаще всего каркасы решаются по связевой схеме;
  - имеется стремление к укрупнению элементов;
  - в перекрытиях применяются чаще всего предварительно напряженные плиты.

В странах СНГ каркасные системы многоэтажных зданий начали внедряться с 1950 г.

**Каркасные системы были вначале приемлемы для жилых зданий, но в них не получили распространения и нашли широкое применение в многоэтажных общественных и промышленных зданиях.**

В 1958-1959 гг. был разработан железобетонный каркас серии ИИ-60, усовершенствованный и замененный затем в 1964 г. серией ИИ-20 (рис. 1.1.5).

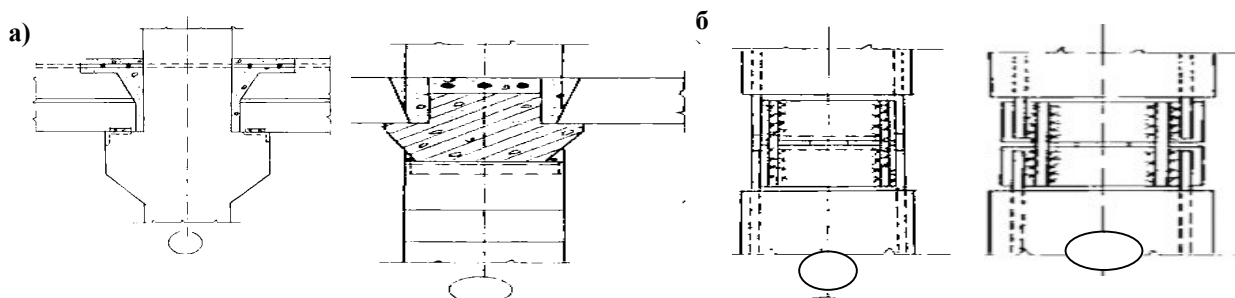


Рис. 1.1.5. Узлы каркаса серии ИИ-20 (1.420);  
а - стык ригеля на средней колонне, б - стык колонн

Конструкции серии ИИ-20(1.420) предназначены для промышленных зданий с тяжелыми нагрузками. Колонны сечением 40x40 и 40x60 см выполняются из бетона класса В20-В40 и арматуры класса А-III, стык колонн - жесткий с приваркой стыковых стержней к стальным оголовкам и последующим замоноличиванием. Ригели - из бетона класса В25; арматура при пролетах до 6 м из класса А-III, для пролетов 9 м - предварительно напряженная класса А-IV. Плиты перекрытий предварительно напряженные.

В поперечном направлении каркасы - рамный, в продольном - связевой с установкой стальных связей.

Для гражданских и административно-бытовых зданий разработаны и введены в действие в 1964 г. типовые сборные железобетонные конструкции унифицированного каркаса серии ИИ-04; к этой серии разрабатывались отдельные выпуски и дополнения в 1966 и 1967 гг. и 1972-1973 гг.

Последний вариант каркаса серии ИИ-04 (рис. 1.1.6) в странах СНГ

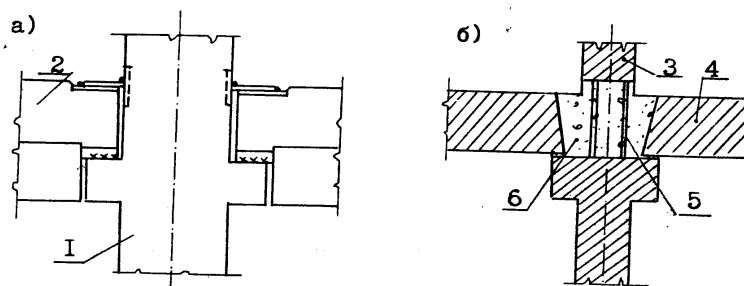


Рис. 1.1.6. Каркас серии ИИ-04; а - опирание ригелей на средней колонне, б - стык диафрагм жёсткости  
1 - колонна, 2 - ригель, 3 - диафрагма, 4 - настил перекрытия, 5 - арматурные выпуски, 6 - бетон замоноличивания

учитывает передовой опыт заводского изготовления и монтажа сборных каркасных зданий. В этом связевом каркасе упрощена конструкция и сокращены металлоемкость и объем сварочных работ в узлах примыкания ригеля к колонне за счет снижения опорного момента со 176 до 55 кН.м;

существенный недостаток предыдущих вариантов, - стальные оголовки колонн, - исключены; стык колонн решается с плоскими торцами и полуавтоматической ванной сваркой выпусков арматурных стержней; сейчас предложены, исследованы и осваиваются еще более простые стыки колонн, до предела снижающие его металлоемкость и трудоемкость на монтаже.

В этой серии предусматривается вариант сборных железобетонных диафрагм, в частности, обладающих повышенной жесткостью, но требующие замоноличивания горизонтальных стыков (рис. 1.1.6); в дальнейшем разработаны конструкции диафрагм, лишенные этого недостатка.

Для строительства в Москве используются конструкции унифицированного каркаса серии КМС, который использован также в Ленинграде, Алма-Ате, Ташкенте, на объектах БАМ.

В состав единого каталога входят также и панельные конструкции. Основная идея этого каталога - при минимальном наборе сборных конструкций обеспечить максимальную вариабельность проектных решений; принцип "от проектов - к изделиям" заменен принципом "от изделий - к проектам"; типовыми стали изделия, а не здания.

Унифицированный каркас КМС является связевым, горизонтальные нагрузки воспринимаются диафрагмами и ядрами жесткости (рис. 1.1.7).

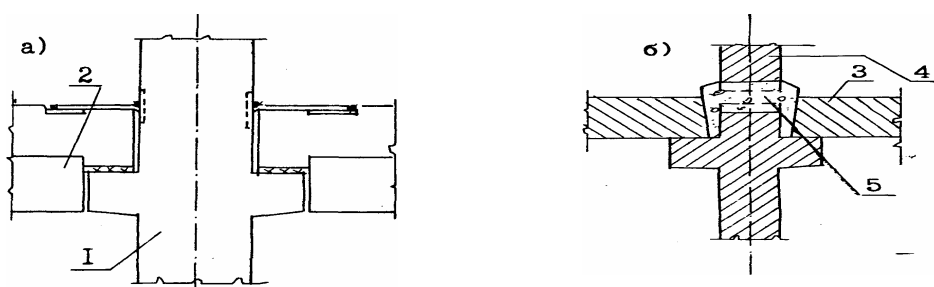


Рис. 1.1.7. Каркас серии КМС; 1 - колонна, 2 - ригель, 3 - настил, 4 - диафрагма, бетон замоноличивания; а - опирание ригелей на средней колонне, б - стык диафрагм жёсткости

Колонны этого каркаса приняты с единым сечением 400x400 мм и высотой на один-два этажа; бетон применяется класса В15-В45; арматура - класса А-III; увеличение их несущей способности идет в направлении повышения класса бетона до В60 и арматурных сталей класса Ат-V.

Важными элементами сборных колонн являются их стыки по высоте, которые должны иметь несущую способность не меньшую, чем по сечению в стволе колонны и в то же время быть малометаллоемкими, нетрудоемкими и технологичными.

Основным типом стыка колонн является плоский замоноличенный с подрезками бетона и ванной сваркой продольной арматуры.

В колоннах под большие нагрузки, при большом числе продольных арматурных стержней (до 16 $\phi$ 40) используются торцевые листы, к которым приваривается половина продольных стержней, остальные с точно обрезанными концами обрываются в зоне стыка, передача усилий в них идет через тонкий контактный растворный слой и сцепление по боковой поверхности с бетоном, усиленным косвенной арматурой.

Ригели в каркасе КМС-с полкой внизу для опирания плит, что снижает строительную высоту перекрытия; ригель имеет подрезки на опорах для опирания на скрытые консоли колонн, к которым они привариваются в двух уровнях, обеспечивая восприятия изгибающего момента с заданной величиной. Бетон в ригелях принимается классов В25-В40, арматура - в виде сварных каркасов.

Диафрагмы жесткости в унифицированном каркасе обычно выполняются сборными, реже монолитными в форме замкнутых ядер жесткости, плоских стен, швеллеров и более сложных форм. Бетон сборных диафрагм жесткости - класса В9-В25, арматура - двухслойная сетка и контурный арматурный блок.

Каркас серии I.020-1 решен по связевой схеме с подчеркнуто шарнирным соединением ригелей с колоннами; восприятие горизонтальных нагрузок обеспечивается железобетонными диафрагмами жесткости или стальными связями, объединенных сборными перекрытиями как горизонтальными дисками (рис. 1.1.8).

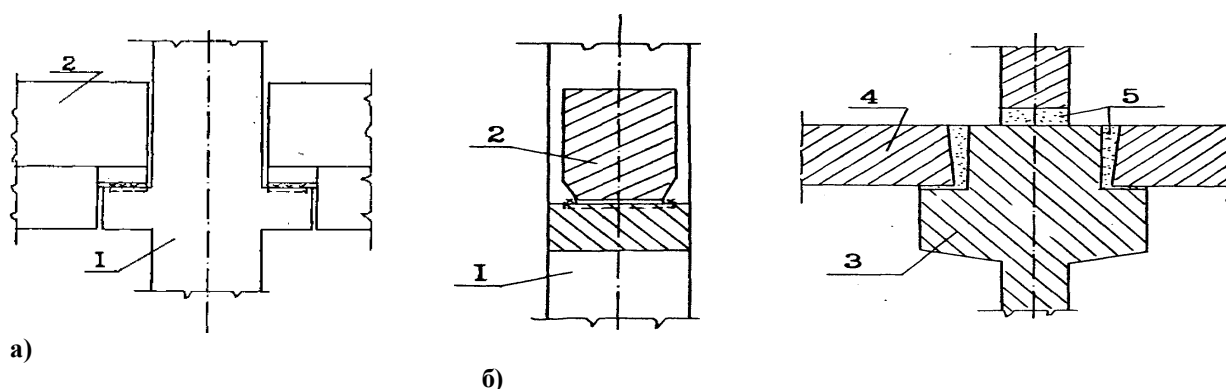


Рис. 1.1.8. Каркас серии I.020-1; а - опирание ригелей на средней колонне, б - стык диафрагм жёсткости; 1 - колонна, 2 - ригель, 3 - диафрагма жёсткости, 4 - перекрытие, 5 - раствор замоноличивания

Колонны серии I.020-1 - одно- и многоэтажные (до 4 этажей), что исключает устройство трудоемких и ответственных стыков; сечение колонн 300x300 и 400x400 мм, бетон - классов В25 - В45, арматура - класса А-III.

Стыки колонн (при этажности более 4-х) выполняются безметалльным, с ванной сваркой рабочих стержней с последующим замоноличиванием; несущая способность колонн - до 5800 кН.

Ригели в серии I.020-1 рассчитаны на опирание на нижние полки плит перекрытий различных типов (пустотных, ребристых, Т 2 и др.); пролеты ригелей - до 9 м; при пролетах 6 и 9 м арматура предварительно напряженная стержневая термически упрочненная класса Ат-V.

Диафрагмы жесткости в серии I.020-1 предусмотрены с поэтажной разрезкой и плоскими горизонтальными контактными стыками; в отличие от известных решений в этих диафрагмах существенно упрощена схема армирования и общий расход стали.

Из краткого анализа опыта проектирования зарубежья и стран СНГ; изготовления и строительства каркасных систем многоэтажных зданий можно сделать такие выводы:

1. При наличии мощной производственной базы по производству сборных железобетонных конструкций в странах СНГ развивается типизация строительной продукции, причем типизация открытая, при которой из ограниченного набора готовых изделий можно возводить самые разнообразные объекты.

2. Типизация изделий требует унификации конструктивных решений, узлов, нагрузок, объемно-планировочных решений при неограниченном многообразии зданий и сооружений.

3. В этих условиях возрастают требования к точности расчетов несущих систем многоэтажных зданий, становится все более экономически целесообразным применение современной вычислительной техники, так как массовая повторяемость железобетонных элементов, их расчетных схем и нагрузок соответственно многократно умножают экономию в расходе арматуры и бетона, достигаемую вследствие уточнения расчетных моделей с их реализацией на вычислительной технике.

Плоскостные (панельные) конструктивные системы образуются из вертикальных и горизонтальных пластин (панелей) - стен и перекрытий, причем эти конструкции могут выполняться из различных материалов и разными способами. Предложены и более подробные классификации плоскостных конструктивных систем, однако с точки зрения развиваемой в настоящей работе расчетной модели МСД детальная классификация не требуется.

Плоскостные (панельные) конструктивные системы по сравнению со стержневыми (каркасными) обладают рядом преимуществ, а именно: повышаются темпы возведения зданий, сокращаются сроки строительства и уменьшается расход металла на  $1 \text{ м}^2$  общей площади.

Эта конструктивная система целесообразна в зданиях с небольшими помещениями (жилые дома, гостиницы, дома отдыха, общественные здания).

Вертикальными плоскостными конструкциями в сборных системах являются наружные и внутренние стеновые панели, образующие панельные столбы. Наружные стеновые панели выполняются однослойными или многослойными и они представляют собой елочные конструктивные элементы, призванные обеспечивать восприятие вертикальных и горизонтальных нагрузок, переносить влияние температурно-влажностных деформаций, будучи основными элементами в формировании архитектурного облика здания.

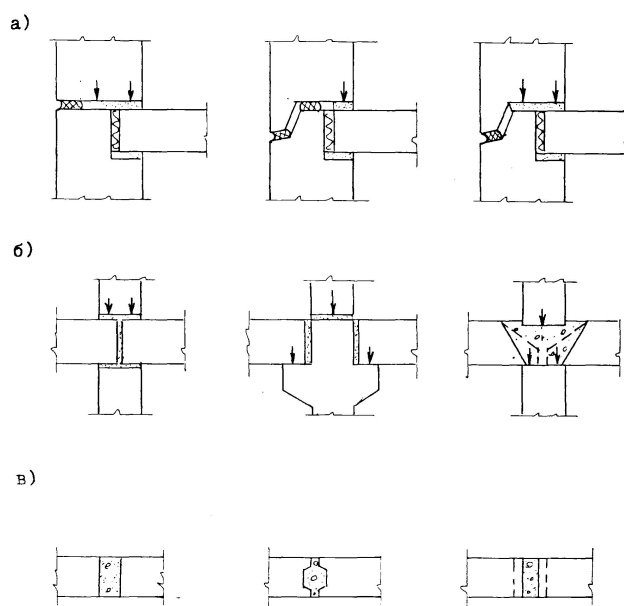
Панели внутренних стен выполняются как правило из тяжелого бетона (железобетона), и их толщина определяется требованиями несущей способности и звукоизоляции.

В плоскостных (панельных) конструктивных системах решающую роль в обеспечении прочности и устойчивости здания играют горизонтальные (рис. 1.1.9) и вертикальные стыки.

Для многих типов стыков установлены экспериментально-расчетным путем основные характеристики податливости (жесткости), которые естественным образом вписываются в расчетную модель МСД. Однако эти характеристики стыков часто оказываются недостаточно полными; они

должны задаваться не в виде однозначных соотношений "усилие-перемещение", а в форме многомерных (матричных) нелинейных зависимостей.

В настоящее время постановка и решение этой весьма непростой задачи находится пока в начальной стадии.



**Рис.1.1.9. Горизонтальные и вертикальные стыки в панельных зданиях; а- горизонтальные и вертикальные стыки в панельных зданиях; б- то же, внутренних, в- вертикальные стыки**

Комбинированные (или пластинчато-стержневые) конструктивные системы согласно принятой здесь обобщенной классификации - это такие, несущими элементами которых являются стержни и пластины (плиты). Под комбинированными конструктивными системами чаще всего понимается сочетание в одном здании каркасной (стержневой) системы в первых этажах и плоскостной (панельной) системы - в верхних.

## **1.2. Расчетные модели несущих систем многоэтажных зданий.**

В настоящее время установилась следующая классификация расчетных моделей для несущих систем многоэтажных зданий: континуальная, дискретно-континуальная и дискретная.

Континуальные модели, в которых здание представляется сплошной многоконтурной (многосвязной) призматической оболочкой, не получили широкого распространения из-за специфики моделируемых несущих систем многоэтажных зданий. Многоэтажные здания представляют совокупность дискретно расположенных элементов, объединенных податливыми связями и изрезанных оконными и дверными проемами. В этой модели приходится делать двойной переход, вначале континуализируя дискретные признаки несущей системы, а затем вновь дискретизируя полученные результаты.

Развитие локальных неупругих деформаций в сечениях или возникновение сосредоточенных смещений в связях между элементами приводят к

значительным осложнениям в использовании континуальных моделей; континуальные модели в расчетах современных многоэтажных зданий применяются все реже, уступая место дискретно-континуальной и дискретной моделям.

Для расчета несущих систем многоэтажных зданий широко распространена дискретно-континуальная модель, детально разработанная в трудах [119 - 121 и др.], которыми положено научное направление, развиваемое далее в [7, 24, 75, 92, 96, 116, 136, 138, 226 и др.] в результате чего удалось охватить практически все расчетные задачи, выдвигаемые практикой проектирования [117-131, 193, 279, 325, 356 и др.]. Впервые к расчету многоэтажных зданий дискретно-континуальная расчетная модель в форме составных стержней [301] была использована в [304].

Согласно [121] дискретно-континуальная расчетная модель предполагает континуализацию по вертикали, что характерно, прежде всего, для зданий большой этажности с компактным планом, эту модель составляют дискретные вертикальные элементы - столбы (глухие стены, простенки, диафрагмы и ядра жесткости и т.д.) и податливые непрерывно распределенные по высоте продольные связи (перемычки, закладные детали, участки перекрытий, ригели и т.д.); поперечные связи (перекрытия) принимаются чаще всего недеформируемыми в своей плоскости, однако это допущение по мере развития теории и накопления данных заменяется другим, учитывающим податливость перекрытий в своей плоскости. Важнейшим элементом в этой теории являются продольные связи с различным конструктивным оформлением, характеристики жесткости (податливости) этих связей в упругой или упругопластической стадии работы определяются аналитически или на основе экспериментальных данных в виде аналитических или табличных зависимостей.

Дискретное представление столбов, в том числе и для замкнутых в плане участков, например, ядер жесткости, позволяет выявить депланацию горизонтальных сечений несущей системы и стесненное кручение, вызывающее бимоментное напряженно-деформированное состояние.

Математической формой в дискретно-континуальной расчетной модели [121] является система дифференциальных уравнений второго порядка относительно нормальных сил в столбах, являющихся следствием сопротивления продольных связей сдвига и которые можно трактовать как дополнительные, или внутренние силы метода сил при удалении связей; число неизвестных нормальных сил равно числу рядов продольных связей, т.е. размер системы дифференциальных уравнений для реальных зданий составляет всего несколько десятков. Если в несущей системе имеются замкнутые в плане контуры, то возникают новые неизвестные - бимоменты, которым соответствуют свои дополнительные дифференциальные уравнения.

Дискретно-континуальная расчетная модель в форме [121] и ее вариантах широко распространена в исследовательских, проектных и проектно-исследовательских институтах, которая в иных формах разработана в трудах [135, 207, 229, 278, 288, 316 и др.]. Упомянутые работы появились за относительно короткий период, что свидетельствует об их независимости и



отражает возникшую в эти годы потребность в создании расчетной модели, отвечающей объективным условиям. О том же свидетельствует зарубежный опыт; дискретно-континуальные расчетные модели для несущих систем многоэтажных зданий развивались в работах [361, 362, 364-367, 371-375, 378, 380, 381, 389, 390, 392-395, 399, 401 и др.]. Заметный вклад в развитие дискретно-континуальной расчетной модели сделан в работе [278], в которой дана структура разрешающих уравнений, в наибольшей степени пригодная для их решения на ЭВМ. Система линейных дифференциальных уравнений содержит сдвигающие усилия в продольных связях сдвига (по их числу в несущей системе), а также поступательные перемещения и углы поворота здания в плане. В последнее время интенсивно развиваются нелинейные варианты дискретно-континуальной модели [67-70, 85, 118-131, 275-284, 303 и др.).

Таким образом, дискретно-континуальная расчетная модель оказалась достаточно жизнеспособной, плодотворной и перспективной; ее потенциальные возможности, видимо, будут развиваться и в будущем. Вместе с тем, можно полагать, что дискретно-континуальные расчетные модели будут, по мере развития вычислительной техники, все чаще заменяться дискретными расчетными моделями вследствие большей общности, универсальности и хорошей математической обеспеченности последних.

Усилиями многих ученых [2-5, 40, 41, 42, 60-64, 142-144, 179-182, 195-201, 259, 260, 288, 298 и др.] разработаны основы для дискретных расчетных моделей и на их основе созданы несколько поколений программ для ЭВМ.

### **1.3. Соотношения напряжения - деформации для бетона и арматуры при однократном загрузении кратковременной нагрузкой**

**Соотношения "напряжение-деформация" для бетона и арматуры при одноосных и многоосных напряженных состояниях  $\{\sigma\}_m - \{\varepsilon\}_m$  в условиях простых, сложных и длительных загрузений являются первичными важнейшими компонентами расчетных моделей несущих систем многоэтажных зданий. В сборных и сборно-монолитных железобетонных несущих системах для стыков между разными элементами также необходимо знать характеристики этих стыков в форме "усилие-перемещение"; в некоторых случаях для стыков можно составить свои расчетные модели, в которых могут быть реализованы соотношения "напряжение-деформации". В отдельных случаях удобно целые конструкции несущей системы представить в виде соединительных элементов, принимая для них обобщенные зависимости "усилие-**

перемещение"; так, например, поступают с надпроемными железобетонными перемычками в дискретно - континуальной - расчетной модели. В настоящее время наблюдается устойчивый, повышенный и все возрастающий интерес к диаграммам " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " для бетона и арматуры, их экспериментальному получению, аналитическому описанию и использованию в расчетах [9-24, 28, 32-34, 63-69, 76-78, 101, 110, 113, 114, 119, 121, 129, 132, 140-143, 162-166, 178-189, 195-204, 210-216, 221-227, 231-236, 255, 258, 275-284, 289-292, 298, 317-322, 346, 347, 349, 358-359 и др.]. Практическое получение полных диаграмм деформирования бетона и арматуры даже при одноосном сжатии и растяжении является технически трудной задачей, ее решение связано с созданием специального испытательного оборудования и средств контроля напряжений и деформаций. При кратковременном однократном нагружении диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " чаще всего получаются с контролем усилий (напряжений): задаются усилия и замеряются соответствующие деформации. Такой режим обычно дает только восходящие части ветвей диаграмм " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " (рис. 1.3.1,а).

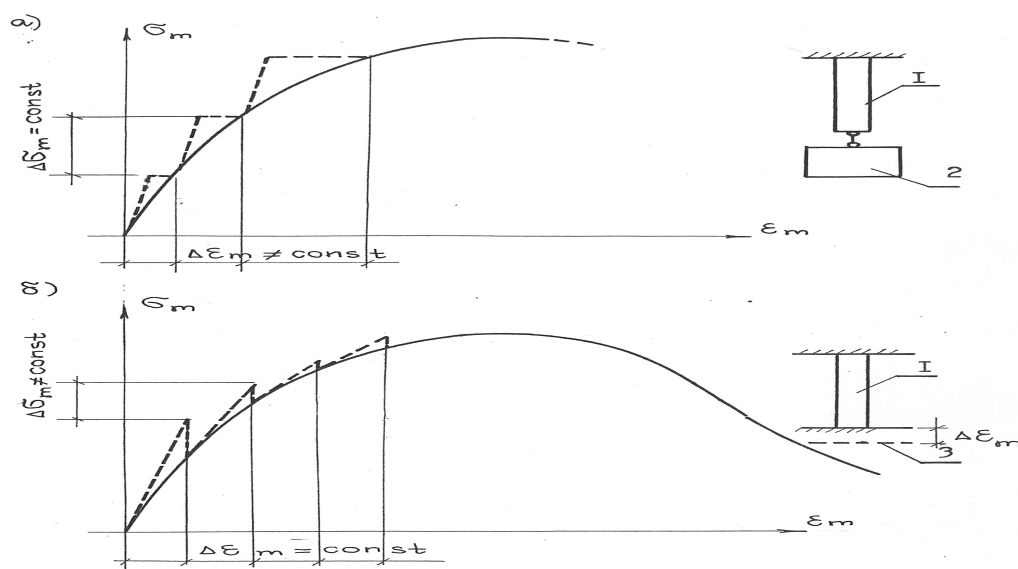


Рис. 1.3.1. Диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ ", а - мягкая схема (при действии "висячего" груза), б - жесткая схема (при задаваемых деформациях), I - опытный образец, 2 - "висячий" груз, 3 - силовое жесткое устройство

Полные диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ ", включая нисходящие ветви, получаются в опытах с контролем перемещений (деформаций): задаются некоторые деформации и регистрируются соответствующие им напряжения (рис. 1.3.1,б).

В первой схеме испытаний (рис. 1.3.1,а) при постоянной скорости приложения напряжений ( $\Delta\sigma_i / \Delta t_i = const$ , где  $\Delta t_i$  - время приложения нагрузки на  $i$ -ом этапе) соответствующие деформации растут опережающими темпами ( $\Delta\varepsilon_i / \Delta t_i \neq const$ ). Это связано с неупругими деформациями (ползучестью). Первую схему загрузки иногда называют "мягкой", вторую - "жесткой" [292].

Вид диаграммы после достижения ее вершины обычно при таких испытаниях улавливается плохо, так как регулирование снижающихся напряжений затруднительно.

При загрузке с контролем деформаций, или вынужденными деформациями (рис. 1.3.1,б) с постоянной скоростью роста ( $\Delta\varepsilon_i / \Delta t_i = const$ ) соответствующие им напряжения растут с постепенным замедлением, ( $\Delta\sigma_i / \Delta t_i \neq const$ ), при этом появляется эффект релаксации напряжений; вторая схема в практической реализации сложнее, но при этом можно получать полные диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ ", включая нисходящие ветви.

Описанные схемы загрузки являются идеализированными. В первой схеме нагрузка может быть "висячей", т.е. только увеличивающейся, и к испытательной установке не предъявляется требований в отношении ее внутренней жесткости. Во второй схеме испытательное устройство должно иметь абсолютную внутреннюю жесткость.

В действительности приходится мириться с неизбежными отклонениями от указанных требований, следствием чего являются различия в диаграммах " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " в опытах авторов, пользующихся различными опытными устройствами. Особенно это сказывается на характере нисходящих участков диаграмм " $\sigma_m - \varepsilon_m$ ".

Поэтому следует считать актуальной задачу составления регламентирующего документа, определяющего требования к параметрам испытательных устройств и методике испытаний.

Следующим этапом в получении диаграмм " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " является их оформление (представление). Диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " при одноосных напряжениях могут быть оформлены тремя способами: табличным, графическим и аналитическим.

Табличные формы для " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " являются обычно первичным испытательным документом; с развитием автоматизированных средств измерения, записи и обработки результатов табличные формы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " могут стать основными в исследовательских работах. Однако они лишены общности

и универсальности и содержат большой объем информации, неудобной для хранения и передачи.

Графическое представление одноосных диаграмм " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " обычно выполняет иллюстрированные задачи, точность автоматических графопостроителей обычно невысока.

Наибольшее распространение получили аналитические формы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ ". Они весьма многообразны и вместе с тем на сегодня к ним предъявляются некоторые общие требования:

- они должны быть простыми по форме и универсальными, т.е. иметь несложную математическую запись при минимальном числе опытных параметров с ясным физическим смыслом и быть пригодными для описания поведения наибольшего набора разных материалов (бетона, арматуры и т.д.);

- параметры диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " должны иметь соответствующее обоснование с позиций теории вероятностей и математической статистики;

- диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " должны быть пригодными для решения задач расчета конструкций по предельным состояниям, оценки результатов испытаний и т.д.;

- в диаграммах должны отражаться факторы времени, (длительность воздействия) и характер повторного нагружения;

- диаграммы " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " должны легко увязываться с современными вычислительными подходами с использованием ЭВМ, т.е. служить для построения матриц жесткости сечений, элементов и систем, а также реализации различных итерационных процессов, характерных для расчетов железобетонных конструкций.

Наибольшее распространение из всех аналитических форм " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " получили степенные [9 - 17 и др.].

Степенные зависимости часто используются для связи между другими физическими величинами. Например, диссертантом [325] использована зависимость

$$q_x \approx \sum_n a_n \sigma_x^n \quad (1.3.1)$$

для описания связи между перемещениями  $q_x$  арматурного стержня в сечениях с координатой  $X$  подвергнутого выдергиванию (втягиванию) из железобетонного элемента, где  $a_n$  - опытные параметры, число которых соответствует требуемой точности описания зависимости " $q_x - \sigma_x$ ", где  $\sigma_x$  - нормальное напряжение в арматуре в сечении с координатой  $X$ .

Основой для отыскания параметров  $a_n$  служила опытная зависимость " $q_o - \sigma_o$ " между смещениями  $q_o$  и напряжениями  $\sigma_o$  на свободном конце

арматурного стержня. Параметры  $a_n$  отыскиваются из решения системы алгебраических уравнений вида

$$\{q_o\} = [\sigma_o^n] \{a_n\}, \quad \text{где } \{q_o\} = \{q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}\}^T \quad (1.3.1, a)$$

вектор опытных значений для перемещений арматурного стержня на свободном конце;  $[\sigma_o^n]$  - матрица, элементами которой служат нормальные напряжения (в степенях  $n$ ) на свободном конце;

$$\{a_o\} = \{a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0n}\}^T \text{ - искомые параметры.}$$

Ход решения задачи по отысканию параметров  $a_n$  в данном конкретном случае является общим в математическом отношении для подобных нелинейных задач.

Применительно к диаграмме " $\sigma$ - $\varepsilon$ " формула (1.3.1.) выглядит так:

$$\sigma = \sum_n \varepsilon_n \varepsilon^n \quad (1.3.2.)$$

где  $n$  - целые (или дробные) степени.

Зависимости " $\sigma$ - $\varepsilon$ " типа (1.3.2) имеют тот недостаток, что они трудно обращаются, т.е. обратная запись в форме " $\varepsilon$ - $\sigma$ " требует решения нелинейных алгебраических уравнений высокого порядка. Кроме того, в формуле (1.3.2) трудно учесть влияние длительности нагрузки и характер повторности нагружений.

В настоящем исследовании использованы " $\sigma_m$ - $\varepsilon_m$ " в форме [186] при однократном загрузении кратковременной нагрузкой и в форме [338] при различных длительностях загрузки, эти диаграммы включены в расчетные формулы для элементов матриц жесткости сечений, элементов и несущих систем, они введены в программы для ЭВМ, на их основе выполнены численные примеры и даны сопоставления результатов расчетов и опытов.

Согласно [186] диаграммы " $\sigma_m$ - $\varepsilon_m$ " для бетона и арматуры при однократном, одноосном сжатии и растяжении принимаются в единообразной форме

$$\sigma_m = E_m \nu_m \varepsilon_m = E_m \varepsilon_m, \quad (1.3.3)$$

где  $\nu_m$  - коэффициенты упругих деформаций материала (бетона, арматуры).

Для линейных участков диаграмм  $\nu_m = 1$ , для восходящего и нисходящего участков

$$\nu_m = \hat{\nu}_m \pm (\nu_o - \hat{\nu}_m)(1 - e_{1m}\eta_m - e_{2m}\eta_m^2)^{0,5} \quad (1.3.4)$$

где:  $\hat{\nu}_m$  - значение  $\nu_m$  для вершины диаграммы;

$$\eta_m = (\sigma_m - \sigma_{m,1}) / (\hat{\sigma}_m - \sigma_{m,1});$$

$\hat{\sigma}_m$  - напряжение для вершины диаграммы;  $\sigma_{m,1}$  - напряжения, отвечающее линейной части диаграммы;  $e_{1,m}$  - коэффициент, характеризующий вид материала;  $e_{2,m} = 1 - e_{1,m}$

Конкретные значения параметров бетона и арматуры приводятся в [186], на рис. 1.3.2 приведен характерный вид диаграммы " $\sigma_\epsilon - \epsilon_\epsilon$ " для бетона при сжатии и растяжении.

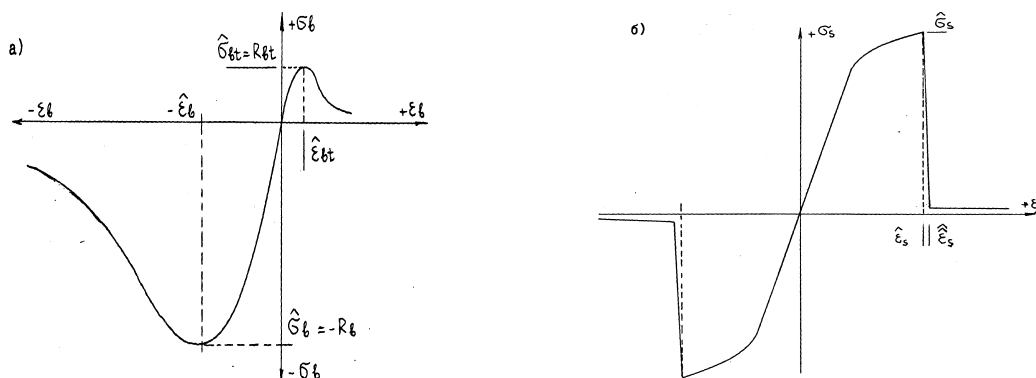


Рис. 1.3.2. Диаграммы "напряжения - деформации" при одноосном нагружении, а - бетона, б - арматуры.

В исследованиях по железобетону для диаграммы арматуры " $\sigma_s - \epsilon_s$ " пока не считается нужным заниматься нисходящими ветвями, ибо обрыв арматуры даже с площадкой текучести носит мгновенный характер, и современные испытательные средства не в состоянии задержать процесс обрыва арматуры.

В большинстве задач по железобетону обрыв арматурного стержня означает исчерпание прочности в сечении, после чего конструкция не поддается описанию.

Однако в ряде случаев с обрывом некоторых арматурных стержней конструкция может оставаться жизнеспособной (статически неопределимые стержневые и распорные системы, сечения с распределенным рас-положением арматуры по высоте, плосконапряженные конструкции и т.д.).

В этих случаях целесообразно для арматурных стержней в диаграммах " $\sigma_m - \epsilon_m$ " удерживать нисходящие ветви. До получения соответствующих экспериментальных данных можно нисходящую ветвь задавать круто падающей прямой с переходом на нисходящий участок с малым уровнем напряжений. Такое очертание нисходящей ветви практически не приведет к искажению действительного поведения арматуры, однако, позволит в расчетных итерационных процессах избежать математических затруднений.

При двух- и многоосных напряженных состояниях в бетоне (и арматуре) соотношения между напряжениями и деформациями будут носить многомерный характер, который можно записать в форме (1.3.3), подразумевая при этом, что модуль деформаций будет носить сложный характер, определяемый уровнем и соотношением напряжений, а также принятым положением координатных осей.

#### 1.4. Соотношения «напряжения-деформации» для бетона

### при различной длительности загрузки

Фактор длительного действия нагрузки, оказывающий существенное влияние на характер работы железобетона, изучался многими исследователями [15, 27, 78, 338, 357 и др.], в которых для описания работы бетона принимались различные модели. Так, в работе Ю.П. Гущи [78] для искомой зависимости  $\sigma_b = f(\varepsilon_b)$  предлагается многочлен вида

$$\sigma_b = k_1\eta + k_1\eta^2 + k_1\eta^3 + \dots + k_n\eta^n + \dots, \quad (1.4.1)$$

где  $\eta = \varepsilon/\varepsilon_R$  и при этом показано, что для кривых, имеющих нисходящую ветвь, можно принять  $n = 4$ , а для кривых, не имеющих нисходящей ветви –  $n = 3$ .

В настоящей работе, в отличие от [78], для любой длительности загрузки предлагается зависимость  $\sigma_b = f(\varepsilon_b)$  в виде многочлена 4-ой степени<sup>1</sup>

$$\sigma_b/R_b = k_1\eta + k_1\eta^2 + k_1\eta^3 + k_4\eta^4 \quad (1.4.2)$$

где  $\eta = \varepsilon/\varepsilon_R$  – безразмерная переменная;  $\varepsilon_u$  – предельная деформация;  $\varepsilon_R$  – деформация, соответствующая максимальному сопротивлению бетона.

Неизвестные коэффициенты  $k_i$  ( $i = 1, 4$ ) в уравнении (1.4.2) однозначно определяются из начальных условий:

1) производная функции (1.4.2) в точке  $\varepsilon = 0$  равна начальному модулю упругости бетона (тангенс угла наклона равен  $E_b$ )

$$\left(\frac{d\sigma_b}{dR_b}\right)_{\eta=0} = E_b \frac{\varepsilon_R}{R_b} \quad (1.4.3)$$

2) производная функция (1.4.2) в точке  $\varepsilon = \varepsilon_R$  равна 0 (касательная к кривой в данной точке параллельна оси деформаций)

$$\left(\frac{d\sigma_b}{dR_b}\right)_{\eta=1} = 0 \quad (1.4.4)$$

3) функция (1.4.2) в точке  $\varepsilon = \varepsilon_R$  ( $\sigma_b = R_b$ ) достигает максимального значения, равного 1

$$\left(\frac{\sigma_b}{R_b}\right)_{\eta=1} = 1; \quad (1.4.5)$$

---

<sup>1</sup> Для получения универсальной зависимости вида (1.4.2) не зависящей от начальных характеристик бетона, будем оперировать относительными значениями, как напряжений  $\sigma_b/R_b$ , так деформаций  $\eta = \varepsilon/\varepsilon_R$

4) функция (1.4.2) в точке  $\varepsilon = \varepsilon_u$  (предельное значение деформации) достигает значения, равного  $\varepsilon_u/\varepsilon_R$

$$\left(\frac{\sigma_b}{R_b}\right)_{\eta=\varepsilon_u/\varepsilon_R} = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_R}. \quad (1.4.6)$$

Подстановка (1.4.3) - (1.4.6) в (1.4.2) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, которая в матричном виде запишется в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_R}\right) & \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_R}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_R}\right)^3 & \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_R}\right)^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_b \frac{\varepsilon_R}{R_b} \\ 0 \\ Q_{\max} \\ Q_{fin} \end{Bmatrix}, \quad (1.4.7)$$

где  $Q_{\max}$  - величина максимального относительного напряжения ( $\varepsilon = \varepsilon_R$ );  $Q_{fin}$  = величина относительного напряжения, соответствующего разрушению  $\varepsilon = \varepsilon_u$ .

Вычисленные по (1.4.7) коэффициенты  $k_i$  ( $i = 1,4$ ) для различных длительностей загрузки от  $t = 60$  мин до  $t = 100$  лет, включая начальные параметры бетона, приведены в табл.1.

Для перехода от относительных величин деформаций  $\eta = \varepsilon/\varepsilon_R$  к их абсолютным значениям  $\varepsilon$  в виде зависимостей.

$$\frac{\sigma_b}{R_b} = a \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2 + c \cdot \varepsilon^3 + d \cdot \varepsilon^4 \quad (1.4.8)$$

и построения графиков этих зависимостей в единой системе координат, выполним обратное преобразование по соотношениям

$$a = \frac{k_1}{\varepsilon_R}, b = \frac{k_2}{\varepsilon_R^2}, c = \frac{k_3}{\varepsilon_R^3}, d = \frac{k_4}{\varepsilon_R^4} \quad (1.4.9)$$

Графики функций «напряжения – относительные деформации» для различных длительностей загрузки, полученные по (1.4.8), приведены на рис.1.4.1.

Имея зависимости  $\left(\frac{\sigma_b}{R_b}\right) - \varepsilon$  для различных дискретных длительностей загрузки, можно теперь найти общую кривую (оггибающую), которая позволит описать зависимость (1.4.8) для любого промежуточного периода загрузки. Воспользуемся для этого методом наименьших квадратов, а искомую кривую будем подбирать в виде алгебраического многочлена  $m$ -ой степени:

$$\sigma_b/R_b = A_0 + A_1 \cdot \varepsilon + A_2 \cdot \varepsilon^2 + A_3 \cdot \varepsilon^3 + \dots + A_m \cdot \varepsilon^m \quad (1.4.10)$$

$\sigma_b/R_b$  **Зависимость «напряжения-деформации» для различных длительностей загрузки**



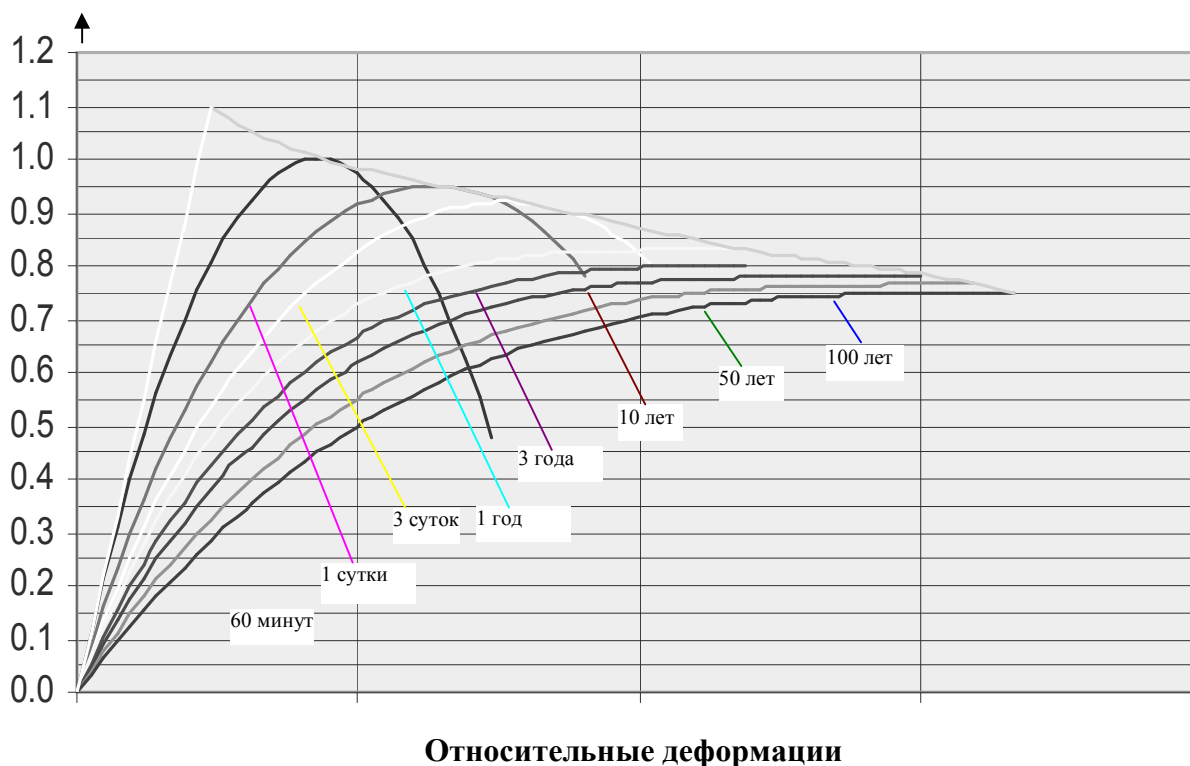


Рис. 1.4.1. Графики зависимостей «напряжения - относительные деформации»

Табл. 1.4.1

Данные к описанию зависимостей  $\sigma - \epsilon$  и коэффициенты  $k_i$  ( $i=1,4$ )

Длительность	$t = 60$ мин	$t = 1$ сут	3 сут.	1 год	3 года	10 лет	50 лет	100 лет
$E_b$	30600	21820	16820	14585	12030	10280	8220	6850
$\epsilon_R$	0,0018	0,0027	0,0034	0,0050	0,0060	0,0063	0,0067	0,0070
$\epsilon_u$	0,0031	0,0036	0,0050	0,0053	0,0067	0,0067	0,0070	0,0075
$\left(\frac{\sigma_b}{R_b}\right)_{\max}$	1,00	0,96	0,92	0,83	0,80	0,78	0,765	0,75
$\left(\frac{\sigma_b}{R_b}\right)_u$	0,50	0,80	0,80	0,83	0,80	0,78	0,765	0,75
$k_1$	2,0102	2,2397	2,3688	3,2066	3,2809	3,0303	2,6275	2,3333
$k_2$	-1,0124	-2,1093	-2,2036	-4,6436	-4,4135	-3,3095	-2,5411	-2,5411
$k_3$	-0,0058	-1,3393	0,9808	2,9874	3,4264	2,8561	1,7966	1,0822
$k_4$	0,008	-0,5098	-0,226	-0,7204	-0,8727	-0,6929	-0,3496	-0,1244

Исходные данные и результаты вычислений приведены в табл. 1.4.2.

Таблица 1.4.2

$\epsilon$	0,0018	0,0027	0,0032	0,0050	0,0060	0,0063	0,0067	0,0070
$\sigma_{эмпир}$	1,00	0,96	0,92	0,83	0,80	0,78	0,765	0,75
$\sigma_{поли}$	1,003	0,954	0,926	0,831	0,794	0,784	0,767	0,748

В итоге имеем формулу для огибающей в виде следующей полиномиальной зависимости 5-го порядка

$$\sigma_b/R_b = A_0 + A_1 \cdot \epsilon + A_2 \cdot \epsilon^2 + A_3 \cdot \epsilon^3 + A_4 \cdot \epsilon^4 + A_5 \cdot \epsilon^5 \quad (1.4.11)$$

полученную сглаживанием по методу наименьших квадратов ординат точек, соответствующих максимальным значениям кривых  $\sigma_b/R_b = f(\varepsilon_b)$  для различных длительностей загрузки. Коэффициенты искомой зависимости (1.4.11) представлены в табл. 1.4.3.

Таблица 1.4.3

$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1,4336	-540,1959	267537,6327	-70049018,1351	8736038194,9844	-414229619632,00

Значения функции (1.4.11) стремятся при  $\varepsilon \rightarrow 0,0018$  (соответствует длительности загрузки, приблизительно,  $t = 60$  мин. ...1 сут.) и стремятся к 0,75 при  $\varepsilon \rightarrow 0,007$  (соответствует длительности загрузки  $t = 100$  лет и более). Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными экспериментов и не противоречат положениям действующего СНиП.

### 1.5. Цель и задачи работы

Результаты анализа конструктивных систем многоэтажных зданий на основе отечественного и зарубежного опыта, а также методов их расчёта, выполненные в п.п. 1.1, 1.2. и 1.3, позволяют сформулировать цель и задачи данной работы, определить методы исследований.

Целью данной работы является развитие теории упругих сосредоточенных деформаций проф. А.Р. Ржаницына [299] и разработка на ее основе дискретных расчётных моделей для расчета несущих систем многоэтажных зданий, возведенных из железобетона; составление алгоритмов и программ для ЭВМ; проведение экспериментальных исследований на фрагментах из натуральных железобетонных элементов для решения вопроса о достоверности полученных результатов расчета по предлагаемым методам расчета.

Для достижения и реализации поставленной цели определены и решены следующие основные задачи:

- разработан и развит метод сосредоточенных деформаций (МСД) для расчёта железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, который позволяет получить реальную картину напряжённо-деформированного состояния железобетонных элементов на всех уровнях загрузки, вплоть до разрушения;

- получены формулы и матрицы жесткости сечений для железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, учитывающие реальные диаграммы деформирования железобетона при различных длительностях загрузки, обеспечивающие существенное сокращение объема программы за счёт исключения процедур перемножения матриц в процессе итерационных расчётов;

- предложен и проверен метод учёта деформирования расчётной схемы сооружения, введением дополнительного вектора узловых нагрузок, в основное матричное уравнение метода перемещений, при этом совмещаются процедуры учёта нелинейности, т.е. реальных диаграмм деформирования железобетона при различных длительностях загрузки.

- разработана методика расчета и алгоритмы программы для вычислительной техники по расчёту железобетонных сечений и стержней; плоско и изгибнонапряжённых плит перекрытий опертых по контуру; сборных железобетонных элементов междуэтажных перекрытий как пространственно-деформируемых систем позволяющих при решении задач различной сложности выполнять сопоставления результатов расчетов по методу сосредоточенных деформаций с экспериментальными данными или результатами полученными другими расчётными методами;

- предложена расчетная модель, учитывающая влияние длительности действия внешней нагрузки на напряженно-деформированное состояние несущих элементов многоэтажных зданий, которая позволяет оценить их напряженно-деформированное состояние при любом уровне загрузки.

Достижению поставленной цели и намеченных задач посвящено настоящая работа, содержащая теоретический, расчётный и экспериментальный разделы. Теоретическую основу исследования составляет предложенный проф. А.Р. Ржаницыным и развиваемый нами метод сосредоточенных деформаций (МСД), относящийся к разряду дискретных расчётных моделей, ближайшим прототипом которого является метод конечных элементов (МКЭ). Сравнительный анализ эффективности вышеизложенных дискретных расчетных моделей проведем на ряде примеров.

Раскрытие основных положений МСД продемонстрируем на простейших задачах расчёта упругих стержней симметричного поперечного сечения, постоянного по длине.

Применительно к таким стержням и их системам МСД по сравнению с МКЭ является более трудоёмким. Это объясняется тем, что в МСД необходимо делить стержень по его длине на достаточно большое число участков ( $10 \div 15$ ), тогда как в МКЭ целый стержень постоянного поперечного сечения по его длине является одним конечным элементом. Однако МСД эффективен для расчёта железобетонных стержней и систем из них с переменной, вследствие нелинейности, жёсткостью по длине. Для таких стержней использование МКЭ требует членения стержней на элементы, число которых в пределах длины должно составлять  $10 \div 15$ . В этом случае МКЭ приближается к МСД по числу неизвестных, однако в МСД существенно упрощаются процедуры формирования расчётных уравнений.

В работе, на примере упругих стержней постоянного сечения, иллюстрируется способ учёта деформированной расчётной схемы, сводящийся к дополнению вектора внешних сил узловыми изгибающими моментами, значения которых отыскиваются итерационным путём. Числовые примеры на сравнительно простых стержнях позволили выявить требуемую степень их дискретизации при использовании МСД, здесь же даётся оценка точности метода. Заметим, что в МСД учитываются не только изгибные, но и сдвиговые и осевые деформации стержней, что иногда заметно влияет на конечные результаты расчётов.

Для расчёта стержневых элементов и их систем составлены формулы для элементов матриц внешней жёсткости для наиболее распространённых

случаев опирания стержней; готовые формулы, при их небольшом числе, исключают процедуры перемножения матриц и, по нашему мнению существенно сокращают объем вычислительных программ на ЭВМ.

Железобетонные стержни и системы из них рассчитываются на основе дискретной модели для нормальных сечений, которая отличается общностью, алгоритмической простотой и удобством реализации. Расчетная модель для нормальных сечений входит составной частью в систему расчёта в целом, осуществляемых МСД. Важнейшим элементом этой расчётной модели является соотношения "напряжения - деформации" для бетона и арматуры при различных длительностях загрузки, в работе обосновывается выбор аналитического выражения "напряжения - деформации" с ограниченно и неограниченно растяжимым бетоном. Отдельные железобетонные стержни и стержневые системы решаются согласно МСД по единому алгоритму. В отличие от наиболее распространённого подхода к расчёту стержневых систем с расчленением их на отдельные стержни с последующим объединением в узлах, здесь решение строится с разбивкой всей стержневой системы на элементы МСД с их глобальной нумерацией. При этом увеличивается число неизвестных, но исключаются процедуры перехода от узлов стержневой системы к отдельным стержням для изучения их жесткостных характеристик и обратного перехода к стержневой системе.

В работе уделено особое внимание вопросам точности итерационных расчётов и оценке их сходимости в условиях физической и геометрической нелинейности. В развиваемом здесь варианте МСД сдвиговые и осевые деформации учитываются, из чего достигается лучшее совпадение опытных и расчётных результатов.

С единых теоретических позиций разработаны решения для плоско-напряжённых элементов несущих систем многоэтажных зданий. МСД применительно к ним можно представить механической моделью, согласно которой исходная система делится на абсолютно жёсткие в своей плоскости элементы, соединённые между собой комплексными связями, моделирующими деформативные свойства соединительных деталей, растворных и бетонных швов. Сущность МСД составляет принятый закон распределения деформаций в пределах элемента, при котором довольно просто связываются внутренние силы и перемещения и существенно упрощаются структуры матриц жёсткости, уменьшается ширина ленты матрицы внешней жёсткости.

Поле перемещений в пределах каждого плоского элемента складывается из осевого сжатия (растяжения), изгиба и сдвига в своей плоскости. При одинаковой степени дискретизации и числе степеней свободы в МКЭ и элементах МСД в последнем случае сокращается количество неизвестных в системе алгебраических уравнений метода перемещений. Преимущество МСД перед МКЭ состоит в том, что полная ширина ленты матрицы внешней жёсткости по МСД составляет  $L = 6*m + 2$ , в МКЭ -  $L = 6*m + 15$ , где  $m$  - число узлов МКЭ или элементов МСД в направлении короткой стороны рассчитываемой плоской конструкции. Общее число ненулевых элементов в матрице внешней жёсткости по МСД равно  $N = 27*m*n$ , по МКЭ  $N = 81 * (m +$

$I) * (n+I)$ , где  $m$  и  $n$  — число ячеек разбивочной сетки. Из этого следует, что трудоёмкость формирования матрицы по МСД существенно ниже, чем по МКЭ.

Однако более существенное сокращение трудоёмкости вычислительных процедур достигается в МСД по сравнению с МКЭ тем, что сетка дискретизации в МСД может приниматься более редкой, чем в МКЭ с обеспечением той же точности результатов. Особенно резко это различие будет иметь место в железобетонных плоско напряжённых конструкциях. Согласно МКЭ в пределах конечного элемента жесткостные характеристики должны быть постоянными, а это требует весьма густой разбивочной сетки. По МСД жесткостные характеристики в пределах элементов могут быть переменными, что позволяет принимать элементы в несколько раз крупнее, чем в МКЭ.

О точности метода сосредоточенных деформаций (МСД) можно судить по результатам сравнительного анализа результатов расчётов балок-стенок, диафрагм жёсткости многоэтажных зданий при загрузении их в своей плоскости по МСД с данными расчетов по другим методом. Расчёты выполнялись на ЭВМ по разработанной программе где по МСД реализуются нелинейные диаграммы деформирования реальных связей между сборными железобетонными элементами плоско напряжённых систем.

Дальнейшее развитие МСД сделано применительно к изгибаемым железобетонным плитам и системам из них с учетом эффекта распора. На первом этапе решена задача об изгибе упругих железобетонных плит при постоянной толщине, для них получены основные расчётные соотношения при наиболее распространённых граничных условиях, приведены выражения для элементов матриц жёсткости.

Отличительной особенностью МСД применительно к задачам об изгибе железобетонных плит является способ формирования поля перемещений, складывающегося из цилиндрических изгибов в двух взаимно перпендикулярных направлениях, сдвигов и кручения. Такое разложение сложного поля перемещений на простейшие позволило получить простые соотношения между внутренними силами и перемещениями.

Необходимо отметить методологическое единство расчётных подходов к плоско напряжённым и изгибаемым железобетонным плитным конструкциям, их формальное сходство, что облегчает построение универсальных программ для ЭВМ.

При расчёте по МСД изгибаемых железобетонных плит была установлена необходимость совместного рассмотрения сил и перемещений для плоского и изгибного напряжённых состояний. Это объясняется тем, что координатная плоскость с размещёнными на ней связями метода перемещений, по мере развития неупругих деформаций в бетоне и арматуре и изменения жёсткостных характеристик материалов, отклоняется от поверхности, соединяющей точки с нулевыми деформациями.

Расчётная модель для изгибаемых железобетонных плит является наиболее общей, из которой как частные случаи вытекают задачи расчёта стержневых и плоско напряжённых конструкций многоэтажных зданий. В этой модели

предусмотрена возможность изменения поля жесткостей в пределах одного элемента МСД, что позволяет существенно укрупнять разбивочные сетки по сравнению с МКЭ.

На основе разработанной модели составлен алгоритм и выполнены проверочные расчёты некоторых плитных конструкций, в том числе, фрагментов сборных железобетонных междуэтажных перекрытий многоэтажных зданий из натуральных элементов на вертикальные и горизонтальные воздействия.

Из всех элементов несущих систем многоэтажных зданий в работе наиболее подробно рассмотрены конструкции междуэтажных перекрытий многоэтажных зданий различных типов. Показано, что вовлечение перекрытий в работу всей несущей системы здания решительным образом меняет характер её работы, обеспечивая повышение несущей способности и жёсткости.

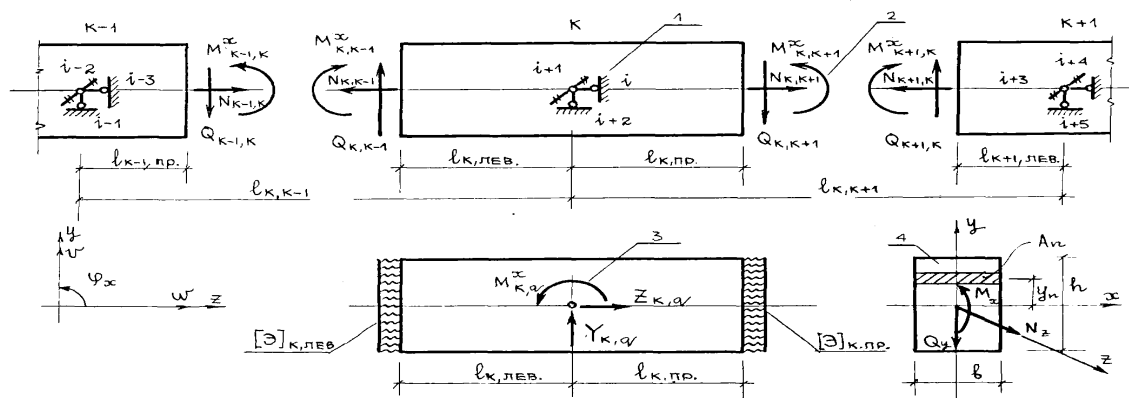
## **ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ ПО МЕТОДУ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В УПРУГОЙ СТАДИИ**

### **2.1. Формирование матричных соотношений «усилия-перемещения» для стержней в упругой постановки**

Расчет деформации и прочности в нормальных сечениях железобетонных статически определимых стержней основывается на том, что вектор сил в нормальных сечениях считается известным и не зависящим от соотношений жесткостных характеристик сечений, которые в процессе загрузки могут значительно меняться, как это имеет место в железобетонных стержнях. Эти внешние силы отыскиваются в каждом сечении статически определимого стержня из уравнений равновесия отдельных частей стержневой системы после определения опорных реакций.

Для статически неопределимых стержней и систем из них внутренние силы в сечениях, на действие которых выполняется расчет прочности, должны быть найдены одним из методов решения статически неопределимых систем, причем это решение осложняется развитием неупругих деформаций в бетоне и арматуре.

Метод сосредоточенных деформаций (МСД) является одним из численных методов решения расчета статически неопределимых стержневых и плоскостных систем [101, 110-114, 119, 273, 299 и др.]. Идея МСД раскрывается вначале на стержневых упругих элементах, имеющих постоянные поперечные сечения с плоскостью симметрии, в которой действуют векторы внешних сил (рис.2.1.1); условия опирания по длине и на концах могут быть произвольными, в том числе



**Рис.2.1.1. Расчетная модель метода сосредоточенных деформаций для упругого стержня постоянного сечения: 1- связи метода перемещений, 2-внутренние силы, 3-нагрузка, 4-поперечное сечение**

и податливыми с известными характеристиками жесткости опорных устройств.

**Сущность метода сосредоточенных деформаций (МСД) состоит в том, что исходный стержень делится на элементы, по плоскостям раздела между которыми сосредотачиваются деформации прилегающих элементов. По-другому можно сказать так: исходный деформируемый стержень делится на элементы, превращаемые в жесткие и соединенные между собой податливыми связями, характеристики податливости (жесткости) которых должны сохранять свойства исходного стержня.**

Основное достоинство метода сосредоточенных деформаций - простота формирования матриц жесткости сечений, элементов, стержневых систем из них; при этом элементами матриц жесткости сечений служат балочные жесткостные характеристики, (изгибная, осевая и т.д.), сохраняющие свой смысл также и в упруго - пластической стадии работы; причем такие же жесткостные характеристики распространяются и на случай плоского напряженного состояния и изгиба в двух направлениях для упруго и неупруго работающих железобетонных плит.

Другим достоинством метода сосредоточенных деформаций является четкое деление сложного напряженно-деформированного состояния на элементарные составляющие (изгиб, сжатие-растяжение и т.д.).

Третьим достоинством метода сосредоточенных деформаций является простота учета податливости соединений между элементами или в опорных устройствах, это имеет значение при расчете сборно-монолитных или составных конструкций.

Четвертым достоинством метода сосредоточенных деформаций, в развиваемом здесь варианте, является широкое использование гипотезы плоских сечений. Это обстоятельство позволяет резко снизить число элементов МСД по сравнению с обычным применяемым числом конечных элементов без потери точности в описании напряженно-деформированного состояния на участках значительной протяженности.

Так для стержневых элементов закон плоского деформирования принимается единым по всей высоте поперечного сечения; в задачах о плоско - напряженном состоянии и изгибе плит законы плоского деформирования задаются едиными для каждого элемента МСД в отдельности.

Законы плоского деформирования в пределах элементов МСД совместно с нелинейными диаграммами деформирования материалов " $\sigma_m - \varepsilon_m$ "



позволяют выявить сложный характер распределения напряжений на тех же участках.

К недостатку метода сосредоточенных деформаций можно отнести то, что, например, для упругих стержней требуется разбивка пролета на определенное число участков, в то время как в обычном варианте метода конечных элементов стержень вводится в расчет с полной длиной.

Однако метод сосредоточенных деформаций ориентирован прежде всего на расчет элементов с учетом реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры при различных длительностях загрузки; в этом случае необходимо, для учета меняющейся по длине жесткости, делить стержни также как при обычном варианте метода конечного элемента; поэтому в этом случае метод сосредоточенных деформаций и обычный метод конечных элементов близки между собой в смысле необходимой степени дискретизации. Вместе с тем, при учете нелинейности железобетонных стержней, в обычном методе конечных элементов элементы матрицы жесткости приходится отыскивать в главных центральных осях, меняющих свое положение в зависимости от уровня напряженно-деформированного состояния и длительности загрузки. В методе сосредоточенных деформаций матрицы жесткости элементов строятся непосредственно на основе матриц жесткости сечений в неизменных координатных осях без перехода к центральным осям сечений. Это обстоятельство свидетельствует о значительном достоинстве метода сосредоточенных деформаций.

### **Перейдем к вычислению основных соотношений метода сосредоточенных деформаций.**

После разрезки исходного стержня на элементы МСД последние, как жесткие, закрепляются фиктивными связями метода перемещений.

Каждый элемент МСД закрепляется тремя связями, исключаящими перемещение в направлении продольной оси, перпендикулярном ей и поворот в плоскости симметрии сечения (рис.2.1.1.).

Нормальные сечения представим в дискретной форме - набором элементарных полосовых участков с площадями  $A_n$  (рис. 2.1.1.), в пределах которых нормальные и касательные напряжения предполагаются равномерно распределенными.

Внутренние силы через напряжения записываются так:

$$\begin{aligned} N_z &= \sum_n \sigma_n A_n \\ M_x &= -\sum_n \sigma_n A_n y_n \end{aligned} \quad (2.1.1.)$$

где  $n$  - номер элементарного участка  $A_n$ ;  $y_n$  - координата площади  $A_n$ .

В соответствии с гипотезой плоских сечений имеем:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_o - K_x y_n \quad (2.1.2.)$$

здесь  $\varepsilon_o$  - продольная деформация на уровне продольной координатной оси Z,

$K_x$  - кривизна продольной оси, отвечающая моменту  $M_x$ .

Для упругого напряженно-деформированного состояния известно соотношение

$$\sigma_n = E_n \varepsilon_n \quad (2.1.3.)$$

где  $E_n$  - модуль упругости материала  $n$ -го элементарного участка.

Отсюда следует, что в каждом элементарном участке  $A_n$  может быть свой модуль упругости  $E_n$ , т.е. стержень может быть составлен из разных материалов.

Подставляя (2.1.2.) в (2.1.3.), а затем в (2.1.1), найдем:

$$\begin{aligned} N_z &= \sum_n \sigma_n A_n \varepsilon_o - \sum_n E_n A_n K_x y_n; \\ M_x &= -\sum_n \sigma_n A_n y_n \varepsilon_o + \sum_n E_n A_n K_x y_n^2 \end{aligned} \quad (2.1.4.)$$

При  $n \rightarrow \infty$ , переходя к интегрированию, получим при  $E_n = E$

$$\begin{aligned} \sum_n A_n &= A; & \sum_n A_n y_n &= S_x; & \sum_n A_n y_n^2 &= J_x; \\ N_z &= AE \varepsilon_o - ES_x K_x; \\ M_x &= -AES_x \varepsilon_o + EJ_x K_x; \end{aligned} \quad (2.1.5.)$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения стержня,

$S_x$  - статический момент площади относительно координатной оси X,

$J_x$  - момент инерции относительно той же оси.

Целесообразно координатными осями выбирать центральные, которые одновременно в случае симметричного сечения относительно оси у сечения, будут главными; тогда  $S_x=0$  и соотношение (2.1.5.) примут вид

$$\begin{aligned} N_z &= AE \varepsilon_o \\ M_x &= EJ_x K_x \end{aligned} \quad (2.1.6.)$$

Учтем теперь влияние поперечных сил. Угол сдвига сечения примем в виде.

$$\gamma_y = x_y Q_y / GA, \quad (2.1.7.)$$

где:  $x_y$  - безразмерный коэффициент (коэффициент сдвига), зависящий от формы поперечного сечения,  
 $G$  - модуль сдвига материала

$$G = E / 2(1 + \mu),$$

$\mu$  - коэффициент поперечного расширения.

Из (2.1.7.) следует

$$Q_y = (GA / x_y) \gamma_y \quad (2.1.8.)$$

Добавляя (2.1.8.) к (2.1.7.); получим, переходя к матричной форме записи,

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EJ_x & \\ & & GA / x_y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (2.1.9.)$$

Коэффициент сдвига можно записать

$$x_y = \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^2 dA}{b^2} \quad (2.1.10.)$$

Для многих форм поперечного сечения коэффициент  $x_y$  вычислен; например, для прямоугольной формы сечения коэффициент  $x_y = 1,2$ .

Заметим попутно, что коэффициент  $x_y$  вычисляется по (2.1.10.) на основании усреднения энергии сдвига. Если исходить из условия усреднения касательных напряжений по высоте, распределяющихся по параболическому закону, то для прямоугольной формы коэффициент усреднения касательных напряжений будет равен  $x_y = 1,5$  [350].

**Добавим к этому, что влияние деформаций сдвига на перемещение, и в**

**стержневых системах прежде всего, несущественно, и им часто пренебрегают.**

Перейдем к выводу соотношений между внутренними силами и перемещениями в элементах метода сосредоточенных деформаций.

Будем полагать, что продольные деформации -  $\varepsilon_z$ , кривизны  $K_x$  и углы  $\gamma_y$  постоянны на длинах, равных расстояниям от плоскостей разрезки исходного стержня на элементы до мест приложения фиктивных связей метода перемещений (рис.2.1.1.).

**Тогда перемещения поперечных сечений элементов МСД по плоскостям**

**разрезки будут связываться с деформациями в следующем виде**

$$\begin{aligned}
\omega_{K.ПР.} &= \varepsilon_Z l_{K.ПР.}; \\
\varphi_{K.ПР.} &= K_x l_{K.ПР.}; \\
v_{K.ПР.} &= \gamma_y l_{K.ПР.};
\end{aligned}
\tag{2.1.11.}$$

где  $\omega_{K.ПР.}$  - перемещение вдоль оси  $Z$ ,

$\varphi_{K.ПР.}$  - угол поворота,

$v_{K.ПР.}$  - перемещение по вертикали вследствие сдвига.

Учитывая (2.1.9.) и (2.1.11.), запишем

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ Q_y \end{Bmatrix}_{k_1 k+1} = \begin{bmatrix} AE & & \\ & EJ & \\ & & GA / X_y \end{bmatrix} * I_{к.лр}^{-1} * \begin{Bmatrix} \omega \\ \varphi \\ v \end{Bmatrix}_{к.лр}
\tag{2.1.12.}$$

$$\text{или } \{F\}_{k_1 k+1} = [C]_{к.лр} * I_{к.лр}^{-1} * \{v\}_{к.лр}
\tag{2.1.13.}$$

где  $\{F\}_{k_1 k+1}$  - вектор внутренних сил;  $[C]_{к.лр}$  - матрица жёсткости сечений,

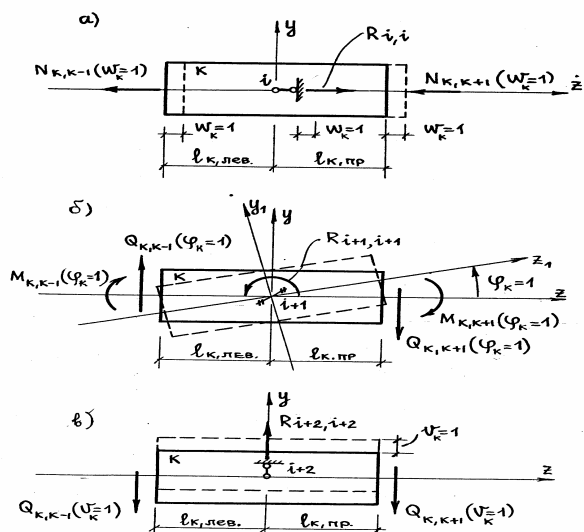
$\{v\}_{к.лр}$  - вектор перемещений правого конца  $k$ -го элемента;

$[C]_{к.лр} * I_{к.лр}^{-1} = [\mathcal{E}]_{к.лр}$  - элементная матрица.

## 2.2. Матрица внешней жесткости; вычисления ее элементов через единичные перемещения

Для дальнейших рассуждений удобно ввести понятие о фиктивных комплексных связях по плоскостям разрезки исходного стержня на элементы метода сосредоточенных деформаций.

Превратив  $k$ -й элемент (рис.2.1.1.) в жесткий, сохраним его деформативные свойства тем, что справа и слева по линиям разрезки введем фиктивные комплексные связи МСД, жесткость которых характеризуется матрицами  $[\mathcal{E}]_{k, \text{прав.}}$  и  $[\mathcal{E}]_{k, \text{лев.}}$ .



**Рис. 2.2.1. К определению элементов матрицы внешней жесткости для стержня; а) единичное перемещение по оси Z; б) то же, поворот; в) то же, вдоль оси Y.**

Жесткость комплексных связей по линиям между смежными  $k$ -м и  $(k+1)$ -м элементами, будет характеризоваться матрицей жесткости, вычисляемой по формуле

$$[\mathcal{E}]_{k,k+1} = [ [\mathcal{E}]_{k, \text{прав.}}^{-1} + [\mathcal{E}]_{k, \text{лев.}}^{-1} ]^{-1} \quad (2.2.1.)$$

Формула (2.2.1.) вытекает из условия последовательного соединения собственных связей и суммирования их матриц податливостей, обратных матриц жесткостей

$$[B]_{k, \text{прав.}} = [\mathcal{E}]_{k, \text{прав.}}^{-1}; \quad [B]_{k, \text{лев.}} = [\mathcal{E}]_{k, \text{лев.}}^{-1}$$

**Если сечение упругого стержня в пределах между соседними  $k$ -м и  $(k+1)$ -м узлами постоянно, то матрица**

$$[\mathcal{E}]_{k,k+1} = [C]_{k,k+1} (l_{k, \text{прав.}} + l_{k+1, \text{лев.}})^{-1} \quad (2.2.2.)$$

$$\text{или } [\mathcal{E}]_{k,k+1} = l_{k,k+1}^{-1} [C]_{k,k+1} \quad (2.2.3.)$$

Из (2.2.3) следует, что разбивку исходных стержней на элементы МСД целесообразно принимать такой, чтобы жесткости в пределах между соседними узлами были постоянны. Расчёт стержневых систем по МСД выполняется в перемещениях. Система метода перемещений имеет следующий вид [300]:

$$[R]\{v\} = \{P\} \quad (2.2.4.)$$

где  $[R]$  - квадратная матрица внешней жесткости размерностью  $3n * 3n$ , где  $n$  - число элементов МСД, получаемых после разрезки исходного стержня;

$\{v\}$  - вектор перемещений узлов, в которых приложены фиктивные связи метода перемещений ( $\omega$  - линейное в направлении оси  $Z$ ,  $\varphi$  - угловое в плоскости деформирования стержня,  $v$  - перемещение в направлении оси  $Y$ );

$\{P\}$  - вектор узловых нагрузок (продольная сила  $Z_{\kappa,q}$ , изгибающий момент -  $M_{\kappa,q}^x$  и сила  $Y_{\kappa,q}$  - рис.2.1.1.); если элементы вектора  $\{P\}$  действуют по направлению принятых перемещений, то в уравнениях (2.2.4) входят со знаком плюс.

Элементами матрицы внешней жесткости  $[R]$  являются реакции в фиктивных связях метода перемещений от их единичных смещений.

**Найдем элементы матрицы жесткости, относящихся к-ому элементу МСД.**

Задав перемещение  $\omega_{\kappa} = 1$  в направлении  $i$ -ой связи получим, исходя из формул (2.1.12) и (2.2.3)

$$N_{\kappa,\kappa-1} = (AE)_{\kappa,\kappa-1} / l_{\kappa,\kappa-1}; \quad (2.2.5.)$$

$$N_{\kappa,\kappa+1} = (AE)_{\kappa,\kappa+1} / l_{\kappa,\kappa+1};$$

где:  $AE$  - осевые жесткости стержня на участках между точками

$\kappa$  и  $(\kappa-1)$ ;  $\kappa$  и  $(\kappa+1)$  соответственно.

**Из условия равновесия (рис .2.2.1, а.)**

**следует  $\sum Z_{\kappa} = 0$ :**

$$R_{i,i} = (AE)_{\kappa,\kappa-1} * l_{\kappa,\kappa-1}^{-1} + (AE)_{\kappa,\kappa+1} * l_{\kappa,\kappa+1}^{-1} \quad (2.2.6.)$$

При постоянном сечении стержня по длине  $AE = const$  и равномерной разбивке его на элементы МСД длиной  $l$  получим

$$R_{i,i} = 2AE / l \quad (2.2.7.)$$

Реакции в аналогичных связях метода перемещений в  $(\kappa-1)$ -ом  $(\kappa+1)$ -ом элементах от смещения  $\omega_{\kappa} = 1$  будут соответственно равны

$$R_{i-3,i} = R_{i,i-3} = -(AE)_{\kappa,\kappa-1} * l_{\kappa,\kappa-1}^{-1} \quad (2.2.8.)$$

$$R_{i,i+3} = R_{i+3,i} = -(AE)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} \quad (2.2.9.)$$

Перейдем к вычислению элементов матрицы жесткости [R] при перемещении "(i+1)" - ой связи на  $\varphi_k = 1$  (рис.2.2.1,б).

При угле поворота  $\varphi_k = 1$  линейные перемещения концов  $\kappa$ -го элемента составят:  $v_{лев} = \varphi_k * l_{кблев} = 1 * l_{кблев}$ ; Реактивные поперечные силы будут равны:

$$\begin{aligned} Q_{k,k-1}(\varphi_k = 1) &= ((GA/x) / l_{k,k-1}) * l_{k,лев}; \\ Q_{k,k+1}(\varphi_k = 1) &= ((GA/x) / l_{k,k+1}) * l_{k,нп}; \end{aligned} \quad (2.2.10.)$$

Реактивные изгибающие моменты по концам  $\kappa$ -го элемента при  $\varphi_k = 1$  составят:

$$\begin{aligned} M_{л,к-1}(\varphi_k = 1) &= (EJ)_{k,k-1} / l_{k,k-1}; \\ M_{л,к+1}(\varphi_k = 1) &= (EJ)_{k,k+1} / l_{k,k+1} \end{aligned} \quad (2.2.11.)$$

Из условия равновесия  $\kappa$ -го элемента  $\sum M_\kappa = 0$  следует

$$\begin{aligned} R_{i+1,i+1} &= EJ_{k,k-1} / l_{k,k-1} + EJ_{k,k+1} / l_{k,k+1} + \\ &+ (GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{к,лев}^2 + ((GA/x)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1}) * l_{к,нп}^2 \end{aligned} \quad (2.2.12.)$$

Аналогичным образом из условий равновесия (рис.2.2.1,б) находим другие элементы матрицы жесткости [R] при перемещении  $\varphi_k = 1$ ; (см. рис. 2.1.1. а, и 2.2.1.б)

$$\begin{aligned} R_{i+1,i-2} = R_{i-2,i+1} &= -M_{к-1,к}(\varphi_k = 1) + Q_{к-1,к}(\varphi_k = 1) * l_{к-1,нп} = \\ &= -M_{к,к-1}(\varphi_k = 1) + Q_{к,к-1}(\varphi_k = 1) * l_{к-1,нп} = \\ &= -EJ_{к,к-1} / l_{к,к-1} + (GA/x)_{к,к-1} * l_{к,к-1}^{-1} * l_{к,лев} * l_{к-1,нп}. \end{aligned} \quad (2.2.13.)$$

$$\sum Y_{к-1} = 0:$$

$$\begin{aligned} R_{i+1,i-1} = R_{i-1,i+1} &= -Q_{к-1,к}(\varphi_k = 1) + Q_{к,к-1}(\varphi_k = 1) = \\ &= (GA/x)_{к,к-1} * l_{к,к-1}^{-1} * l_{к,лев}. \end{aligned} \quad (2.2.14.)$$

$$\sum Y_\kappa = 0:$$

$$\begin{aligned} R_{i+1,i+2} = R_{i+2,i+1} &= -Q_{к-1,к}(\varphi_k = 1) + Q_{к,к+1}(\varphi_k = 1) = \\ &= -(GA/x)_{к,к-1} * l_{к,к-1}^{-1} * l_{к,лев} + (GA/x)_{к,к+1} * l_{к,к+1}^{-1} * l_{к,нп}. \end{aligned} \quad (2.2.15.)$$

$$\sum M_{к+1} = 0:$$

$$\begin{aligned} R_{i+1,i+4} = R_{i+4,i+1} &= -M_{к+1,к}(\varphi_k = 1) + Q_{к+1,к}(\varphi_k = 1) * l_{к+1,лев} = \\ &= -EJ_{к+1,к} / l_{к,к+1} + (GA/x)_{к,к+1} * l_{к,к+1}^{-1} * l_{к,нп} * l_{к+1,лев}. \end{aligned} \quad (2.2.16.)$$

$$\begin{aligned} \sum Y_{k+1} &= 0: \\ R_{i+1,i+5} = R_{i+5,i+1} &= -Q_{k,k+1} (\varphi_k = 1) = \\ &= -(GA/x)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np} \end{aligned} \quad (2.2.17.)$$

Наконец, рассмотрим единичное перемещение  $v_k = 1$  в направлении  $(i+2)$  ой связи (рис.2.2.1,в)

Поперечные силы на левом и правом торце  $k$ -го элемента при  $v_k = 1$  будут равны

$$\begin{aligned} Q_{k,k-1} (v_k = 1) &= (GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1}; \\ Q_{k,k+1} (v_k = 1) &= (GA/x)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1}; \end{aligned} \quad (2.2.18.)$$

Из условий равновесия следует:

$$\begin{aligned} \sum M_{k-1} &= 0: \\ R_{i+2,i-2} = R_{i-2,i+2} &= -(GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k-1,np} \end{aligned} \quad (2.2.19.)$$

$$\begin{aligned} \sum Y_{k-1} &= 0: \\ R_{i+2,i-1} = R_{i-1,i+2} &= -(GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.20.)$$

$$\begin{aligned} \sum M_k &= 0: \\ R_{i+2,i+1} = R_{i+2,i+1} &= -Q_{k,k-1} (v_k = 1) * l_{k,лев} + Q_{k,k+1} (v_k = 1) * l_{k,np} = \\ &= -(GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + (GA/x)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np} \end{aligned} \quad (2.2.21.)$$

$$R_{i+2,i+2} = (GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + (GA/x)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} \quad (2.2.22.)$$

$$R_{i+2,i+4} = (GA/x)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k+1,лев} \quad (2.2.23.)$$

$$R_{i+2,i+5} = -(GA/x)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} \quad (2.2.24.)$$

Полная сводка формул для вычисления элементов матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  дана в табл.2.2.1.

### 2.3. Формирование матрицы внешней жесткости с помощью матричных операций

**Изложенный в п.2.2 способ вычисления элементов матрицы внешней жесткости является наглядным и удобным при отладочных расчетах, однако при этом необходимо вводить в ЭВМ большое**



**число алгебраических выражений, что увеличивает объем программ.**

Рассмотрим другой способ формирования матрицы  $[R]_k$  на основе общей формулы [300]

$$[R]_k = [A]_k [K]_k [A]_k^T \quad (2.3.1.),$$

где:  $[A]_k$  - матрица, составленная из коэффициентов уравнений равновесия, которые образуются из внутренних сил по линиям сосредоточенных деформаций;

$[K]_k$  - матрица внутренней жесткости, характеризующая свойства условных комплексных податливых связей по линиям сосредоточенных деформаций.

**Рассмотрим равновесие  $k$ -го элемента (рис.2.1.1.) и примыкающего к нему  $(k-1)$ -го и  $(k+1)$ -го элементов, удерживая только те внутренние силы, которые действуют по смежным плоскостям сосредоточенных деформаций.**

Составим таблицу коэффициентов при уравнениях равновесия, т.е. матрицу  $[A]_k$  размером  $6 \times 9$  (табл.2.3.1).

В таблицу 2.3.1 входят только те внутренние силы, которые действуют на  $k$ -й элемент МСД. Эти силы входят в уравнения равновесия непосредственно для  $k$ -го элемента, образуя три уравнения равновесия (4-6 строки в табл.2.3.1) при шести внутренних силах, что свидетельствует о недостаточности уравнений равновесия для раскрытия внутренних сил, т.е. внутренней статической неопределимости.

Эти же силы входят также в уравнения равновесия  $(k-1)$ -го элемента МСД (1-3 строки в табл.2.3.1) и  $(k+1)$ -го элемента МСД (7-9 строки в табл. 2.3.1).



Таблица 2.2.1.

Матрица внешней жесткости  $[R]_k$  для типового элемента МСД

Связи метода перемещений	(к-1) – й элемент МСД			к - й элемент МСД			(к+1) - й элемент МСД		
	$i - 3$	$i - 2$	$i - 1$	$i$	$i + 1$	$i + 2$	$i + 3$	$i + 4$	$i + 5$
$I$	$R_{i,i-3}$			$R_{i,i}$			$R_{i,i+3}$		
$i + 1$		$R_{i+1,i-2}$	$R_{i+1,i-2}$		$R_{i+1,i+1}$	$R_{i+1,i+2}$		$R_{i+1,i+2}$	$R_{i+1,i+5}$
$i + 2$		$R_{i+2,i-2}$	$R_{i+2,i-1}$		$R_{i+2,i+1}$	$R_{i+2,i+2}$		$R_{i+1,i+4}$	$R_{i+2,i+5}$

Составим также матрицу  $[\mathcal{E}]_k$  элементами которой служат соответствующие жесткости условных комплексных связей по линиям сосредоточенных деформаций, эта матрица имеет размерность  $6 \times 6$  (табл. 2.3.2).

Перемножая матрицы  $[A]_k$ ,  $[\mathcal{E}]_k$  и  $[A]_k^T$  - получим все коэффициенты матрицы внешней жесткости, относящиеся к  $k$ -му элементу МСД, т.е.

$$R_{m,n} = R_{n,m} \quad (m = i, i+1, i+2; \quad n = i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3, i+4, i+5)$$

При "ручном" перемножении указанных матриц, можно следуя [308], не прибегая к построению матрицы  $[A]_k^T$ , применить построчное перемножение матриц.

Тогда, умножая первую строку матрицы  $[A]_k$ , на первый столбец матрицы  $[\mathcal{E}]_k$ , (или первую строку, матрица  $[\mathcal{E}]_k$  - диагональная), а затем на четвертую строку матрицы  $[A]_k$ , получим

$$R_{i,i-3} = R_{i-3,i} = -EJ_{k,k-1} * I_{k,k-1}^{-1} \quad (2.3.2.)$$

Заметим, что формулы (2.3.2.) и (2.2.8.) дают одинаковый результат, как и следовало ожидать.

При перемножении второй строки матрицы  $[A]_k$  второй столбец матрицы  $[\mathcal{E}]_k$ , а затем на четвертую строку матрицы  $[A]_k$ , получим

$$R_{i-2,i} = R_{i,i-2} = 0$$

Поступая аналогичным образом, получим все элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  (см. табл. 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5).

Сопоставления элементов матрицы  $[R]_k$  вычисленных на основании единичных перемещений элементов МСД и путем перемножения матриц  $[A]_k$ ,  $[K]_k$ ,  $[A]^T$ , дают одинаковые результаты.

Таблица 2.3.1.

Матрица равновесия для типового элемента МСД [A]<sub>k</sub>

Элементы МСД	Уравнения равновесия	Связи метода перемещения	№№	Внутренние силы					
				$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}$	$Q_{k,k+1}$
				1	2	3	4	5	6
к-1	$\sum Z_{k-1}$	$i-3$	1	1					
	$\sum M_{k-1}$	$i-2$	2		1	$-l_{k-1,np}$			
	$\sum Y_{k-1}$	$i-1$	3			-1			
к	$\sum Z_k$	$i$	4	-1			1		
	$\sum M_k$	$i+1$	5		-1	$-l_{k-1,np}$		1	$-l_{k,np}$
	$\sum Y_k$	$i+2$	6			1			-1
к+1	$\sum Z_{k+1}$	$i+3$	7				1		
	$\sum M_{k+1}$	$i+4$	8					-1	$-l_{k+1,np}$
	$\sum Y_{k+1}$	$i+5$	9						1



Таблица 2.3.2.

Элементная матрица жёсткости  $[K]_k$

Элементы МСД	Внутренние силы	№ №	к-1			к+1		
			$i - 3$	$i - 2$	$i - 1$	$i + 3$	$i + 4$	$i + 5$
			$i$	$i + 1$	$i + 2$	$i$	$i + 1$	$i + 2$
			1	2	3	4	5	6
к-1	$N_{k,k-1}$	1	$\frac{EA_{k,k-1}}{l_{k,k-1}}$					
	$M_{k,k-1}$	2		$\frac{EJ_{k,k-1}}{l_{k,k-1}}$				
	$Q_{k,k-1}$	3			$\frac{GA}{x_{k,k-1} l_{k,k-1}}$			
к+1	$N_{k,k+1}$	4				$\frac{EA_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}$		
	$M_{k,k+1}$	5					$\frac{EJ_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}$	
	$Q_{k,k+1}$	6						$\frac{GA}{x_{k,k+1} l_{k,k+1}}$

Таблица 2.3.3.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i,j}; j = i-3, \dots, i+5$
1	$i-3$	$R_{i,i-3} = -EA_{k,k-1} / l_{k,k-1}$
2	$i-2$	$R_{i,i-2} = 0$
3	$i-1$	$R_{i,i-1} = 0$
4	$i$	$R_{i,i} = EA_{k,k-1} / l_{k,k-1} + EA_{k,k+1} / l_{k,k+1}$
5	$i+1$	$R_{i,i+1} = 0$
6	$i+2$	$R_{i,i+2} = 0$
7	$i+3$	$R_{i,i+3} = -EA_{k,k+1} / l$
8	$i+4$	$R_{i,i+4} = 0$
9	$i+5$	$R_{i,i+5} = 0$

Таблица 2.3.4.

Элементы матрицы внешней жёсткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i+1,j}; j = i-3, \dots, i+3$
1	$i-3$	$R_{i+1,i-3} = 0$
2	$i-2$	$R_{i+1,i-2} = -EJ_{k,k-1} / l_{k,k-1} + GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} * l_{k-1,np} * l_{k,лев}$
3	$i-1$	$R_{i+1,i-1} = GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} * l_{k,лев}$
4	$i$	$R_{i+1,i} = 0$
5	$i+1$	$R_{i+1,i+1} = EJ_{k,k-1} / l_{k,k-1} + EJ_{k,k+1} / l_{k,k+1} + GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} * l_{k,лев}^2 + GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1} * l_{k,np}^2$
6	$i+2$	$R_{i+1,i+2} = -GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} * l_{k,лев} + GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1} * l_{k,np}$
7	$i+3$	$R_{i+1,i+3} = 0$
8	$i+4$	$R_{i+1,i+4} = -EJ_{k,k+1} / l_{k,k+1} + GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1} * l_{k,np} * l_{k+1,лев}$
9	$i+5$	$R_{i+1,i+5} = -GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1} * l_{k,np}$



Таблица 2.3.5.

**Элементы матрицы внешней жёсткости  $[R]_k$** 

№	Связи	$R_{i+2,j}; \quad j = i - 3, \dots, i + 5$
1	$i - 3$	$R_{i+2}, \quad i - 3 = 0$
2	$i - 2$	$R_{i+1,i-1} = -GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} * l_{k-1,np.}$
3	$i - 1$	$R_{i+2,i-1} = -GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1}$
4	$i$	$R_{i+2,i} = 0$
5	$i + 1$	$R_{i+2,i+1} = -GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} * l_{k,лев.} + GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1} * l_{k,np.}$
6	$i + 2$	$R_{i+2,i+2} = GA / x_{k,k-1} / l_{k,k-1} + GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1}$
7	$i + 3$	$R_{i+1,i+3} = 0$
8	$i + 4$	$R_{i+2,i+4} = GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1} * l_{k+1,лев.}$
9	$i + 5$	$R_{i+1,i+5} = -GA / x_{k,k+1} / l_{k,k+1}$

**2.4. Граничные условия в методе сосредоточенных деформаций. Определение внутренних усилий. Оценка точности МСД. Примеры.**

**Рассмотрим наиболее распространенные условия закрепления стержней на концах и на промежуточных спорах.**

Во всех этих случаях число элементов МСД принимается постоянным, и каждый из них имеет три степени свободы /рис.2.4.1/, т.е. общее число неизвестных метода перемещений принимается независимым от условий закрепления.

Опорные реакции, в зависимости от их характера, входят в решениях по МСД как векторы внутренних сил с соответствующими матрицами жесткости.

Таким образом, в принятом подходе степень внешней статической неопределимости исходной рассчитываемой системы не влияет на сложность расчета.

При шарнирном подвижном описании стержня на конце (рис. 2.4.1,а) опорная реакция равна поперечной силе  $Q_{оп,1}$ , которой соответствует элемент матрицы жесткости  $(GA) / x_{1,лев} * l_{1,лев}^{-1}$ , где  $(GA) / x_{1,лев}$  - сдвиговая жесткость на левом участке опорного элемента МСД.

При шарнирно-неподвижном опирании внутренние силы - опорные реакции состоят из поперечной силы  $Q_{оп,1}$  и продольной силы  $N_{оп,1}$ , последней соответствует элемент в матрице жесткости  $(EA)_{оп,1} * l_{1,лев}^{-1}$  (рис.2.4.1,б).

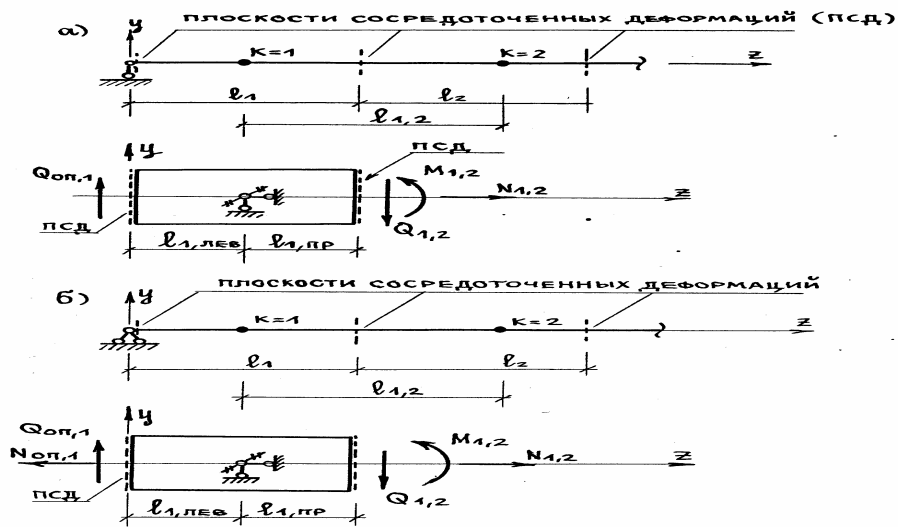


Рис. 2.4.1. Граничные условия для стержня; а) шарнирно-подвижное, б) шарнирно-неподвижное опирание

При заземленной опоре (рис.2.4.2,а) к ним добавляется изгибающий момент  $M_{оп,1}$ , которому соответствует жесткость условной податливой связи  $EJ_{оп,1} * l_{1,лев}^{-1}$

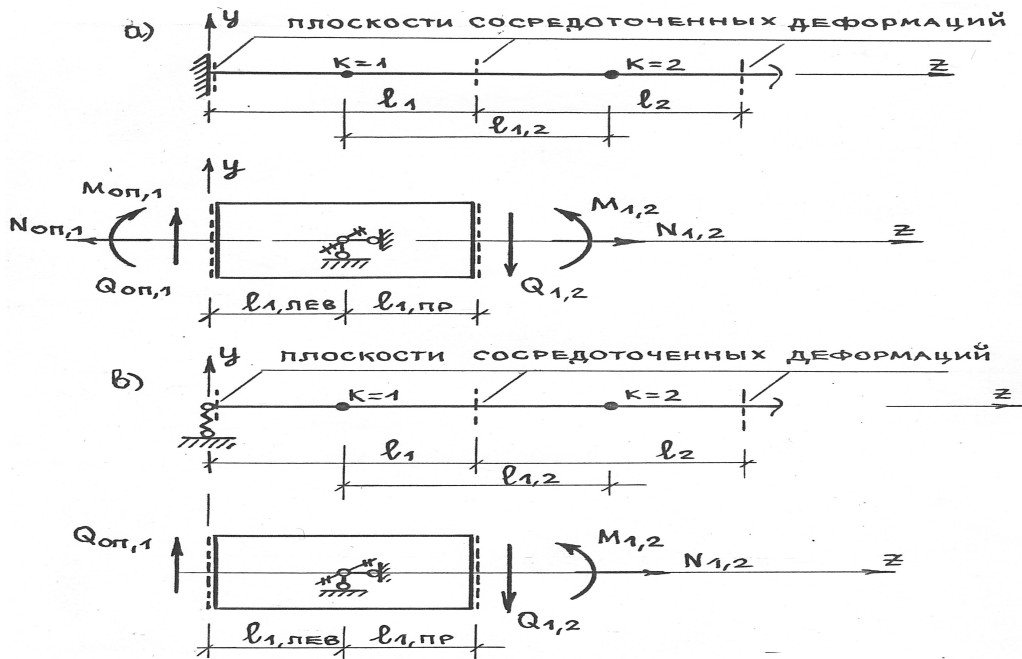


Рис.2.4.2. Граничные условия для стержня; а) защемление, б) упругая опора

Таким образом, опорные реакции связываются с элементами матрицы жесткости и соответствующими перемещениями первого элемента МСД следующими соотношениями

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_{\text{оп,1}} = l^{-1}_{\text{оп,1}} * \begin{bmatrix} EA & & \\ & EJ & \\ & & GA/x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \varphi_1 \\ \nu_1 \end{Bmatrix}_{\text{оп,1}}$$

или

$$\{F\}_{\text{оп,1}} = [\mathcal{E}]_{\text{оп,1}} * \{v\}_1 \quad (2.1.1.)$$

При податливом опирании на конце (рис.2.4.2,б) эти же опорные реакции будут находиться также по формулам (2.4.1.) ,но опорная матрица жесткости должна содержать элементы жесткости упругого закрепления, т.е. она будет вычисляться по формуле:

$$[\mathcal{E}]_{\text{оп,1}}^* = [[\mathcal{E}]_{\text{оп,1}}^{-1} + [\mathcal{E}]_{\text{св.}}^{-1}]^{-1} \quad (2.4.2.)$$

где:  $[\mathcal{E}]_{\text{оп,1}}$  принимается из формулы (2.4.1), а матрица, характеризующая свойства связей закрепления, будет равна

$$[\mathcal{E}]_{\text{св.}} = \begin{bmatrix} \eta_{\text{св}} & & \\ & \omega_{\text{св}} & \\ & & \xi_{\text{св}} \end{bmatrix} \quad (2.4.3.)$$

где  $\eta_{\text{св}}$  - продольная сила, возникающая в элементе МСД при его единичном перемещении  $\omega_1=1$  из-за сопротивления связи;  $\omega_{\text{св}}$  - изгибающий момент в элементе МСД при угле поворота  $\varphi_1=1$ ;  $\xi_{\text{св}}$  - поперечная сила от перемещения  $\nu_1=1$

Из структуры формулы (2.4.3 ) видно, что она является общей и позволяет описать любые условия закрепления стержня на конце -от полного защемления до свободной консоли.

Защемление будет иметь место при  $\eta_{\text{св}} \rightarrow \infty, \omega_{\text{св}} \rightarrow \infty, \xi_{\text{св}} \rightarrow \infty$ ; свободный конец описывается (2.4.3.) при  $\eta_{\text{св}} = 0, \omega_{\text{св}} = 0, \xi_{\text{св}} = 0$ ;

Аналогичным образом учитываются условия описания элементов МСД на промежуточных узлах.

В таблице (2.4.1.) приведены выражения для опорных матриц жесткости в наиболее распространенных случаях опирания.

№№	СХЕМЫ ОПИРАНИЯ	„ОПОРНЫЕ“ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ
1		$[\partial]_{оп,к} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \partial_{33} \end{bmatrix}; \quad \partial_{33} = GA/\partial_{к,лев} / l_{к,лев}$
2		$[\partial]_{оп,к} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & & \\ & & \\ & & \partial_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \partial_{11} &= EA_{к,лев} / l_{к,лев}; \\ \partial_{33} &= GA/\partial_{к,лев} / l_{к,лев} \end{aligned}$
3		$[\partial]_{оп,к} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & & \\ & \partial_{22} & \\ & & \partial_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \partial_{11} &= EA_{к,лев} / l_{к,лев}; \\ \partial_{22} &= EJ_{к,лев} / l_{к,лев}; \\ \partial_{33} &= GA/\partial_{к,лев} / l_{к,лев}. \end{aligned}$
4		$[\partial]_{оп,к} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & & \\ & \partial_{22} & \\ & & \partial_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \partial_{11} &= EA_{к,к-1} / l_{к,к-1}; \\ \partial_{22} &= EJ_{к,к-1} / l_{к,к-1}; \\ \partial_{33} &= GA/\partial_{к,к-1} / l_{к,лев} \end{aligned}$
5		$[\partial]_{оп,к} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & & \\ & \partial_{22} & \\ & & \partial_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \partial_{11} &= EA_{к,к-1} / l_{к,лев}; \\ \partial_{22} &= EJ_{к,к-1} / l_{к,к-1}; \\ \partial_{33} &= GA/\partial_{к,к-1} / l_{к,лев} \end{aligned}$
6		$[\partial]_{оп,к} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & & \\ & \partial_{22} & \\ & & \partial_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \partial_{11} &= EJ_{к,к-1} / l_{к,к-1}; \\ \partial_{22} &= EJ_{к,к-1} / l_{к,к-1}; \\ \partial_{33} &= ((GA/\partial_{к,к-1} / l_{к,лев}) + (\xi_{оп}/2)^{-1})^{-1} \end{aligned}$

Перейдем к отысканию внутренних усилий в статически неопределимой системе.

Решение системы уравнений метода перемещений (2.2.4.) дает вектор  $\{v\}$  - составляющими которого являются перемещение элементов МСД ( $\omega$ ,  $\varphi$  и  $v$  для каждого).

Принимая деформации, постоянными в пределах между узлами закрепления соседних,  $(k-1)$ -го и  $k$ -го элементов МСД, получим,, учитывая правило знаков для усилий и перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= (\omega_k - \omega_{k-1}) / l_{к,к-1}; \\ K_x &= (\varphi_k - \varphi_{k-1}) / l_{к,к-1}; \\ \gamma_y &= (-v_k + \varphi_k * l_{к,лев} + v_{k-1} + \varphi_{k-1} * l_{к-1,пр}) / l_{к,к-1} \end{aligned} \quad (2.4.4.)$$

Теперь, по найденным деформациям, пользуясь соотношениями (2.1.9.), найдем внутренние усилия во всех интересующих сечениях.

Для вычисления внутренних сил можно использовать также соотношение [299]

$$\{F\} = [\mathcal{E}] * \{\Delta v\} \quad (2.4.5.)$$

где:  $\{\Delta v\}$ - сосредоточенные деформации (взаимные перемещения соседних узлов);  $\{\Delta v\} = -[A]^T \{v\}$ .

Так, для тех же „(к - 1)“-го и „к“-го элементов, пользуясь таблицей 2.3.1 для матрицы  $[A]_k$ , получим формулы для взаимные перемещений, совпадающие с приведенными в (2.4.4.).

**Точность численных методов расчета, каковым является также и метод сосредоточенных деформаций, определяется рядом обстоятельств: гипотезами и допущениями, заложенными в основу метода, степенью дискретизации, конкретными особенностями задачи, применяемыми вычислительными средствами и т.д.**

**Обычно оценки точности численных методов расчета строятся на сопоставлениях результатов с полученными аналитическими или другими альтернативными методами строительной механики.**

Объект сопоставления следует брать несложным в расчетном отношении, лишенным каких-либо специфических особенностей, хорошо обозримым и легко анализируемым.

В данном случае точность метода сосредоточенных деформаций можно оценить на балках, для которых имеются аналитические решения и справочные таблицы.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

**Пример 2.1.** Консольный стержень (рис.2.4.3,а), загруженный на конце сосредоточенной силой  $Y_0$ .

Вычислим прогибы на конце стержня и сопоставим их с аналитически найденными. При этом пренебрежем влиянием деформаций сдвига.

Изогнутая ось такого стержня по модели метода сосредоточенных деформаций будет иметь вид многоугольника, сторонами которого являются элементы МСД длиной  $l = L / n$ , где  $n$  - число элементов МСД.

Прогиб такого стержня будет определяться поворотом (изломом) этих элементов по линиям сосредоточенных деформаций. Этот прогиб можно записать, не прибегая к численной реализации по методу перемещений, так как рассчитываемая система - консольный стержень - является статически определимой. Прогиб на конце при  $Z = L$  составит

$$v_n = l(\varphi_1 n + \varphi_2 (n-1) + \dots + \varphi_n (n - (n-1))) \quad (2.4.6.)$$

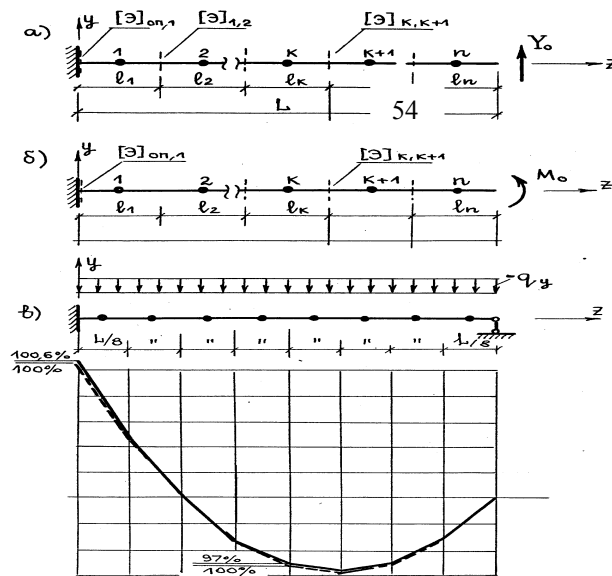
где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  углы поворота элементов МСД.

Углы поворота можно выразить через изгибающие моменты и элементы матрицы жесткости, т.е.

$$\varphi_j = M_j / (EJ / l) \quad (2.4.7.)$$

Изгибающие моменты по линиям сосредоточенных деформаций будут равны

$$M_j = Y_0 L(n-1) \quad (2.4.8.)$$



**Рис. 2.4.3. Примеры расчета стержней для оценки точности МСД;**  
**а) консольный стержень с поперечной силой на конце;**  
**б) консольный стержень с изгибающим моментом на конце;**  
**в) балка**

Подставляя (2.4.8.) и (2.4.7.) в (2.4.6.) , получим

$$v_n = \frac{Y_0 L^3}{EJ} \frac{1}{n^3} (n^2 / 2 + (n-1)^2 + \dots + (n - (n-1))^2)$$

или

$$v_n = \frac{Y_0 L^3}{EJ} \frac{1}{n^3} \left( \sum_1^n n^2 - n^2 / 2 \right) \quad (2.4.9.)$$

**Прогиб консольного стержня, как известно из элементарных аналитических решений, вычисляется по формуле**

$$v_n = Y_0 L^3 / 3EJ \quad (2.4.10.)$$

Выполним расчеты по формуле (2.4.9.) и (2.4.10.) и сопоставим прогибы при различных значениях  $n$ ; результаты вычислений приведены в табл.2.4.2.

Таблица 2.4.2.

Сопоставление прогибов, вычисленных по МСД и аналитически

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\Delta v, \%$	12,5	5,5	3,1	2,0	1,3	1,0	0,8	0,6	0,5	0,125

В [90] приведены сопоставления прогибов консольного стержня, рассчитанного по МСД с использованием ЭВМ о аналитическими решениями по известным формулам [254] с учетом деформаций сдвига. Расчеты показали хорошую сходимость уже при  $n = 4$ .

**Пример 2.2.** Консольный стержень (рис.2.4.3,б) загружен сосредоточенным моментом на конце  $M_0$ .<sup>55</sup> Прогиб стержня вследствие деформаций связей изгиба при элементах МСД можно записать по формуле (2.4.6.) с использованием формулы (2.4.7.), учитывая, что

$$M_1 = M_2 = \dots = M_n = M_0$$

$$\text{Тогда } v_n = (M_0 L^2 / EJn^2)(n/2 + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-(n-1))) \quad (2.4.11.)$$

Этот же прогиб из аналитического решения равен

$$v_n = M_0 L^2 / 2EJ \quad (2.4.12.)$$

Вычисления по (2.4.11) и (2.4.12) дают одинаковые прогибы при любом числе  $n$ , т.е. в данном случае решение по методу сосредоточенных деформаций является точным.

**Пример 2.3.** Однопролетная балка, закреплённая на одном конце и шарнирно опертая на другом конце, загружена равномерно распределённой нагрузкой (рис. 2.4.3, в).

Расчет этой балки выполнялся на ЭВМ по методу сосредоточенных деформаций [114] с учетом физической нелинейности железобетона, на рис. 2.4.3, в представлены изгибающие моменты для упругого решения (первой итерации).

Приведенные здесь сопоставления по прогибам и усилиям для некоторых балочных элементов показывают, что метод сосредоточенных деформаций обладает требуемой для практики точностью.

Вполне естественно также, что с уменьшением размеров элементов МСД, точность результатов повышается.

В заключение этого раздела напомним, что метод сосредоточенных деформаций разрабатывается не для расчета стержней постоянного поперечного сечения и стержневых систем; для них имеются хорошо развитые расчетные приемы и методы.

Метод сосредоточенных деформаций направлен, на расчет стержней переменного поперечного сечения и систем из таких стержней. Переменность

жесткости по длине объясняется наиболее существенным свойством железобетона - физической нелинейностью.

Изложенные оценки точности МСД позволяют судить о требуемой степени дискретизации стержня, жесткость которого меняется в пределах пролета по некоторому неизвестному закону. Из приведенных примеров следует, что при достаточно гладких кривых прогибов и эпюр изгибающих моментов можно назначать  $n = 8-10$ ; в более сложных схемах загрузки и условиях описания степень дискретизации следует увеличить до  $n = 15-20$ .

**Ниже будут приведены другие числовые примеры расчета стержневых и плитных элементов и систем, где степень дискретизации рассчитываемых систем подвергается анализу.**

## 2.5. Расчет железобетонных

56

стержней и

стержневых

систем по деформированной схеме.

Влияние прогибов на несущую способность внецентренно-сжатых железобетонных стержневых элементов учитывается в действующих нормах по проектированию железобетонных конструкций [326] и [265] по приближенной методике с использованием понятия о расчетной длине, о коэффициенте увеличения начального эксцентриситета, об условной критической силе и других, в том числе эмпирических параметров,

Методическая условность и приближенность нормируемого подхода вызвали оживленную дискуссию в печати [31, 53, 81, 122, 123, 252], из чего можно сделать вывод, что для дальнейшего совершенствования расчетов стержневых элементов по деформированной схеме необходимо искать новые теоретические и расчетно-вычислительные подходы, открываемые широким использованием ЭВМ.

Это касается не только хорошо изученных расчетных ситуаций (стержней постоянного сечения с четкими граничными условиями и простыми схемами загрузки), но прежде всего таких случаев, для которых аналитические решения затруднительны (стержни с переменной по длине жесткостью, зависящей кроме того от уровня загрузки, сложными схемами загрузки и описания, в том числе многопролетные балки или многоэтажные колонны и рамы).

Здесь рассматривается метод сосредоточенных деформаций применительно к расчету сжатых или растянутых упругих стержней постоянного или переменного сечения, загруженных по длине произвольной поперечной нагрузкой в плоскости симметрии их поперечных сечений.



Сущность метода рассмотрим на примере консольного стержня постоянного сечения, нагруженного продольной силой  $N_0$  и поперечной силой  $Y_0$  (рис.2.5.1).

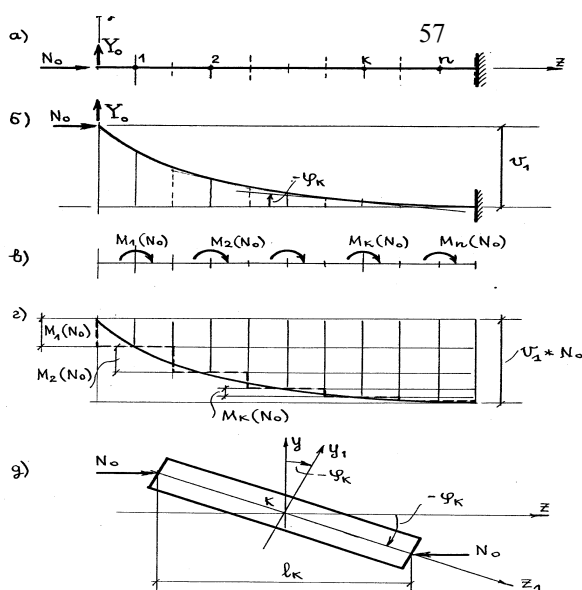
В деформированном состоянии продольная сила  $N_0$  вызывает дополнительный изгиб, который учитывается введением дополнительных изгибающих моментов, вычисляемых по формуле:

$$M_k(N_0) = -N_0 \varphi_k l_k \quad (2.5.1.)$$

где  $\varphi_k$  - угол поворота  $k$ -го элемента МСД,

$l_k$  - длина  $k$ -го элемента МСД.

При достаточно частой разбивке исходного стержня на элементы МСД ступенчатая вписанно-описанная эпюра моментов  $M(N_0)$  по площади приближается к истинной эпюре моментов  $M(N_0)$ , очерченной по форме прогибов продольной оси стержня (рис.2.5.1.). Поскольку сами перемещения и углы поворота элементов МСД зависят от изгибающих моментов, то задача решается итерационным способом по специально составленному алгоритму, реализованному на ЭВМ:



**Рис. 2.5.1. Учёт деформирования расчётной схемы;**  
**а) исходное состояние, б) деформированное состояние, в) узловые дополнительные моменты, г) эпюра дополнительных изгибающих моментов, д) элемент МСД**

- решается задача без учета изгибающих моментов  $M(N_0)$ ;

$$[R]\{v\} = \{P\},$$

где:  $[R]$  - матрица внешней жесткости рассчитываемого стержня по МСД,

$\{v\}$  - вектор перемещений;

$\{P\}$  - вектор нагрузок;

- вычисляются прогибы и углы поворота элементов МСД  $\{U\}$ , а также внутренние силы  $\{F\}$ ;
- формируется вектор узловых изгибающих моментов  $\{M(N_0)\}$  на 1-ой итерации;
- решается система уравнений

$$[R]\{U\} = \{P\} + \{M(N_0)\}, \quad (2.5.2)$$

- вновь формируется вектор узловых изгибающих моментов  $\{M(N_0)\}$ ;
- решение повторяется до тех пор, пока с требуемой точностью
- за установленное число итераций не будет достигнуто соотношение:

$$\left( \sum_m ((v_{m,i} - v_{n,i+1}) / (v_{m,i} + v_{m,i+1}))^2 / m \right)^{0,5} \leq \omega \quad (2.5.3.)$$

где  $v_{m,i}$  и  $v_{m,i+1}$  - „ $m$ “-й элемент вектора перемещений  $\{U\}$  на „ $i$ “-й и „ $(i+1)$ “-й итерациях; эти перемещения являются корнями матричного уравнения (2.5.2);  $\omega$  - некоторое малое число, назначаемое исходя из требуемой точности расчета;

в условие (2.5.3) могут включаться не все, но лишь некоторые элементы вектора перемещений  $\{U\}$  например, прогибы стержней в серединах пролетов.

Условие (2.5.3.) удовлетворяется, если стержень сохраняет устойчивость; в противном случае (2.5.3.) не выполняется, процесс не сходится.

Если в стержне нет поперечной нагрузки, то первоначальное отклонение должно быть вызвано искусственно, например, введением очень малой поперечной нагрузки.

### **Рассмотрим числовой пример.**

Консольный стержень загружен согласно рис.2.5.1. При этом:  $N_0 = 653,33$  кН;  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа; поперечное сечение стержня  $b \cdot h = 0,1 \cdot 0,2$  м; длина  $L = 2$  м;  $Y_0 = 10$  кН.

**Расчет по методу сосредоточенных деформаций выполнен с разбивкой стержня на 8 элементов МСД при  $3 \cdot 8 = 24$  неизвестных метода перемещений по программе "ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ", блок-схема программы представлена на рис.3.6.2.**

Сопоставим результаты численного расчета с аналитическими.

Расчетом на ЭВМ при точности итерационного процесса  $\omega = 0,001$  получен изгибающий момент в заделке  $M = 8,397 \cdot 10^{-2}$  мН\*м. Этот же момент по формуле [333] составит

$$M = Y_0 \cdot L \cdot \operatorname{tg} \alpha / \alpha = 1 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 5,7978 / 1,4 = 8,282 \cdot 10^{-2} \text{ мН} \cdot \text{м},$$

где параметр нагрузки  $\alpha = L * (N_0 / EJ)^{0,5} = 1,4$ .

Расхождение  $\Delta M = +1,3\%$

Прогиб на конце консольного стержня составил  $U = 9,797 \times 10^{-2} \text{ м}$ ; по формуле [342]

$$v = Y_0 L^3 (tg \alpha / \alpha - 1) / EJ \alpha^2 = 1 * 10^{-2} * 2^2 * (5,7978 / 1,4 - 1) / 1,333 * 1,4^2 = 9,6363 * 10^{-2} \text{ м}$$

расхождение  $\Delta v = +1,6\%$

Угол поворота на конце стержня согласно расчету по МСД равен  $\varphi = -7,563 * 10^{-2}$ , по формуле [333]

$$\varphi = -Y_0 L (1 / \cos \alpha - 1) / EJ \alpha^2 = -1 * 10^{-2} * 2 * (1 / (-0,1699) - 1) / 1,333 * 1,4^2 = -7,474 * 10^{-2};$$

Расхождение  $\Delta \varphi = +1,2\%$

**Из этих сопоставлений изгибающих моментов, прогибов и углов поворота, полученных расчетом по МСД согласно разработанному алгоритму и вычисленных по имеющимся формулам можно говорить о практически достаточной точности расчетов.**

## 2.6. Пространственно работающие упругие стержни.

Рассмотрим стержень, нагруженный системой внешних сил в плоскостях, совпадающих с главными центральными осями сечения; соответствующие этому нагружению внутренние силы приводятся к продольной центрально приложенной силе, изгибающим моментам в направлении  $M_x$ ,  $M_y$ ; поперечным силам  $Q_x$ ,  $Q_y$  и крутящему моменту  $M_z$

Опуская подробные пояснения и пользуясь п. 2.1., запишем связь между внутренними силами и соответствующими им деформациями, применив и расширив формулу (2.1.9);

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ Q_x \\ Q_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & & & & \\ & EJ_x & & & & \\ & & EJ_y & & & \\ & & & GA/x_x & & \\ & & & & GA/x_y & \\ & & & & & \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_x \\ K_y \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ K_z \end{Bmatrix} \quad (2.6.1)$$

$$\left| \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \right| GJ_k$$

или  $\{F\} = [C]^* \{\lambda\}$ ,

где:  $x_x$  и  $x_y$  - коэффициенты сдвига в плоскости оси  $x$  и  $y$  соответственно:

$J_k$  - момент инерции сечения при кручении;

$K_k$  - интенсивность углов закручивания вокруг оси  $z$ ;

$\{F\}$  - вектор внутренних сил;

$[C]$  - матрица жесткости сечений;

$\{\lambda\}$  - вектор деформаций.

Распространяя метод сосредоточенных деформаций на случай пространственно работающих стержней, запишем соотношения между внутренними силами на границе  $k$ -го и  $(k+1)$ -го элементов и взаимными перемещениями узлов их закрепления

$$\{F\}_{k,k+1} = l_{k,k+1}^{-1} [C]_{k,k+1} \{\Delta v\}_{k,k+1}, \quad (2.6.2.)$$

где:  $l_{k,k+1}$  - расстояние между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м узлами, (рис.2.6.2.)

$\{\Delta v\}_{k,k+1}$  - вектор взаимных <sup>60</sup> перемещений этих узлов, вычисляемый по формуле:

$$\{\Delta v\}_{k,k+1} = -[A]_k^T \{v\}_{k,k+1}$$

**Рис. 2.6.1. Схема внутренних сил для упругого стержня**

Вектор перемещений  $\{v\}_{k,k+1}$  для  $k$ -го и  $(k+1)$ -го узлов

$$\{\Delta v\}_{k,k+1}^T = \left\{ \omega_k, \varphi_k^x, \varphi_k^y, u_k, v_k, \varphi_k^z; \omega_{k+1}, \varphi_{k+1}^x, \varphi_{k+1}^y, u_{k+1}, v_{k+1}, \varphi_{k+1}^z \right\}$$

где:  $\omega$  - линейные перемещения узлов вдоль оси z;

$\varphi^x, \varphi^y$  - углы поворота в плоскостях действия изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ;

$u, v$  - линейные перемещения в направлении осей x и y;

$\varphi^z$  - углы поворота вокруг оси z.

В формуле (2.6.2.) выражение  $l_{k,k+1}^{-1} * [C]_{k,k+1}$  является матрицей жесткости условных податливых связей по линии сосредоточенных деформаций между k-м и (k+1)-м элементами МСД.

Перейдем к построению матрицы внешней жесткости для пространственно работающего стержня.

Как было показано на примере стержня, нагруженного в одной плоскости, можно для построения матрицы внешней жесткости использовать единичные перемещения элемента МСД (здесь этих перемещений будет 6), определяя соответствующие реакции в фиктивных неподатливых связях метода перемещений. Однако этот путь построения матрицы внешней жесткости [R] плохо алгоритмируется, его реализация на ЭВМ сложна; однако этим путем можно получить готовые формулы для элементов матрицы внешней жесткости и эти формулы непосредственно использовать в расчетах на ЭВМ.

Применим другой прием построения матрицы внешней жесткости на основании соотношения  $[R] = [A] [K] [A]^T$ , где [A] - матрица коэффициентов в уравнениях равновесия элементов МСД.  $[A]^T$  - транспонированная с ней, [K] - матрица внутренней жесткости, ее 61 элементами являются параметры жесткости условных податливых 61 связей между элементами МСД.

В таблице 2.6.1. приведены элементы матрицы равновесия  $[A]_k$ , в таблице 2.6.2. - элементы матрицы внутренней жесткости  $[K]_k$  для левого и правого конца элемента МСД.

Перемножая матрицы  $[A]_k$  и  $[K]_k$ , а затем умножая произведение на  $[A]_k^T$ , получим искомые элементы матрицы внешней жесткости  $R_{m,n} = R_{n,m}$ ,  $m=i, i+1, i+2, i+3, i+4, i+5$ ;  $n=i-6, i-5, i-4, i-3, i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3, i+4, i+5, i+6, i+7, i+8, i+9, i+10, i+11$ .

Следуя [299], перемножение "вручную" выполним построчно. Умножая 1-ю строку матрицы  $[A]_k$  на 1-й столбец матрицы  $[K]_k$ , а затем на 7-ю строку матрицы  $[A]_k$ , получим, например,

$$R_{i-6,i} = R_{i,i-6} = -EA_{k,k+1} / l_{k,k-1} \quad (2.6.3.)$$

где  $EA_{k,k+1}$  - осевая жесткость стержня на участке между „k“-м и „(k-1)“-м узлами,  $l_{k,k-1}$  - расстояние между этими же узлами МСД (рис.2.6.2., 2.6.3.).

Поступая аналогичным образом, найдем все элементы матрицы жесткости  $[R]_k$  (см. табл. 2.6.4 - 2.6.9).

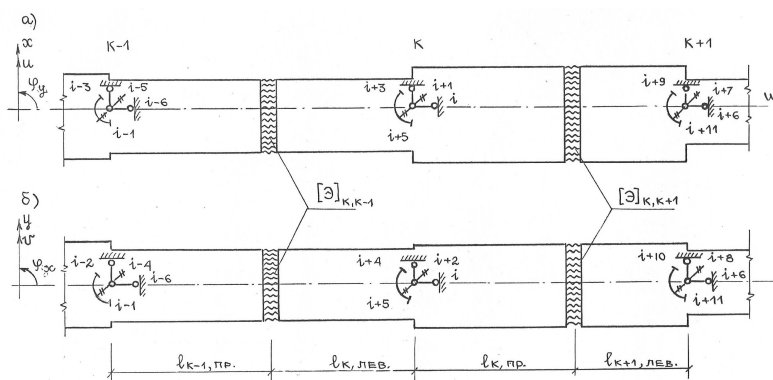


Рис. 2.6.2. Расчетная схема МСД для стержня переменного сечения; а) в осях  $X_0Z$ ; б) в осях  $Y_0Z$ .

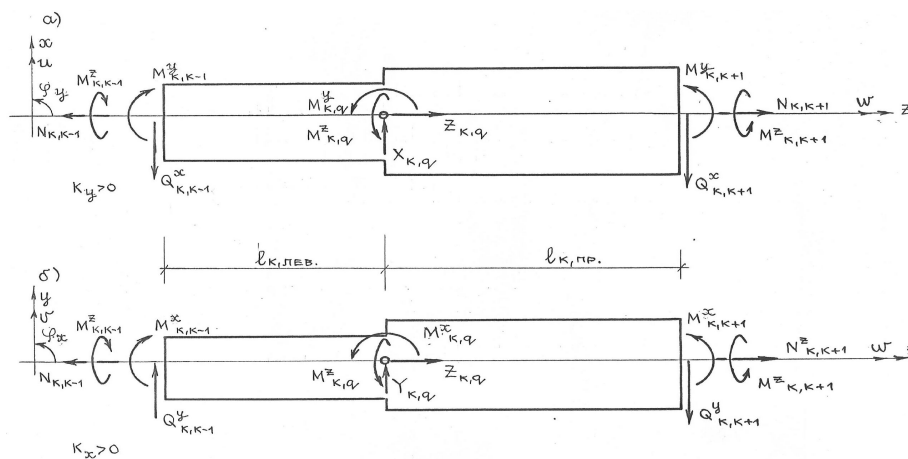


Рис.2.6.3. Внутренние силы в стержне переменного сечения; а) в осях  $X_0Z$ ; б) в осях  $Y_0Z$ .

Таблица 2.6.1.

Матрица равновесия для стержня  $[A]_k$

Элементы МСД	Уравнения равновесия	Связи метода перемещений	№	Коэффициенты при внутренних силах												
				$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^z$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^z$	
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
к-1	$\sum Z_{k-1}$	$i - 6$	1	1												
	$\sum M_{k-1}^y$	$i - 5$	2		1		$-l_{k-1,np}$									
	$\sum M_{k-1}^x$	$i - 4$	3			1		$-l_{k-1,np}$								
	$\sum X_{k-1}$	$i - 3$	4				1									
	$\sum Y_{k-1}$	$i - 2$	5					1								
	$\sum M_{k-1}^z$	$i - 1$	6						1							
к	$\sum Z_k$	$i$	7	-1						1						
	$\sum M_k^y$	$i + 1$	8		-1		$-l_{k,лев}$			1		$-l_{k,np}$				
	$\sum M_k^x$	$i + 2$	9			-1		$-l_{k,лев}$			1		$-l_{k,np}$			
	$\sum X_k$	$i + 3$	10				-1					-1				
	$\sum Y_k$	$i + 4$	11					-1						-1		
	$\sum M_k^z$	$i + 5$	12						-1							1
к+1	$\sum Z_{k+1}$	$i + 6$	13							-1						
	$\sum M_{k+1}^y$	$i + 7$	14								-1		$-l_{k+1,лев}$			
	$\sum M_{k+1}^x$	$i + 8$	15									-1		$-l_{k+1,лев}$		
	$\sum X_{k+1}$	$i + 9$	16										1			
	$\sum Y_{k+1}$	$i + 10$	17											1		
	$\sum M_{k+1}^z$	$i + 11$	18													-1

Таблица 2.6.2.

Матрица внутренней жесткости для типового элемента МСД [K]<sub>к</sub>

№	Внутренние силы при единичных взаимных смещениях											
	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^z$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^z$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{EA_{k,k-1}}{l_{k,k-1}}$											
2		$\frac{EJ_{k,k-1}^y}{l_{k,k-1}}$										
3			$\frac{EJ_{k,k-1}^x}{l_{k,k-1}}$									
4				$\frac{GA/x_{k,k-1}^x}{l_{k,k-1}}$								
5					$\frac{GA/x_{k,k-1}^y}{l_{k,k-1}}$							
6						$\frac{GJ_{k,k-1}^z}{l_{k,k-1}}$						
7							$\frac{EA_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}$					
8								$\frac{EJ_{k,k+1}^y}{l_{k,k+1}}$				
9									$\frac{EJ_{k,k+1}^x}{l_{k,k+1}}$			
10										$\frac{GA/x_{k,k+1}^x}{l_{k,k+1}}$		
11											$\frac{GA/x_{k,k+1}^y}{l_{k,k+1}}$	
12												$\frac{GJ_{k,k+1}^z}{l_{k,k+1}}$



Таблица 2.6.3.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i,j}; j = i - 6, \dots, i + 11$
1	$i - 6$	$R_{i,i-6} = -EJ_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1}$
2	$i - 5$	$R_{i,i-5} = 0$
3	$i - 4$	$R_{i,i-4} = 0$
4	$i - 3$	$R_{i,i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{i,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i,i-1} = 0$
7	$i$	$R_{i,i} = EA_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + EA_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1}$
8	$i + 1$	$R_{i,i+1} = 0$
9	$i + 2$	$R_{i,i+2} = 0$
10	$i + 3$	$R_{i,i+3} = 0$
11	$i + 4$	$R_{i,i+4} = 0$
12	$i + 5$	$R_{i,i+5} = 0$
13	$i + 6$	$R_{i,i+6} = 0$
14	$i + 7$	$R_{i,i+7} = 0$
15	$i + 8$	$R_{i,i+8} = 0$
16	$i + 9$	$R_{i,i+9} = 0$
17	$i + 10$	$R_{i,i+10} = 0$
18	$i + 11$	$R_{i,i+11} = 0$

Таблица 2.6.4.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i+1,j}; j = i - 6, \dots, i + 11$
1	$i - 6$	$R_{i+1,i-6} = 0$
2	$i - 5$	$R_{i+1,i-5} = -EJ_{k,k-1}^x * l_{k,k-1}^{-1} + GA / x_{k,k-1}^x * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k-1,np} * l_{k,лев}$
3	$i - 4$	$R_{i+1,i-4} = 0$
4	$i - 3$	$R_{i+1,i-3} = GA / x_{k,k-1}^x * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев}$
5	$i - 2$	$R_{i+1,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i+1,i-1} = 0$
7	$i$	$R_{i+1,i} = 0$
8	$i + 1$	$R_{i+1,i+1} = EJ_{k,k-1}^x * l_{k,k-1}^{-1} + EJ_{k,k+1}^x * l_{k,k+1}^{-1} + GA / x_{k,k-1}^x * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + GA / x_{k,k+1}^x * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np}$
9	$i + 2$	$R_{i+1,i+2} = 0$
10	$i + 3$	$R_{i+1,i+3} = -GA / x_{k,k-1}^x * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + GA / x_{k,k+1}^x * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np}$
11	$i + 4$	$R_{i+1,i+4} = 0$
12	$i + 5$	$R_{i+1,i+5} = 0$
13	$i + 6$	$R_{i+1,i+6} = 0$
14	$i + 7$	$R_{i+1,i+7} = -EJ_{k,k+1}^x * l_{k,k+1}^{-1} + GA / x_{k,k+1}^x * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np} * l_{k+1,лев}$
15	$i + 8$	$R_{i+1,i+8} = 0$
16	$i + 9$	$R_{i+1,i+9} = -GA / x_{k,k+1}^x * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np}$
17	$i + 10$	$R_{i+1,i+10} = 0$
18	$i + 11$	$R_{i+1,i+11} = 0$

Таблица 2.6.5.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i+2,j}; j = i - 6, \dots, i + 11$
1	$i - 6$	$R_{i+2,i-6} = 0$
2	$i - 5$	$R_{i+2,i-5} = 0$
3	$i - 4$	$R_{i+2,i-4} = -EJ \frac{y}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + GA / x \frac{y}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} * l_{k-1,пр}$
4	$i - 3$	$R_{i+2,i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{i+2,i-2} = GA / x \frac{y}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев}$
6	$i - 1$	$R_{i+2,i-1} = 0$
7	$i$	$R_{i+2,i} = 0$
8	$i + 1$	$R_{i+2,i+1} = 0$
9	$i + 2$	$R_{i+2,i+2} = EJ \frac{y}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + EJ \frac{y}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} +$ $+ GA / x \frac{y}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев}^2 + GA / x \frac{y}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,пр}^2$
10	$i + 3$	$R_{i+2,i+3} = 0$
11	$i + 4$	$R_{i+2,i+4} = -GA / x \frac{y}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + GA / x \frac{y}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,пр}$
12	$i + 5$	$R_{i+2,i+5} = 0$
13	$i + 6$	$R_{i+2,i+6} = 0$
14	$i + 7$	$R_{i+2,i+7} = 0$
15	$i + 8$	$R_{i+2,i+8} = -EJ \frac{y}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} + GA / x \frac{y}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,пр} * l_{k+1,лев}$
16	$i + 9$	$R_{i+2,i+9} = 0$
17	$i + 10$	$R_{i+2,i+10} = -GA / x \frac{y}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,пр}$
18	$i + 11$	$R_{i+2,i+11} = 0$

Таблица 2.6.6.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i+3,j}; j = i - 6, \dots, i + 11$
1	$i - 6$	$R_{i+3,i-6} = 0$
2	$i - 5$	$R_{i+3,i-5} = -GA / x \frac{x}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k-1,пр}$
3	$i - 4$	$R_{i+3,i-4} = 0$
4	$i - 3$	$R_{i+3,i-3} = -GA / x \frac{x}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1}$
5	$i - 2$	$R_{i+3,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i+3,i-1} = 0$
7	$i$	$R_{i+3,i} = 0$
8	$i + 1$	$R_{i+3,i+1} = -GA / x \frac{x}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + GA / x \frac{x}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,пр}$
9	$i + 2$	$R_{i+3,i+2} = 0$
10	$i + 3$	$R_{i+3,i+3} = -GA / x \frac{x}{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + GA / x \frac{x}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1}$
11	$i + 4$	$R_{i+3,i+4} = 0$
12	$i + 5$	$R_{i+3,i+5} = 0$
13	$i + 6$	$R_{i+3,i+6} = 0$
14	$i + 7$	$R_{i+3,i+7} = GA / x \frac{x}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k+1,лев}$
15	$i + 8$	$R_{i+3,i+8} = 0$
16	$i + 9$	$R_{i+3,i+9} = -GA / x \frac{x}{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1}$
17	$i + 10$	$R_{i+3,i+10} = 0$
18	$i + 11$	$R_{i+3,i+11} = 0$

Таблица 2.6.7.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i+5,j}; j = i - 6, \dots, i + 11$
1	$i - 6$	$R_{i+5,i-6} = 0$
2	$i - 5$	$R_{i+5,i-5} = 0$
3	$i - 4$	$R_{i+5,i-4} = 0$
4	$i - 3$	$R_{i+5,i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{i+5,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i+5,i-1} = -GJ \overset{z}{k_{p,k,k-1}} * I_{k,k-1}^{-1}$
7	$i$	$R_{i+5,i} = 0$
8	$i + 1$	$R_{i+5,i+1} = 0$
9	$i + 2$	$R_{i+5,i+2} = 0$
10	$i + 3$	$R_{i+5,i+3} = 0$
11	$i + 4$	$R_{i+5,i+4} = 0$
12	$i + 5$	$R_{i+5,i+5} = GJ \overset{z}{k_{p,k,k-1}} * I_{k,k-1}^{-1} + GJ \overset{z}{k_{p,k,k+1}} * I_{k,k+1}^{-1}$
13	$i + 6$	$R_{i+5,i+6} = 0$
14	$i + 7$	$R_{i+5,i+7} = 0$
15	$i + 8$	$R_{i+5,i+8} = 0$
16	$i + 9$	$R_{i+5,i+9} = 0$
17	$i + 10$	$R_{i+5,i+10} = 0$
18	$i + 11$	$R_{i+5,i+11} = -GJ \overset{z}{k_{p,k,k+1}} * I_{k,k+1}^{-1}$

Таблица 2.6.8.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№	Связи	$R_{i+4,j}; j = i - 6, \dots, i + 11$
1	$i - 6$	$R_{i+4,i-6} = 0$
2	$i - 5$	$R_{i+4,i-5} = 0$
3	$i - 4$	$R_{i+4,i-4} = -GA / x_{k,k-1}^y * I_{k,k-1}^{-1} * I_{k-1,np}$
4	$i - 3$	$R_{i+4,i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{i+4,i-2} = -GA / x_{k,k-1}^y * I_{k,k+1}^{-1}$
6	$i - 1$	$R_{i+4,i-1} = 0$
7	$i$	$R_{i+4,i} = 0$
8	$i + 1$	$R_{i+4,i+1} = 0$
9	$i + 2$	$R_{i+4,i+2} = -GA / x_{k,k-1}^y * I_{k,k-1}^{-1} * I_{k,лев} + GA / x_{k,k+1}^y * I_{k,k+1}^{-1} * I_{k,np}$
10	$i + 3$	$R_{i+4,i+3} = 0$
11	$i + 4$	$R_{i+4,i+4} = GA / x_{k,k-1}^y * I_{k,k-1}^{-1} + GA / x_{k,k+1}^y * I_{k,k+1}^{-1}$
12	$i + 5$	$R_{i+4,i+5} = 0$
13	$i + 6$	$R_{i+4,i+6} = 0$
14	$i + 7$	$R_{i+4,i+7} = 0$
15	$i + 8$	$R_{i+4,i+8} = -GA / x_{k,k+1}^y * I_{k,k+1}^{-1} * I_{k,np} * I_{k+1,лев}$
16	$i + 9$	$R_{i+4,i+9} = 0$
17	$i + 10$	$R_{i+4,i+10} = -GA / x_{k,k+1}^y * I_{k,k+1}^{-1}$
18	$i + 11$	$R_{i+4,i+11} = 0$

Таблица 2.6.9.

Структура матрицы внешней жесткости для типового элемента МСД  $[R]_k$

Связи	$i - 6$	$i - 5$	$i - 4$	$i - 3$	$i - 2$	$i - 1$	$i$	$i + 1$	1 →	
	1	2	3	4	5	6	7	8		
$i$	$R_{i,i-6}$						$R_{i,i}$		2 →	
$i + 1$		$R_{i+1,i-5}$		$R_{i+1,i-3}$				$R_{i+1,i+1}$		
$i + 2$			$R_{i+2,i-4}$		$R_{i+2,i-2}$					
$i + 3$		$R_{i+3,i-5}$		$R_{i+3,i-3}$				$R_{i+3,i+1}$		
$i + 4$			$R_{i+4,i-4}$		$R_{i+4,i-2}$					
$i + 5$						$R_{i+5,i-1}$				
1 →	$i + 2$	$i + 3$	$i + 4$	$i + 5$	$i + 6$	$i + 7$	$i + 8$	$i + 9$	$i + 10$	$i + 11$
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
					$R_{i,i+6}$					
		$R_{i+1,i+3}$				$R_{i+1,i+7}$		$R_{i+1,i+9}$		
	$R_{i+2,i+2}$		$R_{i+2,i+4}$				$R_{i+2,i+8}$		$R_{i+2,i+10}$	
		$R_{i+3,i+5}$				$R_{i+3,i+7}$		$R_{i+3,i+9}$		
	$R_{i+4,i+2}$		$R_{i+4,i+4}$				$R_{i+4,i+8}$		$R_{i+4,i+10}$	
2 →				$R_{i+5,i+5}$						$R_{i+5,i+11}$

## 2.7 Выводы по главе

1. Получены матричные соотношения между усилиями и перемещениями для упругих стержней и стержневых систем.
2. Составлены матрицы внутренней жесткости, характеризующие свойства условных комплексных податливых связей по линиям сосредоточенных деформаций.
3. На основе метода сосредоточенных деформаций разработан алгоритм расчёта стержней и их систем переменного сечения, так как переменность жесткости стержней по длине является наиболее существенным свойством железобетонных конструкций.
4. В зависимости от их характера, опорные реакции входят в решения по методу сосредоточенных деформаций, как векторы внутренних сил с соответствующими матрицами жесткости.
5. Получены элементы матрицы внешней жесткости для пространственно работающих стержневых систем в многоэтажных зданиях.

## ГЛАВА 3. ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ КОНСТРУКЦИИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ. ИССЛЕДОВАНИЯ ИХ РАБОТЫ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОСТИ

### 3.1. Дискретная расчетная модель для нормальных сечений железобетонных стержней

Железобетонные стержни и стержневые несущие системы многоэтажных зданий являются объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований.

Эти исследования выполняются как отдельными лицами, так и целыми группами; можно поэтому выделить определенные научные направления, характеризующие общностью исходных предпосылок, объектами и методикой исследований и т.д. Анализ этих научных направлений показывает, что они имеют много общего в части исходных положений, но часто различаются способом реализации. Отмечается общая устойчивая тенденция к использованию ЭВМ и совершенствованию расчетных моделей и алгоритмов, отличающихся простотой математического оформления, наглядностью и высокой достоверностью [9, 11-13, 15-17, 22, 24, 78, 101, 132, 203, 314, 391 и др.].

Основные задачи расчетов железобетонных стержней и систем из них по предельным состояниям решаются в настоящее время по нормативному документу [326].

Расчет прочности по нормальным сечениям согласно [326] предполагает известными в этих сечениях величины внешних сил, а формулы для вычисления предельных величин внутренних сил основываются на условной (расчетной) схеме распределения напряжений и деформаций в бетоне и арматуре по сечению.

Совпадение опытных и расчетных значений предельных сил обеспечивает совокупность специальных параметров: относительной высоты сжатой зоны  $\xi_R$ , характеристику сжатой зоны бетона и др.

Расчет по образованию нормальных трещин строится по [326] исходя из положений, отличных от расчета прочности, и также требующих экспериментально обоснованных параметров.

Прогибы стержневых элементов согласно [326] вычисляются на основании кривизны продольных осей элементов, для определения которых требуются целый ряд специальных параметров.

Расчетные формулы [326] при расчете элементов, различающихся характером внешних сил и формой поперечного сечения имеют различную структуру; при расчете прочности выделяются изгибаемые элементы прямоугольного, таврового, двутаврового и кольцевого сечений; внецентренно сжатые элементы прямоугольного и кольцевого сечений; центрально-растянутые элементы; внецентренно растянутые элементы прямоугольного сечения; общий случай расчета.

Научно-исследовательские работы по совершенствованию расчетов стержневых элементов и систем из них ведутся по нескольким направлениям, отличительными признаками которых являются:

- непосредственное использование в расчетных формулах полных диаграмм „ $\sigma - \varepsilon$ “ для одноосного сжатия и растяжения бетона и арматуры при различных режимах и длительностях загрузки;
- разработка общих расчетных формул для сечении различной формы и при разных внешних силах;
- объединение расчетов сечений с раскрытием внутренних сил в статически неопределимых системах;
- привлечение в расчетах ЭВМ.

Настоящее исследование стержневых элементов и систем обладает некоторыми из указанных признаками и строится на следующих положениях:

- продольные деформации бетона и арматуры в нормальных сечениях распределяются по закону плоского деформирования (гипотезы плоских сечений) на всех уровнях загрузки;
- продольные деформации и соответствующие им нормальные напряжения в бетоне и арматуре принимаются „средними“;
- в расчеты вводятся полные диаграммы „ $\sigma - \varepsilon$ “ для бетона и арматуры, включая нисходящие ветви, получаемые при их одноосном загрузении на эталонных образцах при различных длительностях внешнего воздействия;
- поперечные сечения могут иметь любую форму (прямоугольник, тавр, круг, толстостенное кольцо, двутавр, швеллер и т.д., рис. 3.1.1);

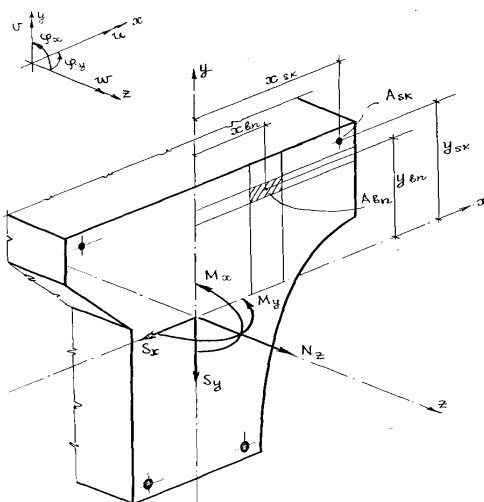


Рис. 3.1.1. Дискретная расчётная модель для нормального сечения произвольной поперечной формы

- в расчетах нормальные сечения задаются в дискретной форме - совокупностью элементарных участков бетона  $A_{вп}$  и арматуры  $A_{ск}$ , геометрия и размеры которых зависят от конкретной ситуации;
- напряжения в бетоне  $\sigma_{вп}$  и арматуре  $\sigma_{ск}$  на соответствующих элементарных площадках распределяются равномерно;

- в нормальных сечениях может размещаться арматура разных классов, обычная и напрягаемая (смешанное армирование), а также бетоны разных классов (многослойные конструкции) при надежной их совместной работе;

- уравнения равновесия записываются в единообразной форме, независимо от характера внешних сил в сечении, его геометрии и уровня напряженно-деформированного состояния.

Остановимся подробнее на некоторых из сформулированных положений.

Допущение закона о распределении продольных деформаций в бетоне и арматуре по закону плоскости (гипотезы плоских сечений) для всех стадий напряженно-деформированного состояния является наиболее дискуссионным.

Не вызывает возражений эта гипотеза в стадии до образования трещин, что и принято в [326]

Можно считать ее справедливой и для стадии после образования трещин, но в сечениях между трещинами и в сечениях непосредственно по трещине; на всех же остальных участках естественно искривление сечений.

Однако гипотеза плоских сечений здесь применяется в "среднем", т.е. для средних деформаций бетона и арматуры, постоянных в пределах участков между трещинами.

Допускается, таким образом, введение некоторого условного "растяжимого" бетона, пронизанного арматурой, сохраняющего интегральные жесткостные свойства нормальных сечений и стержневых систем в целом.

Отказ от коэффициента  $\Psi_s$  в явном виде и скрытый учет его в диаграмме растянутого бетона радикально облегчает решение задач по расчету железобетонных стержней и систем из них.

Вводимый в расчет "растяжимый" бетон, работающий без трещин, позволяет тем не менее оценивать ширину раскрытия трещин в том же смысле, как это сформулировано в [271]: за ширину раскрытия трещин принимается приращение деформаций в арматуре на определенной длине (расстоянии между трещинами), определяемых природой сцепления и зависящей от многих факторов. Формулы [271], как показывают оценочные расчеты, могут быть использованы для вычисления ширины раскрытия трещин.

Гипотеза плоских сечений для стержневых элементов с массивными поперечными сечениями, характерными для железобетона, как показывают расчеты, дает хорошие результаты.

Вместе с тем, для поперечных сечений, чувствительных к депланации, закон распределения продольных деформаций может быть задан более сложным, а именно в форме гиперболического параболоида, что, как будет показано ниже, приводит к соотношениям для тонкостенных стержней в форме [44].

Гипотеза плоских сечений применительно к нелинейно-деформируемым материалам нашла широкое применение, на этой основе разработана довольно стройная теория расчета стальных рам [56].

В железобетонных конструкциях подобное направление развито недостаточно, что объясняется большей физической сложностью явления

(прежде всего разрывностью деформаций в растянутом бетоне), так и чисто техническими вопросами (разнокомпонентностью сечений).

Важный этап в развитии расчетов сечений выполненных из нелинейно работающих материалов, начался с применением ЭВМ для выполнения итерационных процессов.

Представление сечений в дискретной форме [221], примененное также к железобетонным элементам, открыло новые возможности для расчета прочности и перемещений стержневых железобетонных элементов и позволило получать исчерпывающие результаты, в максимальной степени совпадающие с опытными [11, 87, 88, 117 и др.].

В настоящей работе реализована схема разбивки, изображенная на рис.3.1.1 для сечений различной формы.

При разбивке ширина бетонных полос (высота трапеций), проходящих через арматуру, принималась равной  $A_s \pi^{0,5} / 2$ ; при этом арматурный стержень задавался со своей фактической площадью, а соответствующая площадь бетона исключалась из бетонного сечения.

В программе для ЭВМ разбивка начиналась в местной системе вычислялись координаты центров тяжести всех элементарных площадок бетона  $A_{en}$  и арматуры  $A_{sk}$ , а затем отыскивался центр тяжести всего сечения для упругого состояния по формулам

$$\begin{aligned} x_0 &= (\sum_n E_{en} A_{en} x_{en} + \sum_l E_{sk} A_{sk} x_{sk}) / (\sum_n E_{en} A_{en} + \sum_l E_{sk} A_{sk}); \\ y_0 &= (\sum_n E_{en} A_{en} y_{en} + \sum_l E_{sk} A_{sk} y_{sk}) / (\sum_n E_{en} A_{en} + \sum_l E_{sk} A_{sk}); \end{aligned} \quad (3.1.1.)$$

В дальнейшем эти центральные оси принимались при вычислении геометрических характеристик железобетонного сечения на всех стадиях напряженно-деформированного состояния.

Важным является вопрос о степени дискретизации: она должна быть оптимальной, чтобы сохранить все геометрические характеристики моделируемого исходного сечения в пределах необходимой точности расчета и в то же время по возможности с малым числом элементарных площадок для сокращения объема вычислений. Поясним это на примере однородного прямоугольного сечения размером  $B \times H$ .

Момент инерции такого сечения  $J_y = BH^3 / 12$ , разбитого на  $n$  полосок с площадью  $A_n$ , вычисляется согласно принятой методике по приближенной формуле

$$\begin{aligned} J_y &= \sum_n A_n x_n^2 = (BH^3 / 2n^3) \sum_{i=1}^{i=n} ((i + (-1)^{2i-1})^2 (\frac{1 + (-1)^i}{2})) = \\ &= (BH^3 / 2n^3) ((n-1)^2 + (n-3)^2 + \dots + (n - (n-1))^2) \end{aligned} \quad (3.1.2.)$$

В таблице 3.1.1., приведены величины погрешностей, в зависимости от числа элементарных полосок

**Таблица 3.1.1.**



### Оценка точности в вычислении моментов инерции

$\Pi$	2	4	6	8	10	16	30
$J_y = \frac{BH^3}{12}$ (точно)	1	1	1	1	1	1	1
$J_y = \sum A_n X_n^2$ (приближенно)	0,7500	0,9375	0,9722	0,9844	0,9900	0,9961	0,9988
Погрешность, в %	-25	-6,25	-2,78	-1,56	-1,0	-0,39	0,12

Из таблицы 3.1.1. следует, что число элементарных участков (полос) необходимо принимать не менее 10 в одном направлении, т.е. общее число элементарных участков при разбивке на сечения в двух направлениях должно составлять около 100.

Кроме того, в некоторых случаях разбивочную сетку следует принимать более мелкой в пределах ожидаемой высоты сжатой зоны бетона.

### 3.2. Сопоставительный анализ расчётных моделей с растяжимым и ограниченно растяжимым бетоном

В расчётах прочности, деформаций, трещиностойкости и перемещений, сформулированных в настоящей главе, предполагалось, что растянутый бетон работает с полной диаграммой „ $\sigma_{ст} - \varepsilon_{ст}$ “ включая нисходящую ветвь определенной протяжённости, в зависимости от исходных параметров.

Это же допущение затем заложено в расчёты плоскостных железобетонных элементов.

Допущение понятия о "растяжимом" бетоне без ограничения его деформаций противоречит традиционному представлению о работе растянутого бетона в железобетонных конструкциях, согласно которому после достижения бетоном деформаций  $\varepsilon_{ст} = \hat{\varepsilon}_{ст}$  и соответственно напряжений  $\sigma_{ст} = R_{ст}$  он выключается из работы на растяжение, в сечении образуется трещина.

Вместе с тем согласно традиционному представлению, заложенному в [361], в сечениях между трещинами бетон продолжает воспринимать растягивающие напряжения.

Представление об ограниченной растяжимости бетона заложено во многих исследованиях, оно вошло также в нормативные документы по расчёту железобетонных конструкций.

Однако использование вычислительной техники в прикладных задачах по железобетону сдерживается тем, что расчётные модели с ограниченно растяжимым бетоном недостаточно приспособлены к машинным расчётам. К числу недостатков этого типа можно отнести следующее:

- расчётный алгоритм должен предусматривать непрерывный анализ напряжённо-деформированного состояния во всех точках сечений и устанавливать наличие (или отсутствие) трещин в бетоне;

- в соответствии с этим по мере развития трещин в бетоне не только корректируется, но также и перестраивается структура матриц жёсткости, что является одной из трудоёмких операций в машинном расчёте;

- в итерационных расчётах при высокой заданной точности возможно "зацикливание", если трещинообразование в ограниченно растянутом бетоне резко меняет характеристики жёсткости сечений;

- сохраняется большая трудоёмкость вычислительных программ, сдерживающая охват ими железобетонных сооружений реальных размеров и действительной конструктивной сложности.

Перечисленные сложности и затруднения существенно смягчаются или снимаются вовсе, если в модель деформирования железобетона ввести так называемый "растяжимый бетон", характеризуемый полной диаграммой на участке растяжения „ $\sigma_{bt} - \varepsilon_{bt}$ “, включая нисходящую ветвь соответствующей протяжённости (рис. 3.2.1), в зависимости от длительности внешнего воздействия и содержания арматуры, согласно [338] с учетом переходного коэффициента  $k = R_{bt(\tau)} / R_{b(\tau)}$ .

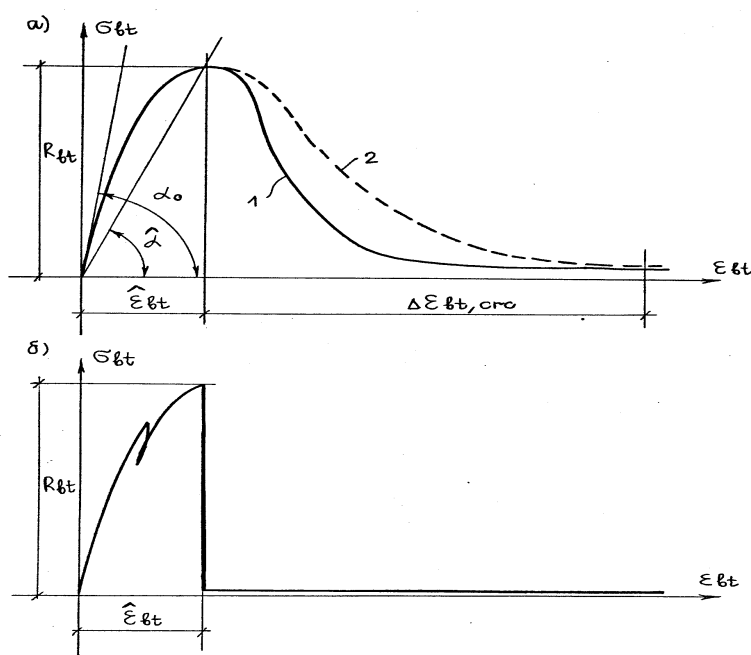


Рис. 3.2.1. Диаграммы „ $\sigma_{bt} - \varepsilon_{bt}$ “ для:  
 а) «растяжимого» бетона,  
 б) «нерастяжимого» бетона

Однако введение "растяжимого" бетона в расчётную модель должно иметь надлежащее обоснование.

Покажем, что при использовании в расчётах "растяжимого" бетона и соблюдении некоторых условий расчета будут получаться практически одинаковые результаты с теми, которые имеют место в расчётах с ограниченно растяжимым бетоном.

Начнём сопоставительный анализ двух расчётных моделей железобетона на стадии до образования трещин для наиболее простого случая - центрального нагружения.

В этом случае матрица жёсткости сечения содержит один элемент

$$C_{11} = \sum_n E_{en} \nu_{en} A_{en} + \sum_k E_{sk} \nu_{sk} A_{sk},$$

и при бетоне одного класса в пределах всего сечения, а также и арматуре одного класса, эту матрицу жёсткости можно записать проще

$$C_{11} = E_{et} \nu_{et} A_e + E_s \nu_s A_s, \quad (3.2.1.)$$

где:  $A_e$  и  $A_s$  полные площади поперечного сечения бетона и арматуры.

До уровня загрузки  $\varepsilon_{et} \leq \hat{\varepsilon}_{et}$  (рис. 3.2.1, а и б) понятия о "растяжимом" и ограниченно растяжимом бетоне не имеют различия, и получаемые результаты по деформациям и перемещениям должны совпадать при расчёте по обеим моделям.

Действительно, нагрузки трещинообразования, вычисленные по развитой здесь методике, близки к опытным (примеры 3.7.1 и 3.7.5). Различие в поведении "растяжимого" и ограниченно растяжимого бетона начинается с уровня загрузки  $\varepsilon_{et} > \hat{\varepsilon}_{et}$ . При  $\varepsilon_{et} = \hat{\varepsilon}_{et}$  деформации в "растяжимом" и ограниченно растяжимом бетоне постоянны по длине элемента, а секущий модуль деформаций  $E'_{et} = E'_{et}(\hat{\varepsilon}_{et})$ , при этом, естественно,  $E'_{et} < E_{et}$  (рис.3.2.2).

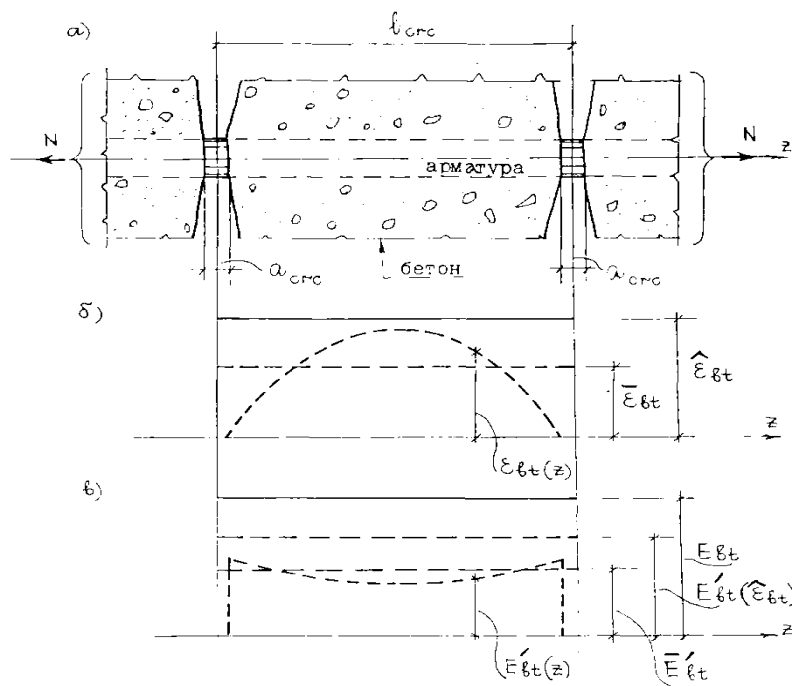


Рис. 3.2.2. Схема распределения деформаций в растянутом бетоне:  
а) схема трещин, б) деформации  $E_{\beta t}$

После образования двух первичных трещин деформации бетона между трещинами будут переменны  $\varepsilon_{et} = \varepsilon_{et}(z)$ , а секущий модуль деформаций  $E'_{et} = E'_{et}(z)$ .

В расчётной модели с ограниченно растяжимым (для краткости "нерастяжимым") бетоном по [254] жёсткость сечения при центральном растяжении после образования трещин записывается так:

$$C_{11} = E_s \nu_s A_s / \psi_s \quad (3.2.2.)$$

В расчётной модели с "растяжимом" бетоном жёсткость сечения принимается по формуле (3.2.1) с условием сохранения совместности средних деформаций растянутого бетона и арматуры  $\varepsilon_{et} = \varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_{et}$  (рис. 3.2.2), модуль деформаций бетона при этом равен  $E_{et} \nu_{et} = \bar{E}_{et}$ , т.е. секущий модуль деформаций в растянутом бетоне принимается также осреднённым.

Очевидно, чтобы результаты расчётов при "растяжимом" и "нерастяжимом" бетоне были одинаковыми, надо приравнять (3.2.1) и (3.2.2):

$$E_{et} \nu_{et} A_e + E_s \nu_s A_s = E_s \nu_s A_s / \psi_s \quad (3.2.3.)$$

Поскольку  $\psi_s < 1$  правую часть (3.2.3) можно представить так:

$$E_s \nu_s A_s / \psi_s = E_s \nu_s A_s + \omega_s \quad (3.2.4.)$$

Таким образом, при подборе параметров для диаграмм „ $\sigma_{et} - \varepsilon_{et}$ “ растяжимого бетона достаточно обеспечить условие

$$\omega_s = E_e \nu_e A_e \quad (3.2.5)$$

Из формул (3.2.3 - 3.2.5) следует, что если в традиционном подходе [264] роль растянутого между трещинами бетона выполняется только арматурой, ожесточенной с помощью коэффициента  $\psi_s$ , то в развиваемой здесь методике арматура и бетон выступают изолированно, связанные совместностью средних деформаций.

Расчёты деформаций  $\{\lambda\}^T = \{\varepsilon_z, K_y, K_x\}$  в нормальных сечениях при  $\varepsilon_{et} \succ \bar{\varepsilon}_{et}$ , а также перемещений железобетонных элементов (см. примеры 3.7.1, 3.7.6 и 3.7.7) показали хорошую сходимость с опытными данными, что свидетельствует о достаточно подходящем подборе параметров диаграммы „ $\sigma_{et} - \varepsilon_{et}$ “, том числе и в растянутом бетоне на нисходящей ветви.

Следует, однако, иметь в виду, что в более общих случаях загрузки сечений условия типа (3.2.2) усложняются, так как матрицы жёсткости содержат по несколько элементов, в которые будут входить приравниваемые параметры  $\omega_s$  и  $E_e \nu_e A_e$ .

Перейдём к оценке ширины раскрытия трещин.

Может сложиться впечатление, что введение в расчётную модель "растяжимого" бетона исключает раскрытие трещин в бетоне.

Разумеется, это не так.

Традиционное представление о механизме раскрытия трещин в бетоне сводится согласно [264] к тому, что после образования трещин в бетоне последний считается нерастяжимым, а раскрытие трещин является следствием

деформаций арматуры на длине, равной расстоянию между трещинами; роль бетона между трещинами сводится к сдерживанию деформаций в арматуре между трещинами.

При использовании модели "растяжимого" (в среднем) бетона ширину раскрытия трещин можно записать так:

$$a_{crc} = \Delta \varepsilon_{st,crc} * l_{crc} \quad (3.2.6.)$$

где  $\Delta \varepsilon_{st,crc} = \Delta \varepsilon_{s,crc}$  - приращение средних деформаций в "растяжимом" бетоне (рис. 3.2.1, а) или арматуре,  $l_{crc}$  расстояние между трещинами.

Величины приращений деформаций  $\Delta \varepsilon_{st,crc} = \varepsilon_{st} - \hat{\varepsilon}_{st}$  или  $\Delta \varepsilon_{s,crc} = \varepsilon_{s,crc} - \hat{\varepsilon}_{st}$  вычисляются по результатам расчётов, а величины  $l_{crc}$  могут быть приняты в виде кратного числа диаметров арматуры  $n * d_s$ , где  $d_s$  - диаметр арматуры,  $n$  - число диаметров, зависящее главным образом от вида профиля арматуры.

Сопоставления значений ширины раскрытия трещин, пока ограниченные, вычисленных по формуле (3.2.6) и методике [264] дали удовлетворительную сходимость, что делает перспективным изложенный подход.

Здесь уместно напомнить о типично вероятностной природе ширины раскрытия трещин, что отражено также и нормативных документах.

Однотипные трещины различаются между собой по ширине вследствие изменчивости свойств параметров сцепления по длине между трещинами, но, кроме того, что не менее важно, ширина раскрытия отдельно взятой трещины изменчива и неопределённа даже в пределах одного диаметра  $d_s$  арматуры, пересекаемого трещиной (рис. 3.2.3).

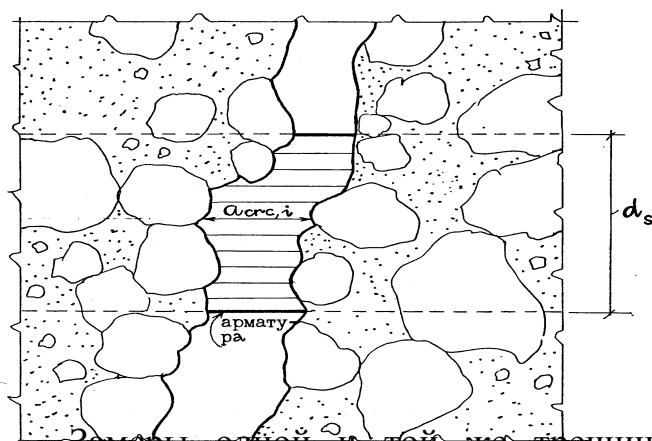


Рис.3.2.3. Раскрытие трещин в пределах диаметра арматуры (увеличено)

Замеры одной и той же трещины, выполняемые на одном уровне загрузки одним и тем же исследователем (а тем более разными) всегда дают существенно несовпадающие результаты.

Рассмотрим расчёты прочности.

Как показали расчёты изложенные в п. 3.7, прочность по нормальным сечениям совпадала с опытной во всех случаях с большой точностью, хотя расчёты велись с сохранением сопротивления растянутого бетона на стадии разрушения.

Сохранение в сечении растянутого бетона не сказывается на несущей способности вследствие того, что при деформациях в арматуре (и равных им средних деформаций "растяжимого" бетона) на стадии разрушения напряжения в растянутом бетоне исчезающе малы, и они не вносят заметных изменений в результаты расчёта.

Однако, при очень малом содержании арматуры роль растянутого не выключаемого бетона может внести заметный вклад в несущую способность по нормальному сечению. Здесь с одной стороны улавливается роль растянутого бетона в сечении над трещиной, а с другой стороны сохраняется фактически вышедший из работы растянутый бетон, пересечённый трещиной,

Из этого следует, что очертание нисходящей ветви в диаграмме „ $\sigma_{st} - \varepsilon_{st}$ “ для растянутого бетона, вообще говоря не должно назначаться произвольно, а приниматься согласно [338] с учетом переходного коэффициента  $k = R_{bt}(\tau) / R_b(\tau)$ .

### 3.3. Соотношения между внутренними силами и деформациями в нормальных сечениях

Рассмотрим поперечное сечение произвольной поперечной формы, к которому приложена система сил: продольная (сжимающая или растягивающая) сила  $N_z$ , изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , сдвигающие поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , крутящий момент  $M_z$ , бимомент сил  $B_z$ .

Вначале ограничимся действием только первых трех компонентов сил:  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$ , совокупность которых вызывает в сечении только нормальные напряжения.

Различные комбинации сил  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$  образуют большое разнообразие напряженно-деформированных состояний в нормальных сечениях, являющихся самостоятельными вопросами в теории железобетона (чистый прямой изгиб, косой изгиб, внецентренное сжатие, растяжение, косое внецентренное сжатие и т.д.)

Традиционно принято вести расчеты на такие силовые воздействия по различным расчетным формулам, а объединение их в общий случай по [326] сопряжено с многочисленными ограничениями.

Отметим, что силы  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$  и соответствующие им перемещения и жесткостные характеристики являются определяющими в расчетах статически неопределимых систем; влиянием сдвигающих сил  $Q_x$  и  $Q_y$  в большинстве таких расчетов пренебрегают.

Принимая распределение продольных деформаций, совпадающих с продольной осью  $z$ , по закону плоскости, запишем (рис.3.1.1.) деформации в бетоне  $\varepsilon_{bn}$  на элементарной площадке бетона  $A_{bn}$  и деформации в арматуре  $\varepsilon_{sk}$ , на элементарной площадке  $A_{sk}$  в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{en} &= \varepsilon_z - K_y x_{en} - K_x y_{en}; \\ \varepsilon_{sk} &= \varepsilon_z - K_y x_{sk} - K_x y_{sk}.\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

где:  $\varepsilon_z$  - продольные деформации по линии продольной оси Z, принимаемой в качестве координатной;

$K_x$  и  $K_y$  - кривизны продольной оси Z в направлении действия изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ;

$(x_{bn}, y_{bn})$  и  $(x_{sk}, y_{sk})$  - координаты площадок бетона  $A_{bn}$  и стали  $A_{sk}$ ; деформации растяжения приняты со знаком плюс.

Нормальные напряжения в бетоне  $\sigma_{en}$ , на элементарных площадках  $A_{bn}$  и в арматуре  $\sigma_{sk}$  на элементарных площадках  $A_{sk}$  связываются с соответствующими деформациями по формуле

$$\begin{aligned}\sigma_{en} &= E_{en} \nu_{en} \varepsilon_{en}; \\ \sigma_{sk} &= E_{sk} \nu_{sk} \varepsilon_{sk}.\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

где  $\nu_{bn}$ ,  $\nu_{sk}$  - коэффициенты упругопластичности бетона и арматуры на элементарных площадках  $A_{bn}$  и  $A_{sk}$ , определяемые по [338].

Внутренние силы через нормальные напряжения запишутся так:

$$\begin{aligned}N_z &= \sum_n \sigma_{en} A_{en} + \sum_k \sigma_{sk} A_{sk}; \\ M_y &= -\sum_n \sigma_{en} A_{en} x_{en} - \sum_k \sigma_{sk} A_{sk} x_{sk}; \\ M_x &= -\sum_n \sigma_{en} A_{en} y_{en} - \sum_k \sigma_{sk} A_{sk} y_{sk};\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

Подставляя (3.3.1) в (3.3.2) и (3.3.3) и используя матричную форму записи, получим:

$$\{F\} = [C]\{\lambda\},\quad (3.3.4)$$

где:  $\{F\}$  - вектор внутренних сил

$[C]$  - матрица жесткости нормального сечения

$\{\lambda\}$  - вектор деформаций.

При этом:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}; \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_y \\ K_x \end{Bmatrix}\quad (3.3.5)$$

Элементы матрицы жесткости имеют вид:

$$C_{11} = \sum_n E_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k E_{sk} v_{sk} A_{sk} \quad (3.3.6.)$$

- осевая жесткость нормального сечения, зависящая от его геометрических параметров и уровня напряженно-деформированного состояния.

$$C_{12} = C_{21} = -\sum_n E_{en} v_{en} A_{en} x_{en} - \sum_k E_{sk} v_{sk} A_{sk} x_{sk} \quad (3.3.7.)$$

- изгибно-осевая жесткость, выражающая взаимное влияние изгибающего момента  $M_x$  и нормальной силы  $N_z$  и зависящая от геометрических параметров сечения, уровня напряженно-деформированного состояния и выбора положения и направления координатных осей,

$$C_{13} = C_{31} = -\sum_n E_{en} v_{en} A_{en} y_{en} - \sum_k E_{sk} v_{sk} A_{sk} y_{sk} \quad (3.3.8.)$$

- изгибно-осевая жесткость, аналогичная вышеприведенной.

$$C_{22} = \sum_n E_{en} v_{en} A_{en} x_{en}^2 + \sum_k E_{sk} v_{sk} A_{sk} x_{sk}^2 \quad (3.3.9.)$$

- изгибная жесткость (в направлении оси  $x$ ), зависящая от геометрических характеристик сечения, уровня напряженно-деформированного состояния и выбора координатных осей,

$$C_{23} = C_{32} = \sum_n E_{en} v_{en} A_{en} x_{en} y_{en} + \sum_k E_{sk} v_{sk} A_{sk} x_{sk} y_{sk} \quad (3.3.10.)$$

- жесткость сечения, отражающая взаимное влияние изгибающих моментов  $M_x$ , и  $M_y$ .

$$C_{33} = \sum_n E_{en} v_{en} A_{en} y_{en}^2 + \sum_k E_{sk} v_{sk} A_{sk} y_{sk}^2 \quad (3.3.11.)$$

- изгибная жесткость, аналогичная (3.3.9.).

Отметим, что некоторые характеристики жесткости ( $C_{12}=C_{21}$ ,  $C_{13}=C_{31}$ ) в общей записи имеют знак минус при принятом правиле знаков для сил, деформаций и кривизны, однако в действительности они могут быть и положительными или равными нулю; равенство нулю этих характеристик означает, что координатные оси являются центральными; равенство нулю характеристики  $C_{23}=C_{32}$  кроме того свидетельствует о том, что центральные оси являются одновременно и главными,

Из формул для характеристик жесткостей следует, что они зависят от выбора системы координат, однако это не влияет на результаты вычисления параметров напряженно-деформированного состояния.

Положение центра жесткости железобетонного сечения, находящегося в упругопластическом состоянии, определяется координатами (относительно принятых осей, рис.3.1.1) :

$$X_0 = C_{12} / C_{11}; \quad Y_0 = C_{13} / C_{11} \quad (3.3.12.)$$

Координатные оси, проходящие через этот центр жесткостей, и параллельные первоначально принятым исходным координатным осям, будут центральными, но не главными.



Характеристики жесткости относительно центральных (но не главных) осей будут другими, по сравнению с приведенными выше; при этом  $C_{1,2}^y = C_{2,1}^y = 0$ ;  $C_{1,3}^y = C_{3,1}^y = 0$ . Другие характеристики будут равны:

$$\begin{aligned} C_{22}^y &= C_{22} - C_{11} X_0^2; \\ C_{33}^y &= C_{33} - C_{11} Y_0^2; \\ C_{23}^y &= C_{23} - C_{11} X_0 Y_0 \end{aligned} \quad (3.3.13.)$$

Главные центральные оси будут повернуты относительно исходных координатных осей на угол  $\alpha$ , определяемый из соотношения [24]:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2C_{23}^y / (C_{22}^y - C_{33}^y) \quad (3.3.14.)$$

Главные центральные моменты инерции сечения будут равны

$$C_{22}^{zl}, C_{33}^{zl} = 0,5(C_{22}^y + C_{33}^y) \pm \sqrt{0,25(C_{22}^y - C_{33}^y)^2 + (C_{23}^y - C_{11} X_0 Y_0)^2} \quad (3.3.15.)$$

Для главных центральных осей, кроме того., будет иметь место условие

$$C_{2,3}^{zl} = C_{3,2}^{zl} = 0$$

Расчетные положения, развиваемые далее в настоящем исследовании, основываются на характеристиках жесткости, вычисляемых относительно первоначально и произвольно принятых координатных осей,

Рассмотрим теперь более общий закон распределения продольных деформаций в бетоне и арматуре по сечению, а именно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{en} &= \varepsilon_z - K_y x_{en} - K_x y_{en} - K_{xy} x_{en} y_{en}; \\ \varepsilon_{sk} &= \varepsilon_z - K_y x_{sk} - K_x y_{sk} - K_{xy} x_{sk} y_{sk}, \end{aligned} \quad (3.3.16.)$$

где:  $K_{xy}$  - мера депланации сечения (интенсивность депланации  $\zeta_{xy}$  нормальных сечений по длине стержня,  $K_{xy} = d\zeta_{xy} / dz$ ).

Расширение закона распределения деформаций позволяет включить в расчет бимоментное напряженное состояние.

Запишем уравнения равновесия для нормального сечения, используя матричные формы:

$$\{F\} = [C^*] \{\lambda\}, \quad (3.3.17.)$$

здесь:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ B \end{Bmatrix}; [C^*] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14}^* \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24}^* \\ & & 82 & \\ & & & \end{bmatrix}; \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_y \\ K_x \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{C_{31}}{C_{41}^*} \quad \frac{C_{32}}{C_{42}^*} \quad \frac{C_{33}}{C_{43}^*} \quad \frac{C_{34}^*}{C_{44}^*} \quad (3.3.18.)$$

Компоненты вектора сил  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$  имеют тот же смысл, что и в формулах (3.3.3);  $B_z$  - бимомент. Элементы матрицы жесткости  $C_{ij}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3$ ) вычисляются по формулам (3.3.6 – 3.3.11).

Дополнительные элементы матрицы жесткости будут вычисляться по формулам

$$C_{14}^* = C_{41}^* = C_{23} = C_{32}; \quad (3.3.19.)$$

$$C_{24}^* = C_{42}^* = -\sum_n E_{en} \nu_{en} A_{en} x_{en}^2 y_{en} - \sum_k E_{sk} \nu_{sk} A_{sk} x_{sk}^2 y_{sk}; \quad (3.3.20.)$$

$$C_{34}^* = C_{43}^* = -\sum_n E_{en} \nu_{en} A_{en} x_{en} y_{en}^2 - \sum_k E_{sk} \nu_{sk} A_{sk} x_{sk} y_{sk}^2; \quad (3.3.21.)$$

$$C_{44}^* = \sum_n E_{en} \nu_{en} A_{en} x_{en}^2 y_{en}^2 - \sum_k E_{sk} \nu_{sk} A_{sk} x_{sk}^2 y_{sk}^2; \quad (3.3.22.)$$

Дополнительные жесткостные характеристики, по аналогии с терминами В.З.Власова [44] имеют следующий смысл:

$C_{2,4}^*$  и  $C_{3,4}^*$  - секториально-линейные статические моменты,

$C_{44}^*$  - секториальный момент инерции.

Включение бимомента сил  $B_z$  в вектор сил  $\{F\}$  позволяет дать более строгую формулировку требования СНИП и взаимном положении плоскостей действия моментов внешних и внутренних сил в случае косоугольного изгиба.

Это требование, как известно, допускает параллельность этих плоскостей как достаточное условие для удовлетворения равновесия.

Однако это совпадение упомянутых плоскостей может считаться одновременно необходимым и достаточным требованием. Оно осуществляется, если  $B_z=0$

Этому условию будет соответствовать определенное расположение нейтральной линии в пределах сечения, причем эта нейтральная линия будет иметь вид гиперболы, ибо уравнение деформирования (3.3.16.) означает поверхность гиперболического параболоида.

Можно полагать, что эффект депланации поперечного сечения, оцениваемый мерой депланации  $K_{xy}$ , для обычно встречающихся массивных поперечных сечений железобетонных элементов будет незначительным. Вместе с тем можно ожидать заметного эффекта депланации для тонкостенных сечений.

В настоящей работе не рассматривается детально этот вопрос, и приведенные решения могут рассматриваться как принципиальный подход к развитию проблемы.

Рассмотрим теперь сечение, нормальные и касательные напряжения, в котором сводятся к равнодействующим, образуя следующий вектор сил:

$$\{F\} = \{N_z, M_y, M_x, Q_x, Q_y, M_z\}^T \quad (3.3.23.)$$

Вектор сил  $\{F\}$  в форме (3.3.23.) отражает наиболее общее напряженно-деформированное состояние в сечении, и в то же время эта группа сил чаще всего встречается в теории и практике проектирования железобетонных элементов несущих систем многоэтажных зданий.

Соотношение между силами  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$  и соответствующими деформациями примем на основании предыдущих формул (3.3.5). Соотношения между поперечными силами  $Q_x$  и  $Q_y$ , а также крутящим моментом  $M_z$  и соответствующими им деформациями примем на основе "упругих" зависимостей, учитывая, что в несущих стержневых системах многоэтажных зданий распределение внутренних сил, определяется, прежде всего, изгибными деформациями, в меньшей мере осевыми и еще в меньшей степени - сдвигающими.

Поэтому в большинстве случаев статически неопределимые упругие стержневые системы рассчитываются без учета влияния сдвигающих деформаций.

**В свете этого обстоятельства приближенный учет влияния сдвигающих деформаций на распределение внутренних сил в статически неопределимых железобетонных системах не должен сколько-либо заметно отразиться на точности решения.**

Однако при этом расчеты прочности сечений на действие поперечных сил и крутящих моментов, если эти расчеты являются определяющими параметрами сечений, должны производиться на найденные из статического расчета силы по специальным методикам, здесь не рассматриваемым; иначе говоря, в развиваемых здесь расчетах предполагается обеспеченной прочностью сечений на действие поперечных сил и крутящих моментов.

Поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , соответствующие им усредненные по сечению деформации сдвига  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  связываются на основании "упругих" соотношений.

Поперечные силы на соответствующих элементарных площадках бетона  $A_{bn}$  и арматуры  $A_{sk}$  (см. дискретную расчетную модель поперечного сечения, рис.3.1.1.) записываются так:

$$\begin{aligned}
Q_{en}^x &= \gamma_x G_{en} v_{en} A_{en} / x_x; \\
Q_{sk}^x &= \gamma_x G_{sk} v_{sk} A_{sk} / x_x; \\
Q_{en}^y &= \gamma_y G_{en} v_{en} A_{en} / x_y; \\
Q_{sk}^y &= \gamma_y G_{sk} v_{sk} A_{sk} / x_y,
\end{aligned}
\tag{3.3.24.}$$

где:  $-G_{en} \cong 0,4E_{en}$  - начальный модуль сдвига для бетона на площадке  $A_{en}$  ;  
 $G_{sk} = 0,4E_{sk}$  - то же, для арматуры на площадке  $A_{sk}$  ;

$x_x$  и  $x_y$  - коэффициенты сдвига, по соответствующим направлениям.

Равнодействующие поперечных сил на соответствующих направлениях можно записать

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\gamma_x}{x_x} (\sum_n G_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k G_{sk} v_{sk} A_{sk}); \\
Q_y &= \gamma_y / x_y (\sum_n G_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k G_{sk} v_{sk} A_{sk})
\end{aligned}
\tag{3.3.25.}$$

Формулы (3.3.25.) при  $v_{en} = v_{sk} = 1$ ,  $A_{sk} = 0$  превращаются в известные выражения из теории упругих стержней.

При развитии пластических деформаций, т.е.  $v_{en} \rightarrow 0$ ,  $v_{sk} \rightarrow 0$ , поперечные силы снижаются. Следовательно, формулы (3.3.25.) отвечают необходимым граничным условиям.

Соотношение между крутящим моментом  $M_z$  интенсивностью угла закручивания  $K_z$  и упруго-геометрическими характеристиками примем на основании "упругого" состояния

$$M_z = J_z K_z (\sum_n G_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k G_{sk} v_{sk} A_{sk}) / (\sum_n A_{en} + \sum_k A_{sk})
\tag{3.3.26.}$$

Эта формула для упругого состояния, т.е. при  $v_{en} = v_{sk} = 1$ ,  $A_{sk} = 0$  дает известную формулу для упругих стержней из однородного материала; при  $v_{en} \rightarrow 0$ ,  $v_{sk} \rightarrow 0$  сопротивление кручению снижается. Таким образом формула (3.3.26.) отвечает предельным случаям.

В формулах (3.3.25.) и (3.3.26.) деформации в бетоне и арматуре определяются действием продольной силы  $N_z$  и изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_x$  .

Собирая вместе формулы (3.3.5.), (3.3.25.) и (3.3.26.), получим, используя матричную форму записи,

$$\{F\} = [C] * \{\lambda\}
\tag{3.3.27.}$$

или

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ Q_x \\ Q_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_y \\ K_x \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ K_z \end{Bmatrix} \quad (3.3.28.)$$

Здесь  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots, C_{33}$  - элементы матрицы жесткости, вычисляемые по формулам (3.3.6-3.3.11.);

$$C_{44} = (\sum_n G_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k G_{sk} v_{sk} A_{sk}) / x_x \quad (3.3.29.)$$

- жесткость на сдвиг в направлении оси X;

$$C_{55} = (\sum_n G_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k G_{sk} v_{sk} A_{sk}) / x_y \quad (3.3.30.)$$

- жесткость на сдвиг в направлении оси Y;

$$C_{66} = J_z (\sum_n G_{en} v_{en} A_{en} + \sum_k G_{sk} v_{sk} A_{sk}) / (\sum_w A_{en} + \sum_k A_{sk}) \quad (3.3.31.)$$

- жесткость при кручении.

При необходимости в формулу (3.3.28.) можно дополнить составляющим бимоментного напряженного состояния, используя (3.3.18).

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ Q_x \\ Q_y \\ M_z \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & & C_{33} \\ & & & C_{44} & & & \\ & & & & C_{55} & & \\ & & & & & C_{66} & \\ C_{71}^* & C_{72}^* & C_{73}^* & & & & C_{77}^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_y \\ K_x \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ K_z \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.32.)$$

В формуле (3.3.32.)

$$C_{17} = C_{14}$$

$$C_{27} = C_{24}$$

$$C_{37} = C_{34}$$

$C_{77} = C_{44}$  при этом правые части равенств принимаются по формулам (3.3.19-3.3.22.)

### 3.4. Деформации и прочность по нормальным сечениям железобетонных элементов при заданных силах

Будем рассматривать нормальные сечения, к которым приложена совокупность сил  $\{F\} = \{N_z \quad M_y \quad M_x\}^T$ , причем величины  $N_z$ ,  $M_x$  и  $M_y$  предполагаются действующими как в статически определимой системе, т.е. они не зависят от характеристик жесткости нормальных сечений.

Задачи по определению деформаций, трещиностойкости и прочности решаются на основе системы уравнений равновесия (3.3.4.).

Принципиальная особенность этих уравнений равновесия состоит в их нелинейности, т.е. элементы матрицы жесткости  $[C]$  содержат элементы  $V_{en}$  и  $V_{sk}$ , определяемые по диаграммам „ $\sigma - \varepsilon$ “ для бетона и арматуры при известных значениях деформаций  $\varepsilon_{en}$  и  $\varepsilon_{sk}$ , которые в свою очередь зависят на основе уравнений (3.3.1.) от деформаций  $\varepsilon_z$ ,  $K_x$  и  $K_y$ , являющихся в матричном уравнении (3.3.4.) его корнями.

Вследствие этого задачи по расчету деформаций, трещиностойкости и прочности по нормальным сечениям решаются итерационным методом.

Вектор сил принимается в зависимости от конкретной ситуации по таблице 3.4.1.

Из этой таблицы видно, что в некоторых частных случаях число разрешающих уравнений может быть сокращено до числа элементов вектора деформаций, не равных нулю.

Однако это упрощение не имеет существенного значения при непрерывном использовании ЭВМ.

В этой же таблице  $N_q$ ,  $M_{xq}$  и  $M_{yq}$  - элементы вектора сил от внешней нагрузки.

Итерационные расчеты могут быть основаны на методе начальных, касательных или секущих модулей деформации, принимаемых по диаграммам „ $\sigma - \varepsilon$ “ согласно [338]. Соответственно этому, жесткостные характеристики сечения, т.е. элементы матрицы жесткости  $[C]$  будут начальными, касательными или секущими (в изложенном здесь варианте эти жесткостные элементы являются секущими).

На рис 3.4.1 графически представлены эти методы.

При этом итерационные процессы можно производить для случая однократного приложения полной или длительно действующей нагрузки или прикладывать ее этапами (долями). В исследовательских или отладочных расчетах загрузка внешней нагрузкой обычно осуществляется поэтапное (метод приращение нагрузок) так как это принято в физических экспериментах.

Таблица 3.4.1.

Структура вектора внешних сил  $\{F\}$

№	Схема нагружения	Вектор внешних сил	<b>Вектор деформаций</b>
---	------------------	--------------------	--------------------------

1	2	3	Симметричное сечение 4	Несимметричное сечение 5
1	Прямой изгиб в направлении оси X	$N_z = 0$	$\varepsilon_z \neq 0$	$\varepsilon_z \neq 0$
		$M_y = \pm M_{y,q}$	$K_y \neq 0$	$K_y \neq 0$
		$M_x = 0$	$K_x = 0$	$K_x \neq 0$
2	Прямой изгиб в направлении оси Y	$N_z = 0$	$\varepsilon_z \neq 0$	$\varepsilon_z \neq 0$
		$M_y = 0$	$K_y = 0$	$K_y \neq 0$
		$M_x = \pm M_{x,q}$	$K_x \neq 0$	$K_x \neq 0$
3	Внецентренное сжатие (растяжение) с эксцентриситетом $e_x$ по оси X	$N_z = \mp N_q$	$\varepsilon_z \neq 0$	$\varepsilon_z \neq 0$
		$M_y = \pm N_q e_x$	$K_y \neq 0$	$K_y \neq 0$
		$M_x = 0$	$K_x = 0$	$K_x \neq 0$
4	Внецентренное сжатие *(растяжение) с эксцентриситетом $e_y$ по оси Y	$N_z = \mp N_q$	$\varepsilon_z \neq 0$	$\varepsilon_z \neq 0$
		$M_y = 0$	$K_y = 0$	$K_y \neq 0$
		$M_x = \pm N_q e_y$	$K_x \neq 0$	$K_x \neq 0$
5	Центральное сжатие (растяжение)	$N_z = \mp N_q$	$\varepsilon_z \neq 0$	$\varepsilon_z \neq 0$
		$M_y = 0$	$K_y = 0$	$K_y \neq 0$
		$M_x = 0$	$K_x = 0$	$K_x \neq 0$
6	Косое внецентренное сжатие (растяжение) с эксцентриситетами $e_x$ и $e_y$ и косым изгибом (общий случай)	$N_z = \mp N_q$	$\varepsilon_z \neq 0$	$\varepsilon_z \neq 0$
		$M_y = \pm M_{y,q} \pm N_q e_x$	$K_y \neq 0$	$K_y \neq 0$
		$M_x = \pm M_{x,q} \pm N_q e_y$	$K_x \neq 0$	$K_x \neq 0$

В проектной практике внешняя нагрузка принимается полной либо учитывается ее длительно действующая часть, и на их воздействия выполняются соответствующие проверки; рис. 3.4.1. иллюстрирует загрузку сечений полной внешней нагрузкой в статически определимой системе, сплошными линиями изображено загрузку с обеспеченной несущей способностью, штрихованными - нагрузка превышает несущую способность сечения.

При выборе итерационного метода следует учитывать скорость сходимости процесса, и вместе с тем необходимо установить его характеристики: а именно требуемую точность расчета (допустимую погрешность)  $\omega$  и количества итераций  $i$ , за которое установленная точность достигается.

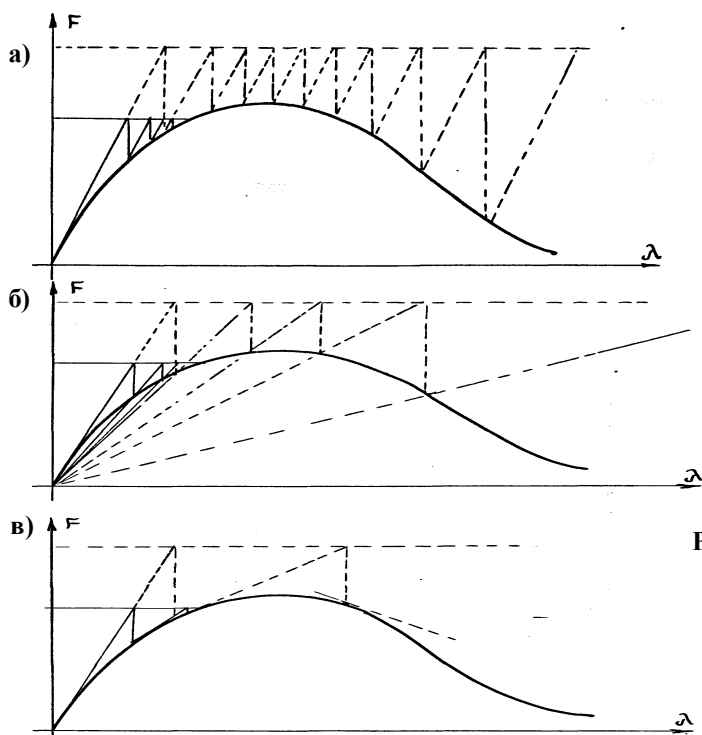


Рис. 3.4.1.Схемы итерационных процессов;  
 а) метод начальных модулей,  
 б) метод секущих модулей,  
 в) метод касательных модулей

Метод начальных жесткостей (метод упругих решений) дает медленно сходящийся процесс (рис.3.4.1,а), однако при этом матрица жесткости сохраняется неизменной, а корректируется вектор внешних сил [176].

В процессе итераций приходится многократно решать системы уравнений относительно приращений вектора деформаций  $\Delta\lambda_i$  в функции приращений вектора сил  $\Delta F_i$  (рис. 3.4.1, а).

Наиболее быстро итерационный процесс сходится в методе касательных модулей деформаций (рис.3.4.1,б), однако при этом на каждой итерации корректируется и матрица жесткости, вектор сил; в процессе итераций многократно решается система уравнений относительно приращений вектора деформаций  $\Delta\lambda_i$ , как функций приращений вектора сил  $\Delta F_i$  с одновременным изменением элементов матрицы жесткости [213].

Метод секущих модулей деформаций уступает по скорости сходимости методу касательных модулей (рис.3.4.1,в), но превосходит в этом отношении метод начальных модулей деформаций [29].

В этом методе матрица жесткости в процессе итераций корректируется, но вектор нагрузок может приниматься постоянным.

О сходимости итерационных процессов можно судить по разным признакам. В настоящем исследовании условием сходимости итерационных процессов, основанных на методе секущих модулей деформаций, принято условие

$$(\lambda_{i+1} - \lambda_i) / (\lambda_{i+1} + \lambda_i) \leq |\omega| \quad (3.4.1.)$$

где:  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$  - элементы вектора деформаций на смежных „i“ – й и „(i+1)“ – й итерациях,  $\omega$  - некоторое малое число (точность расчета).



Условие (3.4.1) означает, что в процессе итерационного процесса, по мере уменьшения секущих жесткостей, элементы вектора деформаций растут, постепенно стабилизируясь (затухая), если напряженно-деформированное состояние достигает некоторого устойчивого положения, что может иметь место при обеспеченной несущей способности сечения или целой совокупности сечений.

В условии (3.4.1.) могут включаться все элементы вектора деформаций или только часть из них.

В отладочных расчетах, как правило, проверяется более общее условие:

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\varepsilon_{z,i+1} - \varepsilon_{z,i}}{\varepsilon_{z,i+1} + \varepsilon_{z,i}} \right)^2 + \left( \frac{K_{x,i+1} - K_{x,i}}{K_{x,i+1} + K_{x,i}} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{K_{y,i+1} - K_{y,i}}{K_{y,i+1} + K_{y,i}} \right)^2 / 3 \right)^{0,5} \leq \omega, \end{aligned} \quad (3.4.2.)$$

означающее относительное среднее квадратическое отклонение всех элементов вектора деформаций на двух смежных итерациях.

Отметим, что в обоих условиях знаменатели принимались в виде суммы двух смежных значений; это сделано во избежание неопределённостей при делении на нуль, когда один из элементов вектора деформаций, изменяясь в процессе итераций, может оказаться равным нулю. Например, деформация продольной оси  $\varepsilon_z$ , может изменить знак в процессе перехода сечения из упругого в упругопластическое состояние.

На рис.3.4.1 показаны состояния для сходящихся и расходящихся итерационных процессов соответственно при обеспеченной и необеспеченной несущей способности (сплошные и штриховые линии); для сходящихся процессов элементы вектора деформаций стремятся к некоторым конечным значениям, при расходящихся процессах, начиная с некоторого момента итерации, элементы вектора деформаций начинают неограниченно возрастать.

При выборе параметров итерационных процессов (точности и максимального числа итераций  $\omega, i$ ) следует исходить из физических основ решаемой задачи.

При недостаточной точности (большом значении  $\omega$ ) можно получить сходящийся процесс, хотя в действительности сечение не обладает несущей способностью; при чрезмерно высокой точности (малом значении  $\omega$ ) время счета может оказаться неприемлемо большим.

Многочисленные расчеты прочности по нормальным сечениям и сопоставления результатов расчета с опытными данными (по деформациям в арматуре и бетоне, прочности) позволили выбрать оптимальные параметры итерационного процесса, а именно  $\omega = 0,001$  при ограничении числа итераций  $i=30$ .

Следует обратить внимание на выявленный в процессе исследований эффект "ложной сходимости". Эффект "ложной сходимости" итерационных процессов состоит в том, что при переходе через вершину диаграммы „ $F - \lambda$ “ приращения в векторе  $\lambda$  затухают. Это видно на рис.3.4.1 затухание имеет относительный и временный характер, но если в итерационном

процессе приняты малочувствительные параметры (большая величина  $\omega$  и малое число итераций), то процесс может оказаться сходящимся, хотя это не так.

Поскольку в исходных уравнениях (3.3.4.) при заданных в нормальном сечении силах неизвестными являются деформации, начнем с их отыскания.

Уравнение (3.3.4.) относительно  $\varepsilon_z$ ,  $K_x$ , и  $K_y$  решаются по следующему алгоритму:

- при заданных параметрах нормального сечения (размерах и армировании), выполняется его разбивка на элементарные площадки  $A_{bn}$  и  $A_{sk}$  вычисляются их координаты и площади;

- для исходного (ненагруженного состояния, т.е. при  $v_{en} = v_{sk} = 1$  по формулам 3.3.6 -3.3.11) вычисляются элементы матрицы жесткости  $[C]$ ;

- по стандартным программам решается система уравнений (3.3.4.) относительно элементов вектора деформаций  $\varepsilon_z$ ,  $K_x$ , и  $K_y$ ;

- по формулам (3.3.1. ) вычисляются продольные деформации в бетоне  $\varepsilon_{en}$  и арматуре  $\varepsilon_{sk}$  на всех элементарных площадках бетона  $A_{bn}$  и  $A_{sk}$ ;

- на основе диаграмм „ $\sigma - \varepsilon$ “ для бетона и арматуры, согласно [338], по найденным деформациям  $\varepsilon_{en}$  и  $\varepsilon_{sk}$  вычисляются коэффициенты  $v_{en}$  и  $v_{sk}$ ;

- при найденных коэффициентах  $v_{en}$  и  $v_{sk}$  по формулам (3.3.6.-3.3.11.) вновь вычисляются элементы матрицы жесткости;

- решение повторяется с одновременной проверкой условия сходимости итерационного процесса по достижению требуемой точности или исчерпания заданного числа итераций.

По окончании итерационного счета или в его процессе на печать выводятся все интересующие сведения: деформации продольной координатной оси ( $\varepsilon_z$ ,  $K_x$ , и  $K_y$ ), продольные деформации бетона  $\varepsilon_{en}$  элементарных площадках  $A_{bn}$  и арматуры на элементарных площадках  $A_{sk}$ , напряжения в бетоне  $\sigma_{en}$  и арматуре  $\sigma_{sk}$ .

Перейдем к задачам расчета прочности по нормальным сечениям.

Будем различать задачи двух типов.

В задаче первого типа считаются известными: геометрические параметры нормального железобетонного сечения, физико-механические характеристики бетона и арматуры в виде диаграмм „ $\sigma - \varepsilon$ “ а также схема приложения и значения элементов вектора внешних сил.

Требуется установить, воспринимается ли принятым железобетонным сечением заданная совокупность сил.

Решение итерационного процесса по вышеизложенному алгоритму с проверкой условия (3.4.2.).

Если итерационный процесс сходится, то прочность по нормальному сечению обеспечена; если процесс не сходится - несущая способность недостаточна.

В задаче второго типа считаются известными: геометрические параметры нормального железобетонного сечения и физико-механические характеристики материалов в виде диаграмм „ $\sigma - \varepsilon$ “; требуется найти такой вектор сил  $\{F\}^*$ , который способен воспринять заданное сечение.

Задача второго типа сводится к поиску такого вектора сил  $\{F\}^*$ , при котором перестает удовлетворяться условие (3.4.2) внешних нагрузок, то есть в процессе организации итерации, необходимо использовать метод приращения.

При поиске вектора  $\{F\}^*$ , изменять значения ( $N_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ) пропорционально одному параметру, либо задаваться переменным соотношением элементов вектора.

Для ускорения поиска  $\{F\}^*$  использован принцип среднего арифметического, сущность его состоит в следующем.

Вначале определяется интервал поиска  $\{F\}^*$  между двумя значениями  $\{F\}_{\min} < \{F\}^* < \{F\}_{\max}$ , причем  $\{F\}_{\min}$  заведомо воспринимается сечением,  $\{F\}_{\max}$  вызывает разрушение. Следует стремиться к тому, чтобы интервал поиска был по возможности малым; этот интервал может быть определен из приближенных расчетов или заложен в программу, как это сделано в программе "СЕЧЕНИЕ". С этой целью сечение нагружается возрастающими ступенями в долях предполагаемого вектора  $\{F\}^*$ , последняя из достигнутых ступеней нагрузок, воспринимаемая сечением, считается нижней границей интервала  $\{F\}_{\min}$ , следующая ступень - верхней границей  $\{F\}_{\max}$ .

Следующая проверка несущей способности сечения осуществляется на действие вектора нагрузок  $\{F\}_1^* = (\{F\}_{\min} + \{F\}_{\max})/2$ . Если при  $\{F\}_1^*$  несущая способность по условию (3.4.2.) обеспечивается, проверка ведется на действие вектора  $\{F\}_2^* = (\{F\}_1^* + \{F\}_{\max})/2$ ; если вектор  $\{F\}_1^*$  не воспринимается сечением, проверка ведется на действие вектора  $\{F\}_2^* = (\{F\}_1^* + \{F\}_{\max})/2$ .

Поиск заканчивается на  $i$ -й итерации при достижении требуемой точности, устанавливаемой условием.

$$(\{F\}_{i+1}^* - \{F\}_i^*) / \{F\}_i^* \leq \Omega, \quad (3.4.3.)$$

где:  $\{F\}_i^*$  - наименьший достигнутый на  $i$ -й итерации из всех проверяемых векторов нагрузок, воспринимаемый сечением; меньший из векторов  $\{F\}_i^*$  или  $\{F\}_{i+1}^*$  принимается за несущую способность сечения.

Многочисленные расчеты прочности нормальных сечений различной формы, армирования, подвергаемых воздействиям по табл. 3.4.1. позволили установить, что поиск вектора нагрузки  $\{F\}^*$  следует вести с точностью до

$\Omega=0.01$ , которая достигается за 5-7 приближений интервал поиска следует назначать примерно равным 1/10 от ожидаемого разрушающего вектора  $\{F\}^*$ .

Остановимся на одном положении СНиП 2.03.01-84\* применительно к расчету прочности по нормальным сечениям (общий случай).

В общем случае расчета, как известно, несущая способность определяется из условия равновесия моментов внешних и внутренних сил, записанных относительно оси, проходящей через центр сечения наиболее растянутой арматуры и параллельной прямой, ограничивающей сжатую зону.

Положение границы сжатой зоны находится из условия, что при косом изгибе плоскости действия моментов внешних и внутренних сил должны быть параллельны; при косом внецентренном сжатии точки приложения продольной силы равнодействующей сжимающих усилий в бетоне и арматуре и равнодействующей усилий в растянутой арматуре должны лежать на одной прямой.

Следует заметить, что для косоуго изгиба требование о параллельности плоскостей моментов внешних и внутренних сил является необходимым, но недостаточным. Оно может считаться и необходимым и одновременно достаточным для массивных сечений (прямоугольных, тавровых и т.д.), но для тонкостенных сечений несовпадение плоскостей этих моментов может привести к бимоментному напряженно-деформированному состоянию. В этом случае строгое решение может быть получено на основе уравнений (3.3.32.).

Необходимые требования о соответствующем положении моментных осей удовлетворяются методом последовательных приближений, однако, этот процесс плохо поддается алгоритмизации, т.к. он не имеет четкого математического описания [326].

Покажем, что в развиваемой здесь расчетной методике упомянутые требования соблюдаются, хотя они не записаны в явном виде.

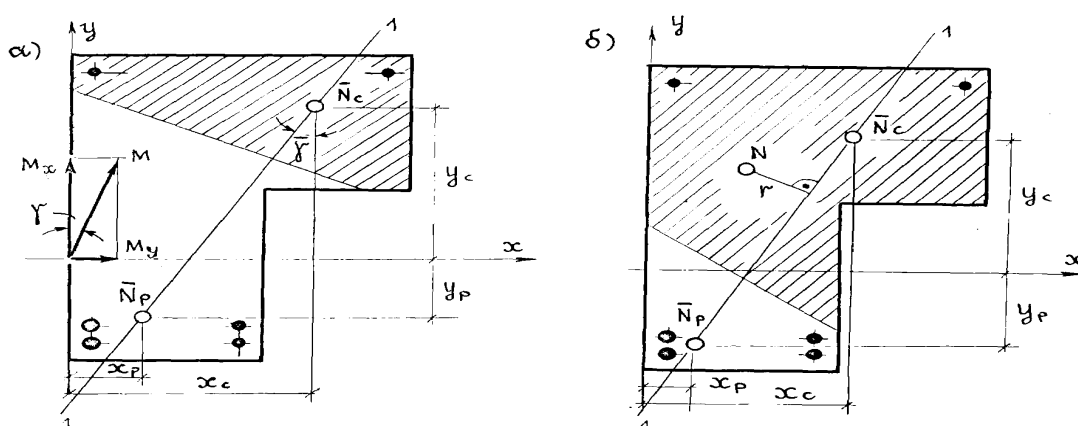


Рис. 3.4.2. К определению положения плоскости действия моментов внешних сил и внутренних сил; а) при косом изгибе, б) при внецентренном сжатии.

Так, при косом изгибе (рис.3.4.2,а) вектор полный внешнего момента сил  $M$  согласно излагаемой здесь методике раскладывается на две составляющие  $M_x$  и  $M_y$ ; начало координат и направление осей приняты произвольными.

Плоскость действия момента внешних сил по отношению к принятым координатным осям ориентирована по условию  $M_y / M_x = tg\gamma$

Перейдем к вычислению момента внутренних сил.

Допустим, что в результате расчета найдены величины и положения равнодействующих сжимающих и растягивающих сил  $\bar{N}_c$  и  $\bar{N}_p$  (в развиваемом здесь расчете эта задача не решается, но при необходимости это можно сделать).

Запишем величины моментов внутренних сил

$$\begin{aligned} \bar{M}_y &= \bar{N}_c * x_c - \bar{N}_p x_p; \\ \bar{M}_x &= \bar{N}_c * y_c - \bar{N}_p y_p, \end{aligned} \quad (3.4.4.)$$

при этом, как известно, при изгибе  $\bar{N}_p = \bar{N}_c$ .

Разделив почленно (3.4.4.), найдем  $\bar{M}_y / \bar{M}_x = (x_c - x_p) / (y_c + y_p) = tg\bar{\gamma}$ ;

но поскольку из условий равновесия  $M_x = \bar{M}_x$ ,  $M_y = \bar{M}_y$ , то и  $tg\gamma = tg\bar{\gamma}$ .

Следовательно, условие параллельности плоскостей действия моментов внешних и внутренних сил соблюдаются, как это требуется [326].

Рассмотрим теперь косое внецентренное сжатие (рис.3.4.2,б).

Для этого случая следует доказать, что точка приложения внешней силы N лежит на линии 1-1, соединяющей точки приложения внутренних сжимающей  $\bar{N}_c$  и растягивающей силы  $\bar{N}_p$ ; надо доказать, что  $r=0$ .

Пусть положение сил  $\bar{N}_c$  и  $\bar{N}_p$  известно; тогда уравнение моментов внешних и внутренних сил можно записать относительно оси 1-1:

$$N * r = M - \bar{M} \quad (3.4.5.)$$

Полные моменты можно записать через их составляющие.

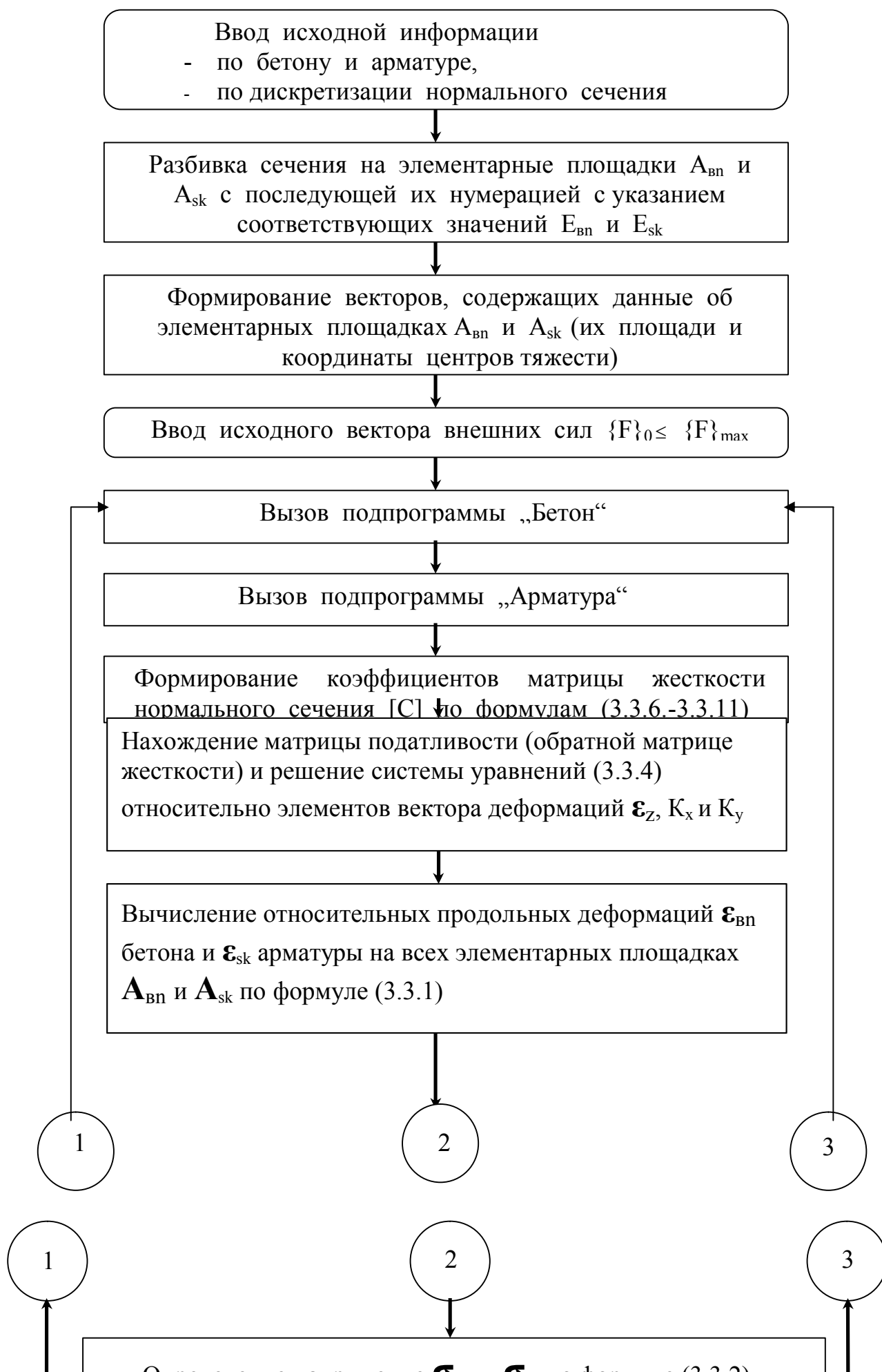
$$M = (M_x^2 + M_y^2)^{0,5}, \quad \bar{M} = (\bar{M}_x^2 + \bar{M}_y^2)^{0,5}$$

Так как по условиям равновесия  $M_x = \bar{M}_x$ ,  $M_y = \bar{M}_y$ , то тогда из (3.4.5)  $r=0$ , что и требовалось доказать.

Отметим еще раз, что развиваемая здесь расчетная методика в явном виде не оперирует нейтральной осью, однако при необходимости (как это будет показано в примерах) на печать выводятся деформации во всех элементарных площадках  $A_{en}$  и  $A_{sk}$ , по ним можно нетрудно найти границу между зоной сжатия и растяжения (если она проходит в пределах сечения). При этом, естественно, нейтральная линия будет ступенчатой, ее с использованием интерполяции можно заменить прямой.

Программа для ЭВМ, блок-схема которой дана на рис.3.4.3 позволяет вести поиск вектора сил  $\{F\}^*$ , вызывающего разрушение; примеры расчетов прочности в нормальных сечениях по программе приводятся ниже.

## Блок -схема программы " ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЕ СЕЧЕНИЕ"



### **3.5. Метод сосредоточенных деформаций для расчета прочности и перемещений статически неопределимых**

## стержней с учетом деформированной расчетной схемы

В статически неопределимых системах внутренние силы являются неизвестными, их распределение в сечениях зависит от соотношения жесткостей в тех же сечениях, а при расчете по деформированной схеме кроме того и от перемещений.

Поэтому для статически неопределимых систем использование соотношений между силами и деформациями в форме (3.3.3.) невозможно, ибо внутренние силы  $\{F\}$  неизвестны.

Статически неопределимый железобетонный стержень, сечения которого испытывают напряженное состояние, описываемое в общем вектором внутренних сил в наиболее общей их совокупности по формуле (3.3.32.), решается по методу сосредоточенных деформаций.

Заметим, что статически определимый стержень тоже может решаться по методу сосредоточенных деформаций.

Поскольку по методу сосредоточенных деформаций число искомых перемещений равно  $m \cdot n$ , (где  $m$  - число степеней свободы элемента МСД,  $n$  - число элементов МСД), то между статически неопределимыми и статически определимыми системами нет внешнего различия, трудоемкость их расчета является практически одинаковой, различие состоит лишь в разной формулировке условий закреплений элементов МСД на опорах.

Расчетную модель (рис.3.5.1.) разобьем, добавив связи, препятствующие депланации сечений.

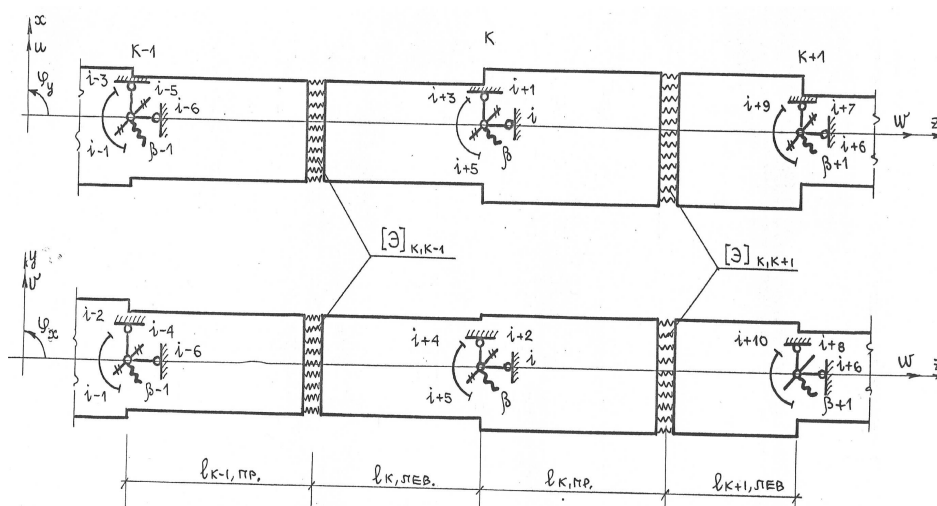


Рис. 3.5.1. Расчетная модель метода сосредоточенных деформаций для стержня при произвольной схеме загрузки; а) в осях  $X_0Z$ , б) в осях  $Y_0Z$ .

Внутренние силы в форме (3.3.32.) представлены на рис.3.5.2. Матрица коэффициентов уравнений равновесия  $k$ -го элемента МСД будет дополнена составляющими бимоента сил  $B_{k-1,k} = B_{k,k-1}$ , и  $B_{k,k+1} = B_{k+1,k}$  (см. табл.3.5.1).



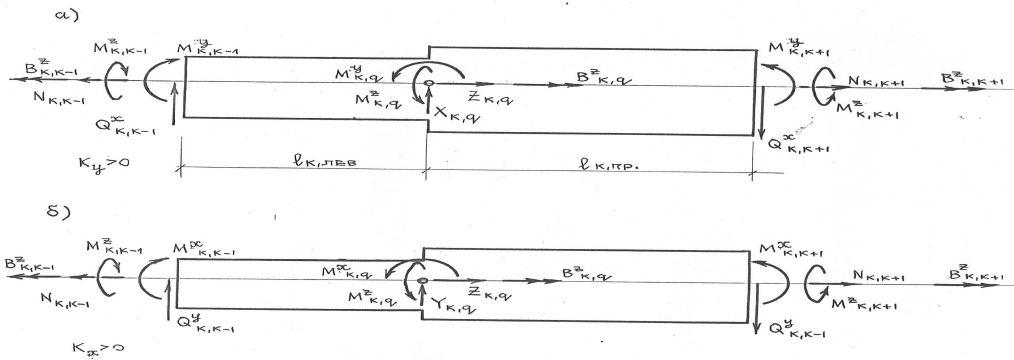


Рис. 3.5.2. Внутренние силы для стержня при произвольной схеме нагружения: а - в осях  $X_0Z$ , б - в осях  $Y_0Z$ .

Нумерацию связей метода перемещений и внутренних сил по плоскостям сосредоточенных деформаций примем согласно табл.3.5.1.

Составим матрицу коэффициентов уравнений равновесия  $A_k$  для типового  $k$ -го элемента (табл.3.5.1.), и матрицу табл.3.5.2 внутренней жесткости  $[K]_k$  - того же типового элемента

Для построения элементов матрицы внешней жесткости  $k$ -го элемента МСД используем формулу:

$$[R]_k = [A]_k [K]_k [A]_k^T$$

Матрица  $[K]_k$  внутренней жесткости связывает вектор внутренних сил  $\{F\}$  и вектор взаимных смещений (сосредоточенных смещений), например, по плоскости сосредоточенных деформаций между „  $k$  “-м и „  $(k+1)$  “-м элементом в следующей форме:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ Q_x \\ Q_y \\ M_z \\ B_z \end{Bmatrix}_{k,k+1} = l_{k,k+1}^{-1} * \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & & C_{17}^* \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & & C_{27}^* \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & & C_{37}^* \\ & & & C_{44} & & & \\ & & & & C_{55} & & \\ & & & & & C_{66} & \\ C_{71}^* & C_{72}^* & C_{73}^* & & & & C_{77}^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_y \\ K_x \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ K_z \\ K_{xy} \end{Bmatrix}_{k,k+1}$$

или 
$$\{F\}_{k,k+1} = [K]_{k,k+1} * \{\Delta v\}_{k,k+1} \quad (3.5.2.)$$

где:  $l_{k,k+1}$  - расстояние между узлами закрепления „  $k$  “-го и „  $(k+1)$  “-го элементов МСД;  $C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{7,7}$  - элементы матрицы жесткости сечения по плоскости сосредоточенных деформаций между

„ $k$ “-м и „ $(k+1)$ “-м элементами;

$$\{\Delta v\}_{k,k+1} = \{\Delta \omega, \Delta \varphi_x, \Delta U, \Delta v, \Delta \varphi_z, \Delta \zeta\}_{k,k+1}^T$$

- вектор взаимных перемещений соседних „ $k$ “-го и „ $(k+1)$ “-го элементов; при этом

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= \omega_{k+1} - \omega_k; \\ \Delta \varphi_y &= \varphi_{k+1}^y - \varphi_k^y; \\ \Delta \varphi_x &= \varphi_{k+1}^x - \varphi_k^x; \\ \Delta u &= -u_{k+1} + \varphi_{k+1}^y * l_{k+1,лев} + u_k + \varphi_k^y * l_{k,пр}; \\ \Delta v &= -v_{k+1} + \varphi_{k+1}^x * l_{k+1,лев} + v_k + \varphi_k^x * l_{k,пр}; \\ \Delta \varphi_z &= \varphi_{k+1}^z - \varphi_k^z; \\ \Delta \zeta &= \zeta_{k+1} - \zeta_k. \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta_{k+1}$ , и  $\zeta_k$  - депланации в „ $(k+1)$ “-м и „ $k$ “-ом сечениях.

Взаимные смещения (сосредоточенные смещения)  $\{\Delta v\}$  связываются с деформациями  $\{\lambda\}_{k,k+1}$ , как это видно из формулы общими соотношениями

$$\{\Delta v\}_{k,k+1} = l_{k,k+1} * \{\lambda\}_{k,k+1} \quad (3.5.3.)$$

В формуле (3.5.3.) предполагается, что соответствующие деформации  $\{\lambda\}_{k,k+1}$  на участке длиной  $l_{k,k+1}$  имеют постоянную интенсивность.

Для сечений между „ $k$ “-м и „ $(k-1)$ “-м элементом МСД принимаются соотношения по формуле (3.5.2.), т.е.

$$\{F\}_{k,k-1} = [K]_{k,k-1} * \{\Delta v\}_{k,k-1} \quad (3.5.4.)$$

Матрица внутренней жесткости „ $k$ “-го элемента  $[K]_k$  будет иметь вид

$$[K]_k = \left[ \begin{array}{c|c} [K]_{k,k-1} & \\ \hline & [K]_{k,k+1} \end{array} \right] \quad (3.5.5.)$$

блочные элементы ее принимаются на основании предыдущих формул.

Таблица 3.5.1.

Матрица равновесия для стержня при произвольной схеме нагружения [A]<sub>k</sub>

Элементы МСД	Уравнения равновесия	Связи между перемещен	№	Коэффициенты при внутренних силах													
				$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^z$	$B_{k,k-1}^z$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^z$	$B_{k,k+1}^z$
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
κ-1	$\Sigma Z_{k-1}$	$i-6$	1	1													
	$\Sigma M_{k-1}^y$	$i-5$	2		1		$-l_{k-1,np.}$										
	$\Sigma M_{k-1}^x$	$i-4$	3			1		$-l_{k-1,np.}$									
	$\Sigma x_{k-1}$	$i-3$	4				-1										
	$\Sigma y_{k-1}$	$i-2$	5					-1									
	$\Sigma M_{k-1}^z$	$i-1$	6						1								
	$\Sigma B_{k-1}^z$	$\beta-1$	7							1							
κ	$\Sigma Z_k$	$i$	8	-1							1						
	$\Sigma M_k^y$	$i+1$	9		-1		$-l_{k,лев.}$				1		$-l_{k,np.}$				
	$\Sigma M_k^x$	$i+2$	10			-1		$-l_{k,лев.}$				1		$-l_{k,np.}$			
	$\Sigma x_k$	$i+3$	11				1						-1				
	$\Sigma y_k$	$i+4$	12					1						-1			
	$\Sigma M_k^z$	$i+5$	13						-1						1		
	$\Sigma B_k^z$	$\beta$	14							-1						1	
κ+1	$\Sigma Z_{k+1}$	$i+6$	15								-1						
	$\Sigma M_{k+1}^y$	$i+7$	16									-1		$-l_{k+1,лев.}$			
	$\Sigma M_{k+1}^x$	$i+8$	17										-1		$-l_{k+1,лев.}$		
	$\Sigma x_{k+1}$	$i+9$	18											1			
	$\Sigma y_{k+1}$	$i+10$	19												1		
	$\Sigma M_{k+1}^z$	$i+11$	20													-1	
	$\Sigma B_{k+1}^z$	$\beta+1$	21														-1

Таблица 3.5.2.

Матрица внутренней жесткости для стержня при произвольной схеме нагружения  $[K]_k$

№	к-1							к+1						
	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^x$	$Q_{k,k-1}^y$	$M_{k,k-1}^z$	$B_{k,k-1}^z$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^x$	$Q_{k,k+1}^y$	$M_{k,k+1}^z$	$B_{k,k+1}^z$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	$C_{1,1}^{k,k-1}$	$C_{1,2}^{k,k-1}$	$C_{1,3}^{k,k-1}$				$C_{1,7}^{k,k-1}$							
2	$C_{2,1}^{k,k-1}$	$C_{2,2}^{k,k-1}$	$C_{2,3}^{k,k-1}$											
3	$C_{3,1}^{k,k-1}$	$C_{3,2}^{k,k-1}$	$C_{3,3}^{k,k-1}$											
4				$C_{4,4}^{k,k-1}$										
5					$C_{5,5}^{k,k-1}$									
6						$C_{6,6}^{k,k-1}$								
7	$C_{7,1}^{k,k-1}$	$C_{7,1}^{k,k-1}$	$C_{7,3}^{k,k-1}$				$C_{7,7}^{k,k-1}$							
8								$C_{1,1}^{k,k+1}$	$C_{1,2}^{k,k+1}$	$C_{1,3}^{k,k-1}$				$C_{1,7}^{k,k+1}$
9								$C_{2,1}^{k,k+1}$	$C_{2,2}^{k,k+1}$	$C_{2,3}^{k,k+1}$				
10								$C_{3,1}^{k,k+1}$	$C_{3,2}^{k,k+1}$	$C_{3,3}^{k,k+1}$				
11											$C_{4,4}^{k,k+1}$			
12												$C_{5,5}^{k,k+1}$		
13													$C_{6,6}^{k,k+1}$	
14								$C_{7,1}^{k,k+1}$	$C_{7,1}^{k,k+1}$	$C_{7,3}^{k,k+1}$				$C_{7,7}^{k,k+1}$

Матрица внутренней жесткости всего стержня образуется из элементных по тому же принципу:

$$[K] = \begin{bmatrix} + & & & & & & & & & \\ [K]_{on,1} & & & & & & & & & \\ & [K]_{1,2} & & & & & & & & \\ & & [K]_{2,3} & & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & & \\ & & & & [K]_{x-1,x} & & & & & \\ & & & & & [K]_{x,x+1} & & & & \\ & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & [K]_{n,on} & \square \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

где:  $[K]_{on,1}$  - опорная матрица жесткости 1-го элемента МСД,  
 $[K]_{k,k+1}$  - матрицы элементной жесткости на участке между „ k “-м и „ ( k +1) “- м элементами,  
 $[K]_{n,on}$  - опорная матрица последнего n-го элемента МСД.

Матрицу внешней жесткости всего стержня можно построить по общей формуле:

$$[R] = [A][K][A]^T \quad (3.5.7.)$$

или использовать ранее полученные локальные матрицы внешней жесткости для типового „ k “-го элемента  $[R]_k$

Вычисления по формуле (3.5.7.) сведены в табл.3.5.2 -3.5.10.

Для статически неопределимых железобетонных степеней, рассчитываемых по методу сосредоточенных деформаций, как и в упругих стержнях, используем метод перемещений

$$[R(\{P\})]\{v\} = \{P\} \quad (3.5.8.)$$

Однако система уравнений (3.5.8.) принципиально отличается от аналогичной для упругих стержней тем, что для железобетонных стержней элементы матрицы внешней жесткости [R] зависят от уровня загрузки, т.е. вектора нагрузок {P}.

Следовательно, система уравнений (3.5.8.), корнями которой являются элементы вектора перемещений в направлениях связей метода перемещений {v}, а элементы матрицы жесткости [R] также зависят от уровня напряженно-деформированного состояния, является нелинейной.

Решение системы (3.5.8.) выполняется по следующему алгоритму:

Таблица 3.5.3.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№ п/п	Связи	$R_{i,j}; j = i - 6, i - 5, \dots, \beta + 1$
1.	$i - 6$	$R_{i,i-6} = -C_{1,1}^{k,k-1}$
2.	$i - 5$	$R_{i,i-5} = -C_{1,2}^{k,k-1}$
3.	$i - 4$	$R_{i,i-4} = -C_{1,3}^{k,k-1}$
4.	$i - 3$	$R_{i,i-3} = 0$
5.	$i - 2$	$R_{i,i-2} = 0$
6.	$i - 1$	$R_{i,i-1} = 0$
7.	$\beta - 1$	$R_{i,\beta-1} = -C_{1,7}^{k,k-1}$
8.	$i$	$R_{i,i} = C_{1,1}^{k,k-1} + C_{1,1}^{k,k+1}$
9.	$i + 1$	$R_{i,i+1} = C_{1,2}^{k,k-1} + C_{1,2}^{k,k+1}$
10.	$i + 2$	$R_{i,i+2} = C_{1,3}^{k,k-1} + C_{1,3}^{k,k+1}$
11.	$i + 3$	$R_{i,i+3} = 0$
12.	$i + 4$	$R_{i,i+4} = 0$
13.	$i + 5$	$R_{i,i+5} = 0$
14.	$\beta$	$R_{i,\beta} = C_{1,7}^{k,k-1} + C_{1,7}^{k,k+1}$
15.	$i + 6$	$R_{i,i+6} = -C_{1,1}^{k,k+1}$
16.	$i + 7$	$R_{i,i+7} = -C_{1,2}^{k,k+1}$
17.	$i + 8$	$R_{i,i+8} = -C_{1,3}^{k,k+1}$
18.	$i + 9$	$R_{i,i+9} = 0$
19.	$i + 10$	$R_{i,i+10} = 0$
20.	$i + 11$	$R_{i,i+11} = 0$
21.	$\beta + 1$	$R_{i,\beta+1} = -C_{1,7}^{k,k+1}$

Таблица 3.5.4.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

№ п/п	Связи	$R_{i+1,j}; j = i - 6, i - 5, \dots, \beta + 1$
1	$i - 6$	$R_{i+1,i-6} = -C_{2,1}^{k,k-1}$
2	$i - 5$	$R_{i+1,i-5} = -C_{2,2}^{k,k-1} + C_{4,4}^{k,k-1} * I_{k,лев} * I_{k-1,np}$
3	$i - 4$	$R_{i+1,i-4} = -C_{2,3}^{k,k-1}$
4	$i - 3$	$R_{i+1,i-3} = C_{4,4}^{k,k-1} * I_{k,лев}$
5	$i - 2$	$R_{i+1,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i+1,i-1} = 0$
7	$\beta - 1$	$R_{i+1,\beta-1} = -C_{2,7}^{k,k-1}$
8	$i$	$R_{i+1,i} = C_{2,1}^{k,k-1} + C_{2,1}^{k,k+1}$
9	$i + 1$	$R_{i+1,i+1} = C_{2,2}^{k,k-1} + C_{4,4}^{k,k-1} * I_{k,лев}^2 + C_{2,2}^{k,k+1} + C_{4,4}^{k,k+1} * I_{k,np}^2$
10	$i + 2$	$R_{i+1,i+2} = C_{2,3}^{k,k-1} + C_{2,3}^{k,k+1}$
11	$i + 3$	$R_{i+1,i+3} = -C_{4,4}^{k,k-1} * I_{k,лев} + C_{4,4}^{k,k+1} * I_{k,np}$
12	$i + 4$	$R_{i+1,i+4} = 0$
13	$i + 5$	$R_{i+1,i+5} = 0$
14	$\beta$	$R_{i+1,\beta} = C_{2,7}^{k,k-1} + C_{2,7}^{k,k+1}$
15	$i + 6$	$R_{i+1,i+6} = -C_{2,1}^{k,k+1}$
16	$i + 7$	$R_{i+1,i+7} = -C_{2,2}^{k,k+1} + C_{4,4}^{k,k+1} * I_{k,np} * I_{k+1,лев}$
17	$i + 8$	$R_{i+1,i+8} = -C_{2,3}^{k,k+1}$
18	$i + 9$	$R_{i+1,i+9} = C_{4,4}^{k,k+1} * I_{k,np}$
19	$i + 10$	$R_{i+1,i+10} = 0$
20	$i + 11$	$R_{i+1,i+11} = 0$
21	$\beta + 1$	$R_{i+1,\beta+1} = -C_{2,7}^{k,k+1}$

Таблица 3.5.5.

**Элементы матрицы внешней жесткости [R]<sub>k</sub>**

№ п/п	Связи	$R_{i+2,j}; j = i - 6, i - 5, \dots, \beta + 1$
1	$i - 6$	$R_{i+2,i-6} = -C_{3,1}^{k,k-1}$
2	$i - 5$	$R_{i+2,i-5} = -C_{3,2}^{k,k-1}$
3	$i - 4$	$R_{i+2,i-4} = -C_{3,3}^{k,k-1} + C_{5,5}^{k,k-1} * I_{k,лев} \dots * I_{k,пр}$
4	$i - 3$	$R_{i+2,i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{i+2,i-2} = C_{5,5}^{k,k-1} * I_{k,лев} \dots$
6	$i - 1$	$R_{i+2,i-1} = 0$
7	$\beta - 1$	$R_{i+2,\beta-1} = -C_{3,7}^{k,k+1}$
8	$i$	$R_{i+2,i} = C_{3,1}^{k,k-1} + C_{3,1}^{k,k+1}$
9	$i + 1$	$R_{i+2,i+1} = C_{3,2}^{k,k-1} + C_{3,2}^{k,k+1}$
10	$i + 2$	$R_{i+2,i+2} = C_{2,3}^{k,k-1} + C_{5,5}^{k,k-1} * I_{k,лев}^2 \dots + C_{3,3}^{k,k+1} + C_{5,5}^{k,k+1} * I_{k,пр}^2 \dots$
11	$i + 3$	$R_{i+2,i+3} = 0$
12	$i + 4$	$R_{i+2,i+4} = -C_{5,5}^{k,k-1} * I_{k,лев} \dots + C_{5,5}^{k,k+1} * I_{k,пр} \dots$
13	$i + 5$	$R_{i+2,i+5} = 0$
14	$\beta$	$R_{i+2,\beta} = C_{3,7}^{k,k-1} + C_{3,7}^{k,k+1}$
15	$i + 6$	$R_{i+2,i+6} = -C_{3,1}^{k,k+1}$
16	$i + 7$	$R_{i+2,i+7} = -C_{3,2}^{k,k+1}$
17	$i + 8$	$R_{i+2,i+8} = -C_{3,3}^{k,k+1} + C_{5,5}^{k,k+1} * I_{k+1,лев} \dots * I_{k,пр}$
18	$i + 9$	$R_{i+2,i+9} = 0$
19	$i + 10$	$R_{i+2,i+10} = -C_{5,5}^{k,k+1} * I_{k,пр} \dots$
20	$i + 11$	$R_{i+2,i+11} = 0$
21	$\beta + 1$	$R_{i+2,\beta+1} = -C_{3,7}^{k,k+1}$

Таблица 3.5.6.

**Элементы матрицы внешней жесткости [R]<sub>k</sub>**

№ п/п	Связи	$R_{i+3,j}; j = i - 6, i - 5, \dots, \beta + 1$
1	$i - 6$	$R_{i+3,i-6} = 0$
2	$i - 5$	$R_{i+3,i-5} = -C_{4,4}^{k,k-1} * I_{k-1,пр} \dots$
3	$i - 4$	$R_{i+3,i-4} = 0$
4	$i - 3$	$R_{i+3,i-3} = -C_{4,4}^{k,k-1}$
5	$i - 2$	$R_{i+3,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i+3,i-1} = 0$
7	$\beta - 1$	$R_{i+3,\beta-1} = 0$
8	$i$	$R_{i+3,i} = 0$
9	$i + 1$	$R_{i+3,i+1} = -C_{4,4}^{k,k-1} * I_{k,лев} + C_{4,4}^{k,k+1} * I_{k,пр} \dots$
10	$i + 2$	$R_{i+3,i+2} = 0$
11	$i + 3$	$R_{i+3,i+3} = C_{4,4}^{k,k-1} + C_{4,4}^{k,k+1}$
12	$i + 4$	$R_{i+3,i+4} = 0$
13	$i + 5$	$R_{i+3,i+5} = 0$
14	$\beta$	$R_{i+3,\beta} = 0$
15	$i + 6$	$R_{i+3,i+6} = 0$
16	$i + 7$	$R_{i+3,i+7} = C_{4,4}^{k,k+1} * I_{k+1,пр} \dots$
17	$i + 8$	$R_{i+3,i+8} = 0$
18	$i + 9$	$R_{i+3,i+9} = -C_{4,4}^{k,k+1}$
19	$i + 10$	$R_{i+3,i+10} = 0$
20	$i + 11$	$R_{i+3,i+11} = 0$
21	$\beta + 1$	$R_{i+3,\beta+1} = 0$

Таблица 3.5.7.

**Элементы матрицы внешней жесткости [R]<sub>k</sub>**

№ п/п	Связи	$R_{i+4,j}; j = i-6, i-5, \dots, \beta+1$
1	$i-6$	$R_{i+4,i-6} = 0$
2	$i-5$	$R_{i+4,i-5} = 0$
3	$i-4$	$R_{i+4,i-4} = -C_{5,5}^{k,k-1} * I_{k,np}$
4	$i-3$	$R_{i+4,i-3} = 0$
5	$i-2$	$R_{i+4,i-2} = -C_{5,5}^{k,k-1}$
6	$i-1$	$R_{i+4,i-1} = 0$
7	$\beta-1$	$R_{i+4,\beta-1} = 0$
8	$i$	$R_{i+4,i} = 0$
9	$i+1$	$R_{i+4,i+1} = 0$
10	$i+2$	$R_{i+4,i+2} = -C_{5,5}^{k,k-1} * I_{k,лев} + C_{5,5}^{k,k+1} * I_{k,np}$
11	$i+3$	$R_{i+4,i+3} = 0$
12	$i+4$	$R_{i+4,i+4} = C_{5,5}^{k,k-1} + C_{5,5}^{k,k+1}$
13	$i+5$	$R_{i+4,i+5} = 0$
14	$\beta$	$R_{i+4,\beta} = 0$
15	$i+6$	$R_{i+4,i+6} = 0$
16	$i+7$	$R_{i+4,i+7} = 0$
17	$i+8$	$R_{i+4,i+8} = C_{5,5}^{k,k+1} * I_{k+1,лев}$
18	$i+9$	$R_{i+4,i+9} = 0$
19	$i+10$	$R_{i+4,i+10} = -C_{5,5}^{k,k+1}$
20	$i+11$	$R_{i+4,i+11} = 0$
21	$\beta+1$	$R_{i+4,\beta+1} = 0$

Таблица 3.5.8.

Элементы матрицы внешней жесткости [R]<sub>k</sub>

№ п/п	Связи	$R_{i+5,j}; j = i-6, i-5, \dots, \beta+1$
1	$i-6$	$R_{i+5,i-6} = 0$
2	$i-5$	$R_{i+5,i-5} = 0$
3	$i-4$	$R_{i+5,i-4} = 0$
4	$i-3$	$R_{i+5,i-3} = 0$
5	$i-2$	$R_{i+5,i-2} = 0$
6	$i-1$	$R_{i+5,i-1} = -C_{6,6}^{k,k-1}$
7	$\beta-1$	$R_{i+5,\beta-1} = 0$
8	$i$	$R_{i+5,i} = 0$
9	$i+1$	$R_{i+5,i+1} = 0$
10	$i+2$	$R_{i+5,i+2} = 0$
11	$i+3$	$R_{i+5,i+3} = 0$
12	$i+4$	$R_{i+5,i+4} = 0$
13	$i+5$	$R_{i+5,i+5} = C_{6,6}^{k,k-1} + C_{6,6}^{k,k+1}$
14	$\beta$	$R_{i+5,\beta} = 0$
15	$i+6$	$R_{i+5,i+6} = 0$
16	$i+7$	$R_{i+5,i+7} = 0$
17	$i+8$	$R_{i+5,i+8} = 0$
18	$i+9$	$R_{i+5,i+9} = 0$
19	$i+10$	$R_{i+5,i+10} = 0$
20	$i+11$	$R_{i+5,i+11} = -C_{6,6}^{k,k+1}$
21	$\beta+1$	$R_{i+5,\beta+1} = 0$

Таблица 3.5.9.

Элементы матрицы внешней жесткости [R]<sub>k</sub>



№ п/п	Связи	$R_{\beta,j}; j = i - 6, i - 5, \dots, \beta + 1$
1	$i - 6$	$R_{\beta, i-6} = -C_{1,7}^{k,k-1}$
2	$i - 5$	$R_{\beta, i-5} = -C_{2,7}^{k,k-1}$
3	$i - 4$	$R_{\beta, i-4} = -C_{3,7}^{k,k-1}$
4	$i - 3$	$R_{\beta, i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{\beta, i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{\beta, i-1} = 0$
7	$\beta - 1$	$R_{\beta, \beta-1} = -C_{1,7}^{k,k-1}$
8	$i$	$R_{\beta, i} = C_{1,7}^{k,k-1} + C_{1,7}^{k,k+1}$
9	$i + 1$	$R_{\beta, i+1} = C_{2,7}^{k,k-1} + C_{2,7}^{k,k+1}$
10	$i + 2$	$R_{\beta, i+2} = C_{3,7}^{k,k-1} + C_{3,7}^{k,k+1}$
11	$i + 3$	$R_{\beta, i+3} = 0$
12	$i + 4$	$R_{\beta, i+4} = 0$
13	$i + 5$	$R_{\beta, i+5} = 0$
14	$\beta$	$R_{\beta, \beta} = C_{7,7}^{k,k-1} + C_{7,7}^{k,k+1}$
15	$i + 6$	$R_{\beta, i+6} = 0$
16	$i + 7$	$R_{\beta, i+7} = -C_{2,7}^{k,k+1}$
17	$i + 8$	$R_{\beta, i+8} = 0$
18	$i + 9$	$R_{\beta, i+9} = 0$
19	$i + 10$	$R_{\beta, i+10} = 0$
20	$i + 11$	$R_{\beta, i+11} = 0$
21	$\beta + 1$	$R_{\beta, \beta+1} = -C_{1,7}^{k,k+1}$

Таблица 3.5.10.

Структура матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

СВЯЗИ	$i-6$	$i-5$	$i-4$	$i-3$	$i-2$	$i-1$	$\beta-1$	$i$	$i+1$	$i+2$	$i+3$	$i+4$	$i+5$	$\beta$	$i+6$	$i+7$	$i+8$	$i+9$	$i+10$	$i+11$	$\beta+1$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$i$	$R_{i,i-6}$	$R_{i,i-5}$					$R_{i,\beta-1}$	$R_{i,i}$	$R_{i,i+1}$	$R_{i,i+2}$				$R_{i,\beta}$	$R_{i,i+6}$	$R_{i,i+7}$	$R_{i,i+8}$				$R_{i,\beta+1}$
$i+1$	$R_{i+1,i-6}$	$R_{i+1,i-5}$	$R_{i+1,i-4}$	$R_{i+1,i-3}$			$R_{i+1,\beta-1}$	$R_{i+1,i}$	$R_{i+1,i+1}$	$R_{i+1,i+2}$	$R_{i+1,i+3}$			$R_{i+3,\beta}$	$R_{i+1,i+6}$	$R_{i+1,i+7}$	$R_{i+1,i+8}$	$R_{i+1,i+9}$			$R_{i+1,\beta+1}$
$i+2$	$R_{i+2,i-6}$	$R_{i+2,i-5}$	$R_{i+2,i-4}$		$R_{i+2,i-2}$		$R_{i+2,\beta-1}$	$R_{i+2,i}$	$R_{i+2,i+1}$	$R_{i+2,i+2}$		$R_{i+2,i+4}$		$R_{i+2,\beta}$	$R_{i+2,i+6}$	$R_{i+2,i+7}$	$R_{i+2,i+8}$		$R_{i+2,i+10}$		$R_{i+2,\beta+1}$
$i+3$		$R_{i-3,i-5}$		$R_{i+3,i-3}$					$R_{i+3,i+1}$		$R_{i+3,i+3}$					$R_{i+3,i+7}$		$R_{i+3,i+9}$			
$i+4$			$R_{i+4,i-4}$		$R_{i+4,i-2}$					$R_{i+4,i+2}$		$R_{i+4,i+4}$					$R_{i+4,i+8}$		$R_{i+4,i+10}$		
$i+5$						$R_{i+5,i-1}$								$R_{i+5,i+5}$						$R_{i+5,i+11}$	
$\beta$	$R_{\beta,i-6}$	$R_{\beta,i-5}$	$R_{\beta,i-4}$				$R_{\beta,\beta-1}$	$R_{\beta,i}$	$R_{\beta,i+1}$	$R_{\beta,i+2}$				$R_{\beta,\beta}$		$R_{\beta,i+7}$					$R_{\beta,\beta+1}$

- назначаются исходные данные для расчета (классы бетона и арматуры), геометрические параметры сечений, характеристики материалов в форме диаграмм „ $\sigma - \varepsilon$ “, степень дискретизации нормальных сечений и т.д.;

- задается разбивка стержня на элементы МСД, устанавливаются степени их свободы, определяются параметры системы уравнений метода перемещений;

- вычисляются матрицы жесткости сечений  $[C]_k$ , внутренней жесткости стержня  $[K]_k$  для упругого (незагруженного) состояния при  $v_{en} = v_{sk} = 1$  во всех элементарных площадках бетона  $A_{bn}$  и арматуры  $A_{sk}$  всех нормальных сечений по плоскостям сосредоточенных деформаций;

- формируется матрица коэффициентов уравнений равновесия элементов МСД и всего стержня  $[A]$ ;

- формируется матрица внешней жесткости  $[R]$ ;

- формируется вектор узловых нагрузок  $\{P\}$ , его элементами являются реакции в связях метода перемещений, вычисляемые из условий равновесия элементов МСД;

- формируется и решается система уравнений метода перемещений относительно перемещений всех связей  $\{v\}$ ;

- по полученным перемещениям  $\{v\}$  находятся взаимные перемещения по плоскостям сосредоточенных деформаций, а также вектор  $\lambda$ ;

- вычисляются деформации в бетоне  $\varepsilon_{en}$  на элементарных площадках  $A_{en}$  и арматуре  $\varepsilon_{sk}$  на элементарных площадках  $A_{sk}$  во всех нормальных сечениях стержня;

- по зависимостям „ $\sigma - \varepsilon$ “ для соответствующей длительности нагружения по полученным деформациям в бетоне  $\varepsilon_{en}$  и арматуре  $\varepsilon_{sk}$  вычисляются коэффициенты упругих деформаций для бетона  $v_{en}$  и арматуры  $v_{sk}$  во всех элементарных площадках  $A_{en}$  и  $A_{sk}$  всех нормальных сечений стержня;

- определяются напряжения  $\sigma_{bn}$  и  $\sigma_{sk}$  по формуле (3.3.2);

- определяются уточненные значения секущих модулей деформаций для рассматриваемой длительности нагружения  $E'_{bn} = \sigma_{bn} / \varepsilon_{bn}$  и  $E'_{sk} = \sigma_{sk} / \varepsilon_{sk}$ ;

- вновь формируется матрица жесткости  $[C]_k$ ,  $[K]_k$ ,  $[A]_k$ ; решение повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто условие

$$\left( \frac{\sum_{f,i}^m (v_{f,i} - v_{f,i+1}) / (v_{f,i} + v_{f,i+1})}{m} \right)^{0.5} \leq \omega \quad (3.5.9.)$$

где:  $v_f$  - элемент вектора перемещений в направлении  $f$ -ой связи;

$m$  - число элементов вектора перемещений, включаемое в условие сходимости итерационного процесса;

$\omega$  - некоторое малое число, определяемое требуемой точностью расчета; „ $i$ “ и „ $(i+1)$ “ - номера смежных итераций.

Условие (3.5.9.) выражает тот факт, что по мере итерационного процесса изменение напряженно-деформированного состояния в сечениях и в стержневом элементе в целом стабилизируется (затухает), если не происходят исчерпания несущей способности в одном или нескольких сечениях.

И наоборот, если условие (3.5.9.) не обеспечивается даже при сколько угодно большом числе итераций, то это означает исчерпание несущей способности.

В условие (3.5.9.) могут включаться не все, а лишь некоторые элементы вектора перемещений (например, прогибы в нескольких сечениях по длине пролета).

Таким образом, по изложенному алгоритму решается задача проверки несущей способности железобетонного статически-неопределимого стержня при известных (заданных) нагрузках и длительности их воздействия принятых размерах сечений и классах бетона и арматуры.

Проверка несущей способности основывается на расчетных нагрузках и таких параметрах диаграмм " $\sigma - \varepsilon$ ", которые соответствуют заданному сроку службы по [338] и требованиям расчетов по первой группе предельных состояний.

По изложенному алгоритму проверяются предельные состояния второй группы, а именно предельные перемещения и трещиностойкость с учетом заданной длительности действия длительной нагрузки.

При соответствующих нагрузках и характеристиках материалов полученные из расчета элементы вектора перемещений  $\{v\}$  сравниваются с нормируемыми их значениями по [326].

Отсутствие трещин в растянутом бетоне оценивается условием  $\varepsilon_{en} \leq \varepsilon_{et,ser}$ , этот расчет также выполняется по изложенному алгоритму при соответствующих сроках действия внешней нагрузки и соответствующих характеристиках материалов.

Ширина раскрытия трещин расчетом может оцениваться по формуле

$$a_{crc} = \varepsilon_{sk} * l_{crc} \quad (3.5.10.)$$

где:  $\varepsilon_{sk}$  - полученная расчетом деформация (приращение деформаций) в „ $k$ “-ом арматурном стержне;

$l_{crc}$  - расстояние между трещинами, зависящее от диаметра арматуры и ее класса (характера профиля).

Предварительные расчеты показали возможность использования формулы [326] для вычисления ширины раскрытия трещин при подстановке в нее напряжения в арматуре  $\sigma_{sk}$  полученного из расчета.

По изложенному алгоритму решаются проверочные задачи по несущей способности, по перемещениям, трещиностойкости и ширине раскрытия трещин, при этом не определяются минимальные (максимальные) нагрузки, вызывающие наступление одного из предельных состояний.

Дополним алгоритм процедурой поиска вектора нагрузок  $\{P\}^*$ , вызывающего наступление соответствующего предельного состояния.

Эта задача решается по аналогии с поиском вектора сил  $\{F\}^*$  для сечения железобетонного элемента или железобетонного статически определимого стержня, с тем отличием, что вместо вектора внутренних сил  $\{F\}^*$  отыскивается вектор внешних сил  $\{P\}^*$ . Для статически определимых стержней имеется пропорциональная и вполне определенная связь между  $\{F\}^*$  и  $\{P\}^*$ , для статически неопределимых систем, вследствие перераспределения усилий между соседними сечениями, связь между  $\{F\}^*$  и  $\{P\}^*$  будет нелинейной.

Однако это обстоятельство не имеет существенного значения, так как несущая способность статически неопределимого железобетонного стержня, проверяется не по внутренним усилиям  $\{F\}$  (впрочем, они при желании могут быть выведены на печать при любом уровне загрузки).

Критерем исчерпания несущей способности статически неопределимого железобетонного стержня служит условие (3.5.9.), физический смысл которого состоит в достижении стабилизации итерационного процесса (при достаточной несущей способности) или ее отсутствии (при недостаточной несущей способности).

Поэтому формально поиск  $\{P\}^*$  для статически неопределимого железобетонного стержня полностью совпадает с процедурой поиска  $\{F\}^*$  для сечения статически определимого стержня.

Критерий несущей способности в форме (3.5.9.) не является оторванным от физического смысла явлений.

При удовлетворении условия (3.5.9.), как показывают результатов расчетов на ЭВМ, напряжения в растянутой арматуре не превосходят предельных, определяемых диаграммой " $\sigma_s - \varepsilon_s$ "; в бетоне на наиболее сжатой грани всегда деформации и напряжения соответствуют нисходящей ветви диаграммы " $\sigma_e - \varepsilon_e$ " и они спускаются по ней до такого уровня, которому соответствует максимальное значение несущей способности сечения.

Напряжения в сжатой арматуре, если она задана той же диаграммой " $\sigma_s - \varepsilon_s$ ", что и при растяжении, могут по расчету достичь таких величин, при которых не может быть обеспечена устойчивость сжатых стержней. Поэтому в диаграмме сжатой арматуры для осторожности необходимо вводить ограничение для напряжений, отвечающих физическому смыслу и экспериментальным результатам.

Следует напомнить, что условие сходимости итерационного процесса должно иметь место при высокой точности  $\omega = 0,01$ .

При малой точности итерационных процессов, иногда используемых в исследованиях, можно получить "ложную" сходимость, когда в действительности несущая способность не обеспечивается.

Вместе с тем, задавая высокую точность (малое число  $\omega$ ), можно неоправданно много потребовать итераций и машинного времени для ее достижения, без существенного уточнения интересующих значений (например, величины  $\{F\}^*$  или  $\{P\}^*$ ).

Вопрос об оптимальной точности  $\omega$  и соответствующем числе итераций решается на основе сопоставления расчетных и опытных результатов.

Это будет показано на некоторых примерах расчета железобетонных стержней, по которым имеются подробные исходные данные и экспериментальные результаты.

### **3.6. Расчет по МСД железобетонных стержневых систем с учетом физической и геометрической нелинейности.**

При расчете железобетонных элементов по деформированной схеме необходимо учитывать взаимное расположение геометрической и физической оси.

Взаиморасположение этих осей может быть различным.

При сравнительно небольшом эксцентриситете  $e^r$  продольной оси  $N$  относительно центральной (в упругой стадии работы сечения) оси  $z^r$  деформации бетона на менее напряженной грани  $\varepsilon_{\sigma,2}$  могут быть относительно небольшим, и соответственно секущий модуль деформаций близок к начальному, т.е.  $E'_\sigma = E_\sigma$ . Следовательно, в этом случае физическая ось, проходящая через центр жесткостей сечения с учетом уровня напряженно-деформированного состояния, „отдалится“ от линии действия внешней силы  $N$ , увеличивая начальный эксцентриситет (рис.3.6.1,а)

При сравнительно большом эксцентриситете на растянутой грани сечения деформации бетона  $\varepsilon_{\sigma t}$  могут превзойти  $\varepsilon_{\sigma t,cr}$ , и модуль деформаций резко снизится, так как  $\nu_{\sigma t} \rightarrow 0$ .

Вследствие этого физическая ось, отвечающая достигнутому уровню напряженно-деформированного состояния, „приблизится“ к линии действия продольной оси  $N$ , снизив тем самым начальный эксцентриситет (рис.3.6.1,б).

Изложенное физическое явление учитывается в неявной форме в действующих нормах при вычислении условной критической силы  $N_{кр}$ , однако при этом не удается найти и ввести в расчет действительную поправку на величину начального эксцентриситета продольной силы.

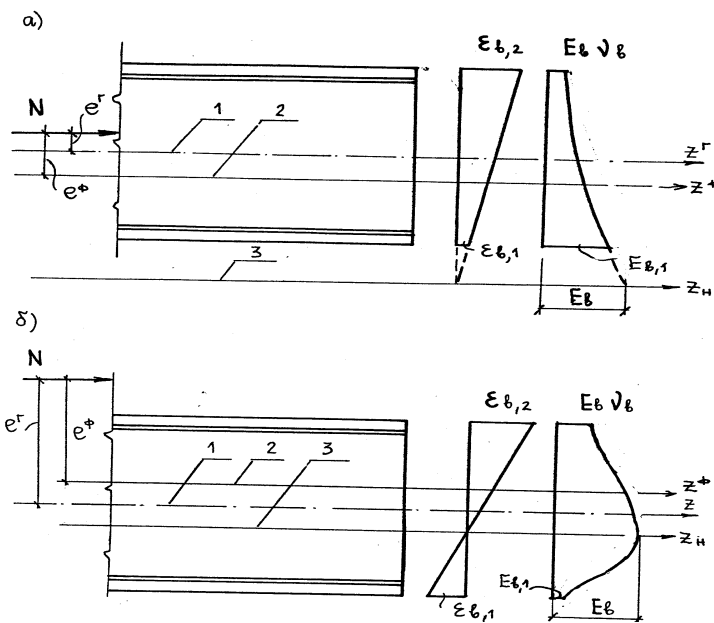


Рис. 3.6.1. О положении физической оси железобетонного стержня:  
 а) при "малых" эксцентриситетах,  
 б) при "больших" эксцентриситетах;  
 1 - координатная ось,  
 2 - физическая ось,  
 3 - нейтральная ось

В излагаемой здесь расчетной методике положение физической оси на каждом уровне загрузки и в каждом элементе МСД учитывается автоматически тем, что в матрице жесткости сечения  $[C]$  содержатся элементы  $C_{1,2}$  и  $C_{1,3}$  в общем случае не равные нулю (они могут быть положительными и отрицательными), и величина которых определяется уровнем напряженно-деформированного состояния в сечении. В упругой стадии работы, если координатная ось совмещена с центральной,  $C_{1,2}=C_{1,3}=0$ , т.е. физическая ось совпадает с центральной и центральные оси являются кроме того главными.

Таким образом, записывая уравнение равновесия сил в сечениях относительно первоначально принятых координатных осей, не меняющих своего положения, т.е. сохраняя элементы матрицы  $[C]$   $C_{1,2}$  и  $C_{1,3}$ , удается избавиться от процедуры отыскания положения физической оси и соответственно главных координатных осей.

Следует отметить, что в ряде работ на указанные обстоятельства не обращается внимание, из-за чего получаемые решения будут содержать погрешность, степень которой бу-

расчетной ситуацией.

С учетом сказанного расчет по деформированной схеме железобетонных элементов: остаётся тем же, что и для упругих стержней с тем отличием, что на каждой итерации при формировании вектора дополнительных узловых моментов  $\{\Delta M\}$  одновременно пересчитываются элементы матрицы жесткости  $[C]$  и матрицы внешней жесткости  $[R]$ .

Формула для вычисления дополнительных узловых изгибающих моментов  $\{\Delta M\}$  для  $k$ -го элемента МСД имеет вид

$$\Delta M_k = -(N_{k,k-1} * l_{k,лев} + N_{k,k+1} * l_{k,пр}) \varphi_k, \quad (3.6.1.)$$

где:  $\varphi_k$  - угол поворота оси (физической или геометрической) в плоскости действия моментов  $M_x$  или  $M_y$ . Если в пределах „ $k$ “-го элемента нет внешних продольных сил, то  $N_{k,k-1} = N_{k,k+1}$ , и формула (3.6.1.) упрощается, учитывая  $l_{k,k-1} + l_{k,k+1} = l_k$ ,

$$\Delta M_k = -N_k * l_k * \varphi_k \quad (3.6.2.)$$

Расчет железобетонных стержней на основании изложенного выполняется по программе "ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ" для ЭВМ; блок-схема программы представлена на рис. 3.6.2.

### **3.7. Результаты расчета на ЭВМ железобетонных сечений и стержней. Сопоставительный анализ результатов расчета с опытными данными**

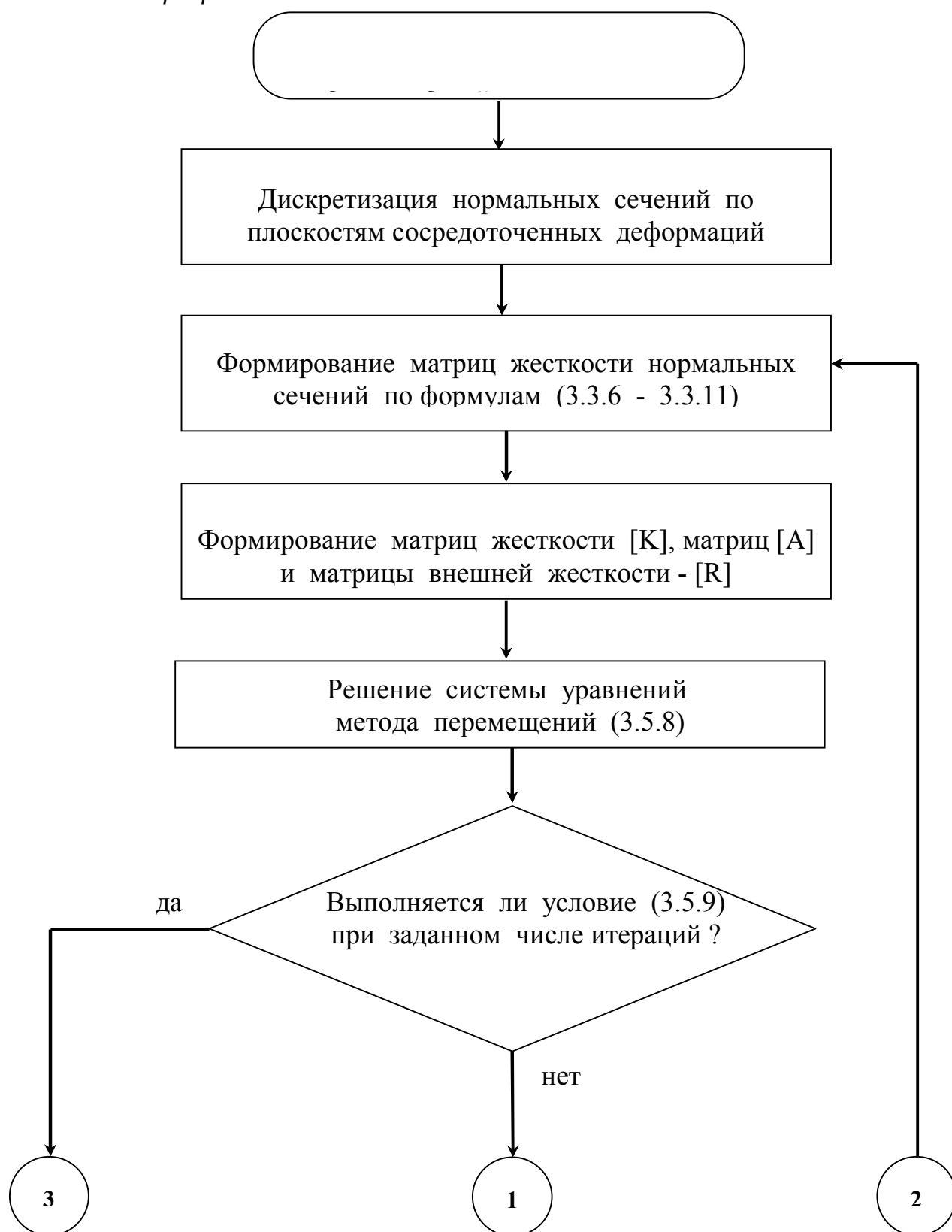
Для отработки изложенной методики расчетов железобетонных сечений и стержней были выполнены численные расчеты на ЭВМ и сопоставлены с опытными данными.

При этих сопоставлениях ставились следующие задачи:

- определение оптимальных параметров итерационных процессов (точности  $\omega$  и минимального числа итераций);
- установление целесообразных способов разбивки нормальных сечений на элементарные площадки;
- проверка требуемых схем разбивки железобетонных стержней на элементы МСД;
- проверка точности вычисления деформаций и перемещений для сечений и стержневых элементов в упругой стадии в том числе с учетом деформирования расчетной схемы при различных условиях опирания и нагружения;
- получение данных об отклонениях расчетных значений от опытных.



Блок-схема программы для ЭВМ "ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ"





Указанные задачи решались при разнообразных опытных данных, охватывающих наиболее характерные расчетные ситуации. В зависимости от

продолжительности времени затраченную на проведение рассматриваемых опытных

исследований, в ниже приведенных сопоставительных примерах принималась зависимость "σ<sub>ε</sub> - ε<sub>ε</sub>" для бетона по времени. расчета, согласно [338] соответствующая

**Пример 3.7.1.** Прямоугольное сечение с одиночной арматурой в условиях прямого изгиба имеет следующие характеристики: ширину  $B = 0,153$  м, высоту  $H = 0,30$  м,  $a = 0,02$  м, бетон:  $R_b = 29,5$  МПа,  $R_{bt} = 2,18$  МПа,  $E_b = 32300$  МПа,  $\hat{\epsilon}_b = 2,5\%$ ; арматура  $2\text{Ø}16$  класса А-II с  $\sigma_y = 359$  МПа,  $\sigma_{su} = 498$  МПа,  $E_s = 210000$  МПа (опыты НИИЖБ).

Требуется, определить расчетом прочность по нормальному сечению и сравнить с опытной. Задача сводится к поиску вектора  $\{F\}^*$  по алгоритму, изложенному в п.3.4. При этом искомый вектор представлен в общей форме  $\{F\}^* = \{0, 0, M_x^*\}^T$  т.е. нормальная сила  $N_z = 0$  и изгибающий момент  $M_y = 0$ .

Эти нулевые компоненты вектора  $\{F\}^*$  в системе уравнений сохранены для общности решения; можно было бы, в соответствии с табл. 3.4.1 ограничиться в решении двухстрочной системой уравнений и вектором  $\{F\}^* = \{0, M_x^*\}^T$ . Однако нельзя обойтись только одним уравнением равновесия, хотя продольная сила и равна нулю, т.к. плоскость распределения деформаций (3.3.1) содержит две неизвестные:  $\epsilon_z$  и  $K_x$ . Это обстоятельство полностью аналогично тому, которое встречается при расчете сечений по СНиП [326]; здесь также используются два уравнения равновесия. Разбивка нормального сечения на элементарные площадки  $A_{en}$  и  $A_{sk}$  произведена на рис.3.7.1., общее число элементарных площадок составило 153.

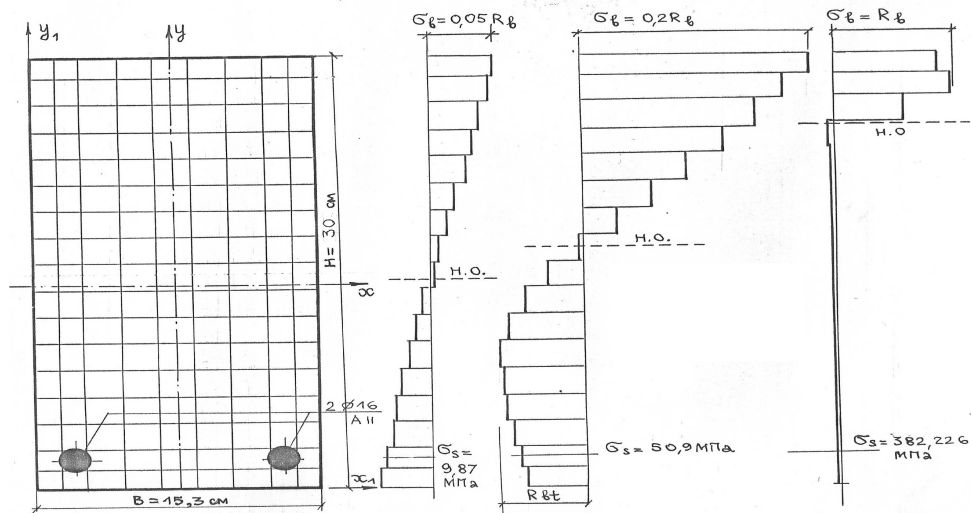


Рис. 3.7.1. Изгибаемый элемент (пример 3.7.1.)

Для разбивки сечения с 115 помощью ЭВМ применяются произвольные координатные оси  $X_1 Y_1$ ; после отыскания осевой жесткости в дискретной форме  $C_{11} = (\sum_n A_{en} E_{en} + \sum_k A_{sk} E_{sk})$  для упругого состояния при  $v_{en} = v_{sk} = 1$  и изгибно-осевой жесткости

$C_{13} = -(\sum_n A_{en} E_{en} y_{en}^1 + \sum_k A_{sk} E_{sk} y_{sk}^1)$  определяются положение центра тяжести приведенного сечения и положения центральных осей X У.

Матричное уравнение для изгиба симметричного сечения в плоскости оси У имеет вид

$$\begin{Bmatrix} O \\ O \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_y \\ K_x \end{Bmatrix} \quad (3.7.1.)$$

Решение выполнялось по программе "ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЕ СЕЧЕНИЕ" на ЭВМ. Поиск  $\{F\}^*$  организован в автоматическом режиме с заданной точностью  $\Omega=0,01$  по условию сходимости итерационного процесса (3.4.3.).

Поиск вектора, отвечающего несущей способности сечения организован путем поэтапного увеличения вектора  $\{F\}$  (этапы приняты  $0,1\{F\}_{опыт}^*$ ) до такого уровня, при котором происходило исчерпание несущей способности, т.е. достигался вектор  $\{F\}_{max}$ .

Далее поиск вектора  $\{F\}^*$  уточнялся между значением  $\{F\}_{max} - 0,1\{F\}_{опыт}^*$  и значением  $\{F\}_{max}$  с точностью  $\Omega=0,01$ .

Этапы загрузки при неизвестном значении вектора  $\{F\}^*$  назначаются исходя из приближенного(оценочного) расчета, который следует выполнять, по возможности, точнее, хотя при принятой точности итерационного расчета  $\Omega=0,01$  погрешность в оценочном расчете  $\{F\}^*$  мало изменит искомый результат.

Из расчета следует, что при относительно невысоких уровнях загрузки итерационные процессы с точностью  $\omega=0,01$  по условию (3.4.2) сходятся быстро; на первых этапах за 6-8 итераций, для достижения той же точности на последних этапах требуется несколько десятков итераций; при векторе  $\{F\}^* = \{F\}_{оп}^*$  для сходимости процесса потребовалось 57 итераций, и дальнейшее загрузку было прекращено.

Причиной разрушения, судя по материалам расчетов, (по величинам напряжений в растянутой арматуре и сжатом бетоне) следует считать разрушение бетона; в растянутой арматуре напряжения превзошли предел текучести, но не достигли временного сопротивления ( $\sigma_{s,расч}=382,226$  МПа);

116

при этом деформации в ней составили 2,2% (на предыдущем этапе  $\sigma_{s,расч}=349,173$  МПа и  $\varepsilon_s=1,75\%$ ).

Таким образом, можно утверждать, что полученное расчетным путем напряженно-деформированное состояние сечения полностью отвечает стадии разрушения, расчетное значение разрушающего момента равно опытному:

$$M_{x,расч.}^* = 0,0371 \text{ МН}^* \text{ м}; \quad M_{x,опыт.}^* = 0,0418 \text{ МН}^* \text{ м};$$

Расчет по СНиП при  $\sigma_s = \sigma_y = 359 \text{ МПа}$  дает  $M_{x,расч.}^* = 0,0371 \text{ МН}^* \text{ м}$ , что менее опытного на 8,8%.

На рис. 3.7.1 представлены эпюры напряжений в бетоне при изгибающих моментах:  $M_1 = 0,1M_x^*$ ;  $M_2 = 0,1M_x^*$ ;  $M_3 = M_x^*$ , из чего можно судить о динамике развития напряженно-деформированного состояния в сечении.

На рис.3.7.2 приведены значения кривизн, полученных расчетом по изложенной методике и по формулам СНиП; видно, что они довольно близки между собой.

**Пример 3.7.2.** Косоизгибаемый элемент прямоугольной формы имеет следующие параметры  $B=0,162 \text{ м}$ ;  $H=0,242 \text{ м}$ ;  $A=0,0235 \text{ м}$ ; бетон  $R_b=21,4 \text{ МПа}$ ,  $R_{bt}=1,58$ ,  $E_b = 21400 \text{ МПа}$ ,  $\hat{\epsilon}_b=2,5\%$ ,  $\nu_0=0,5$ ; арматура (основная)  $1\text{Ø}20 \text{ А-Шв}$  расположена несимметрично, имеет следующие характеристики  $A_s = 3,02 \text{ см}^2$ ;  $\sigma_y = 563 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{su} = 656 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 185500 \text{ МПа}$ .

Требуется расчетом определить напряженно-деформированное состояние в сечении на различных уровнях загрузки, установить изгибающий момент для стадии разрушения и сопоставить его с опытным (опыты НИИЖБ).

Расчет выполнен по программе "СЕЧЕНИЕ" для ЭВМ.

Нормальное сечение разбито на 154 элементарные площадки.

Решение велось по формуле:

$$\begin{Bmatrix} O \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ K_y \\ K_x \end{Bmatrix}, \quad (3.7.2.)$$

где  $M_y = M \sin \gamma$ ,  $M_x = M \cos \gamma$ ,  $\gamma = 13^\circ$  - угол между плоскостью действия изгибающего момента и плоскостью, проходящей через ось У.

Поиск расчетом разрушающего момента велся по той же схеме, что и в примере 3.7.1.

Согласно расчету 117 разрушение достигнуто при  $M_{расч.} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 1,0276 M_{опыт.}^* = 37,66 \text{ кН м}$ .

На рис. 3.7.2 представлены деформации в арматуре и наиболее сжатом ребре бетона; можно говорить о хорошем совпадении расчетных и опытных значений.

Из расчета можно, пользуясь значениями векторов  $K_x$  и  $K_y$ , найти положение плоскости с полной кривизной  $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ ; установлено, что она перпендикулярна нейтральной оси. В то же время, как это видно на рис.3.7.3, нейтральная ось не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента  $M$  (на рис.3.7.3 изображено положение нейтральной оси при  $M=0,9 M^*$ ).

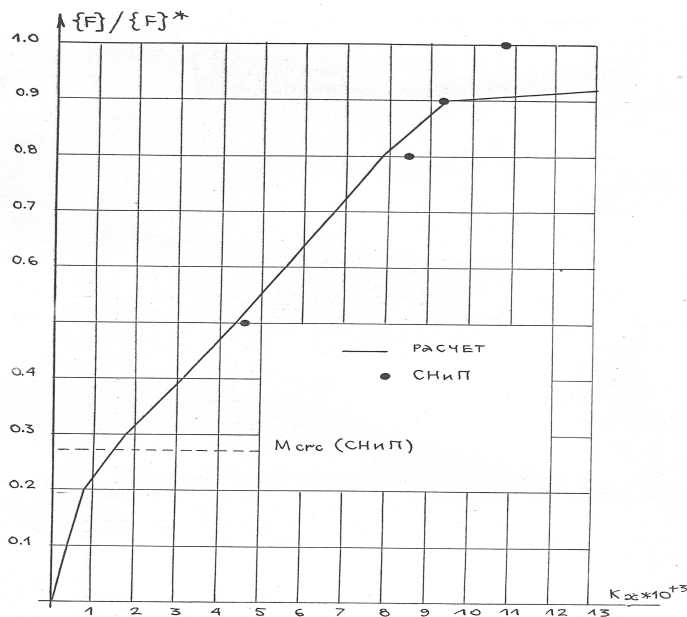
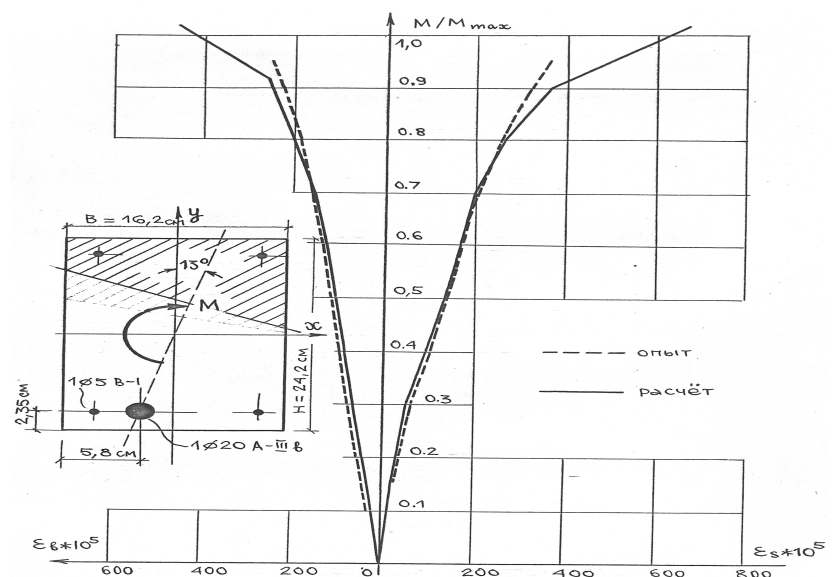


Рис.3.7.2. Изменение кривизны оси при нагрузке

Рис. 3.7.3. Косоизгибаемый элемент деформации в бетоне и арматуре



**Пример 3.7.3.** Косовнецентренно сжатый короткий элемент сечением  $B \cdot H = 12 \cdot 18$  см имеет следующие характеристики: бетон с  $R_b = 38,49$  МПа,  $R_{bt} = 2,46$  МПа,  $\hat{\epsilon}_b = 2,5\%$ ;  $\nu_0 = 0,5$ ;  $E_b = 35700$  МПа; арматура  $4\text{Ø}12$  Ат-У с

$\sigma_{0,2} = 1020$  МПа;  $\sigma_{su} = 1305$  МПа;  $E_s = 190000$  МПа;  $\epsilon_{su} = 0,07$ . Сжимающая сила приложена с эксцентриситетами  $e_x = 3,32$  см,  $e_y = 1,78$  см (рис.3.7.4, опыты Полтавского ИСИ).

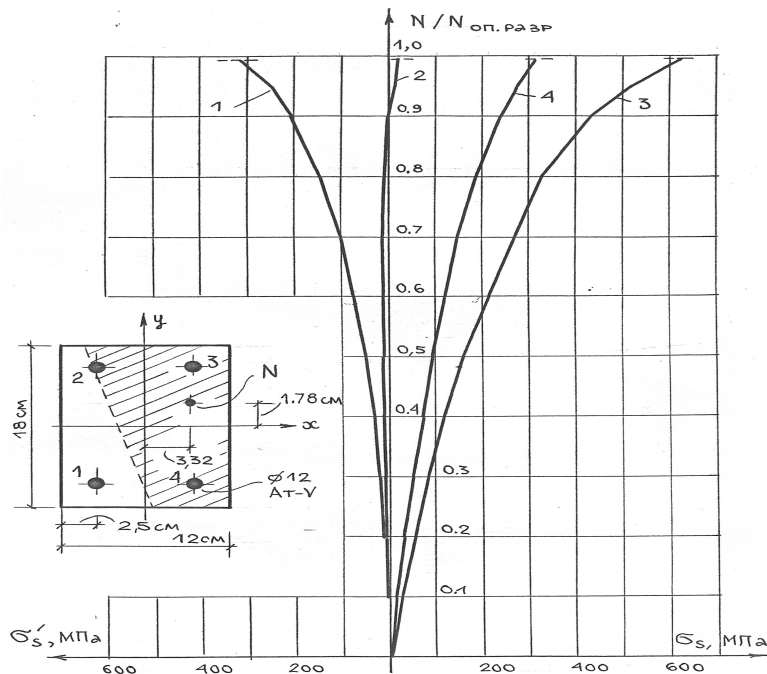


Рис. 3.7.4. Внецентренно сжатый элемент, изменение напряжений в

Требуется расчетом описать напряженно-деформированное состояние на всех уровнях загрузки, вплоть до разрушения, и сопоставить опытные и расчетные данные.

Расчет выполнен по программе "СЕЧЕНИЕ" на ЭВМ; нормальное сечение разбито на 96 элементарных площадок; этапы загрузки при поиске вектора  $\{F\}^*$  приняты равными 0,1 от уровня разрушающей нагрузки.

Решение велось по уравнению

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ K_y \\ K_x \end{Bmatrix}, \quad (3.7.3.)$$

Уравнения равновесия <sup>119</sup> записывались относительно геометрического центра сечения (он совпадает в упругой стадии с физическим), при этом  $M_x = M_{e_y}$ ,  $M_y = N e_x$ .

Установленная расчетом разрушающая нагрузка составила  $N^* = 0,469063$  МН, что менее  $N^*_{опыт.} = 0,475$  МН на 1,25%.

На рис. 3.7.4 даны сопоставления опытных и расчетных напряжений в арматуре на всех стадиях загрузки, откуда можно судить об их хорошем совпадении.

На рис. 3.7.5. представлены напряжения в двух характерных элементарных площадках бетона; из чего видно, что в наиболее напряженной площадке сечения нормальные напряжения достигают максимального значения при нормальной силе  $N = 0,8 N^*_{опыт.}$ , в то же время при максимально достигнутой расчетом нормальной силе напряжения в этой же точке снизились и составили всего  $\sigma_b = 27,42 \text{ МПа}$ , что равно 0,7 от призменной прочности, т.е. разрушение происходит с ярко выраженным проявлением участка нисходящей ветви в диаграмме „ $\sigma_b - \epsilon_b$ “.

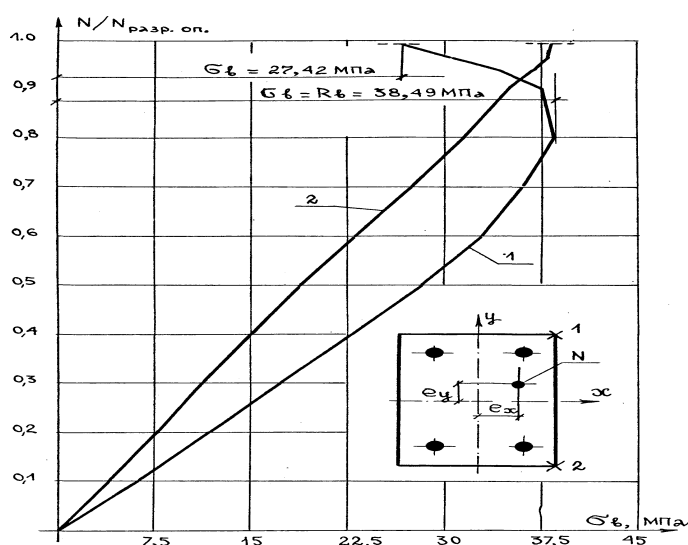


Рис. 3.7.5. Внецентренно сжатый элемент, изменение напряжений в бетоне под нагрузкой.

**Пример 3.7.4.** Требуется определить расчетную несущую способность 15-ти коротких внецентренно сжатых колонн с высокопрочной арматурой, испытанных [248] и выполнить статистическую обработку результатов.

Расчет с поиском вектора выполнялся по программе "СЕЧЕНИЕ" на ЭВМ. Результаты расчетов и сопоставление их с опытом представлены на рис. 3.7.6; статистическая обработка относительных значений  $N^*/N^*_{оп.}$  дала следующие характеристики: среднее значение 1,0086; среднее квадратическое отклонение 0,024195; дисперсия  $5,4637 \cdot 10^{-4}$ .

Из приведенного можно сделать вывод о хорошей сходимости расчетных значений с опытными.

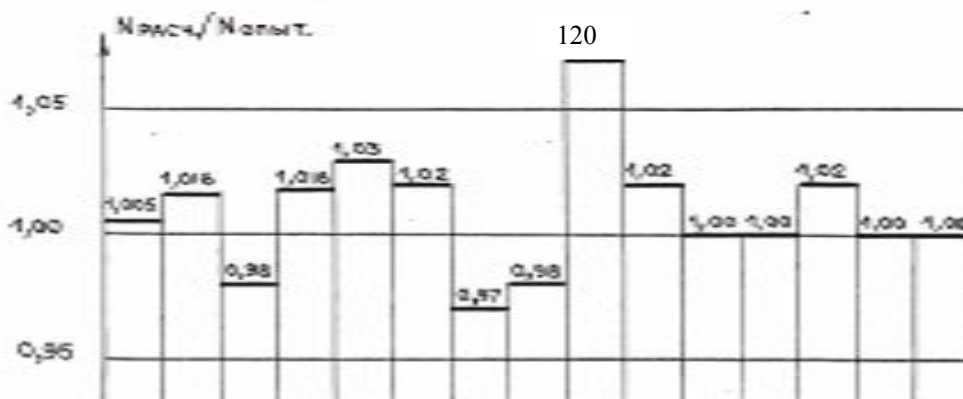




Рис. 3.7.6. Сопоставление опытных и расчетных разрушающих нагрузок для внецентренно-сжатых элементов

**Пример 3.7.5.** Требуется оценить влияние растянутого бетона на прочность изгибаемых слабо армированных элементов.

Балочный образец сечением  $B \cdot H = 0,5 \cdot 1,0$  м армирован  $3\text{Ø}10$  А-III с  $R_{su} = 590$  МПа,  $E_s = 210000$  МПа; бетон  $R_g = 5,3$  МПа;  $R_{gt} = 0,81$  МПа;  $E_g = 24000$  МПа (опыт Ленинградского областного отделения ВНИИТ).

Расчет на ЭВМ по программе "СЕЧЕНИЕ" выполнялся в двух вариантах: без учета растянутого бетона и с учетом его сопротивления растяжению.

Согласно расчету по [326] без учета сопротивления бетона растяжению, прочность по нормальному сечению составляет  $0,1288$  МН м; по расчету на ЭВМ по развиваемой методике при этих же условиях максимально достигнутый изгибающий момент составил  $0,128164$  МН м, что практически совпадает с вычисленными по СНиП.

С учетом сопротивления растянутого бетона изгибающий момент по расчету на ЭВМ составил  $0,163625$  МН м; опытный момент равен  $0,166$  МН м.

Таким образом, при учете растянутого бетона несущая способность повысилась на 28%, при этом отклонение от опытного составило - 1,4%.

**Пример 3.7.6.** Выполнить расчет прочности и перемещений железобетонной балки прямоугольного сечения, сечением  $B \cdot H = 15,3 \cdot 30,5$  см, длиной 3 м и нагруженной сосредоточенными силами в третях пролета (опыты НИИЖБ).

Характеристики материалов, бетон:  $R_g = 29,5$  МПа;  $R_{gt} = 1,6$  МПа;  $E_g = 39500$  МПа;  $\hat{\epsilon}_g = 2,5$  %; арматура  $2\text{Ø}16$  класса А-II с  $R_y = 359$  МПа;  $R_{su} = 498$  МПа;  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа.

121

Расчет выполнялся по программе "ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ" на ЭВМ.

Железобетонная балка в пролете разбита на II элемента МСД с тремя степенями свободы (система уравнений метода перемещений содержала 33 неизвестных) длиной 0,35 и 0,3 м; нормальные сечения по плоскостям

сосредоточенных деформаций представлены 105-ю элементарными площадками бетона  $A_{en}$  и арматуры  $A_{sk}$ .

Разрушающая нагрузка по расчету составила  $P^*=33$  кН, опытное значение  $P^*_{опыт} = 33,3$  кН.

В упругой стадии работы (первые итерации расчета на каждом этапе загрузки) прогибы балки в середине пролета отличаются от аналитически вычисленных на  $+0,547\%$ , углы поворота в опорных элементах соответственно на  $+0,8\%$ , кривизны в середине пролета на  $-0,01\%$ . Отсюда следует, что вычисления перемещений по изложенной методике при сравнительно небольшом числе элементов МСД дают высокую точность,

На рис. 3.7.7 представлены кривизны сечений в середине пролета, на разных уровнях загрузки, полученные расчетом по настоящей методике, по формулам [326] и опытные кривизны; можно считать, что совпадение их хорошее.

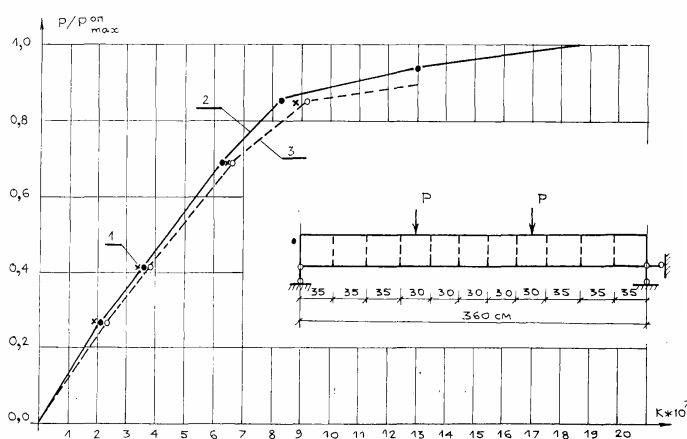


Рис. 3.7.7. Изменение кривизны продольной оси при загрузении;  
1- расчет по СнИП,  
2- расчет по МСД,  
3-опыт

Заметим, что рассматриваемая балка является статически определимой и ее расчет по методу сосредоточенных деформаций выполнен для иллюстрации точности МСД.

На рис.3.7.8. изображены эпюры кривизн и изгибающих моментов для двух уровней загрузки при нагрузке, составляющей 70% от разрушающей и 96% от разрушающей (эпюры кривизн и изгибающих моментов изображены в одинаковом масштабе для середин пролетов). Отсюда видно, что по мере роста нагрузки эпюра кривизн постепенно отходит от эпюры изгибающих моментов.

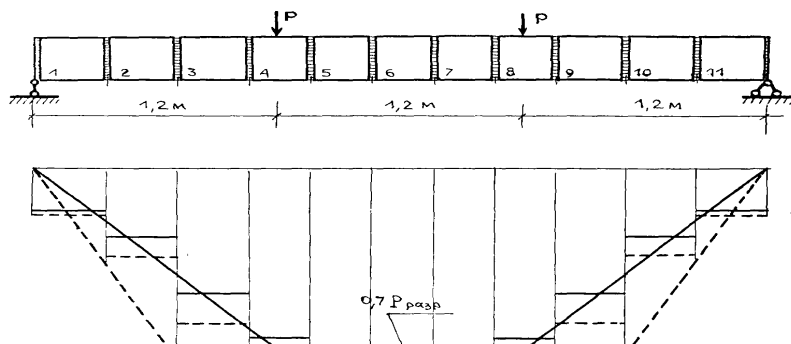


Рис. 3.7.8. Эпюры изгибаемых моментов

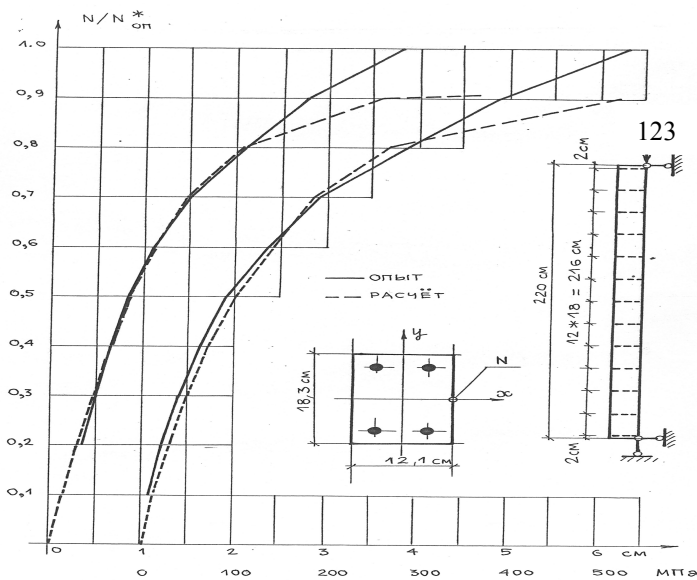
Поэтому вычисления прогибов на основании кривизн в середине пролетов по формулам [326] в виде  $v = K_x * S * L_0^2$  ( $K_x$  - кривизна в середине пролета,  $S$  - коэффициент расчетной схемы,  $L_0$  - пролет) будут содержать тем большую погрешность, чем относительно выше нагрузка. Так, при нагрузке 70% от разрушающей погрешность формулы [326] составила +1,3% и при нагрузке в 96% от разрушающей нагрузки +17% по сравнению с расчетами по методу сосредоточенных деформаций, учитывающем переменность жесткости сечения по длине.

**Пример 3.7.7.** Требуется определить расчетом напряженно-деформированное состояние во всех сечениях гибкой внецентренно нагруженной колонны (рис.3.7.9.) на всех стадиях нагружения, включая разрушение (опыт Полтавского ИСИ). Исходные данные: бетон с  $R_b = 40,9$  МПа;  $R_{bt} = 2,5$  МПа;  $E_b = 36000$ ;  $\hat{\epsilon}_b = 2,5\%$ ; арматура 4Ø12 класса Ат-У с  $\sigma_{0,2} = 998$  МПа;  $\sigma_{su} = 1307$  МПа;  $E_s = 189000$  МПа;  $e_x = 0,06$  м, длина  $L = 2,2$  м. Расчет выполнен по программе "ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ" на ЭВМ с учетом физической и геометрической нелинейности.

Колонна по высоте разбита на 14 элементов МСД, длина при опорных элементах МСД принята 0,02 м, остальных по 0,18 м.

Выбор относительно малых опорных элементов обеспечивает практически точную схему передачи внешних сил в местах закрепления элементов МСД связями метода перемещений, т.е. опорные изгибающие моменты в векторе нагрузок {P} приложены не в торцах колонны

непосредственно, а на удалении от них по 0,01 м, (при высоте колонны  $L = 2,2$  м).



**Рис. 3.7.9. Гибкий железобетонный стержень, прогибы (слева) и напряжения в растянутой арматуре (справа)**

Для упругой стадии работы (первые итерации на всех этапах приложения нагрузок) и без учета деформирования расчетной схемы точность расчетов при данной разбивке такая: погрешность в величине прогиба в середине высоты составила +0,7%, в угле поворота на опоре - 0,003%. Отсюда можно заключить, что принятая разбивка колонны по высоте на элементы МСД обеспечивает хорошую точность.

При повышении числа элементов МСД точность расчета повышается; так для этой же колонны при 40 элементах погрешность а прогибах в середине высоты составляла - 0,003%, погрешность в вычислении угла поворота равна - 0,004%.

На рис. 3.7.9 представлены эпюры прогибов и напряжений в растянутой арматуре, полученные из опыта и по расчету; разрушение по расчету достигнуто при  $N^*=0,245$  МН, что менее  $N^*_{опыт}=0,265$  МН на 7,5 %. Такое расхождение выше, чем во всех предыдущих примерах; по-видимому, следует сосредоточить внимание на расширении сопоставительных расчетов для гибких внецентренно загруженных колонн.

**Пример 3.7.8.** Требуется проверить расчётом несущую способность внецентренно сжатого железобетонного элемента круглой поперечной формы (рис. 3.7.10) при следующих данных: радиус сечения по бетону  $R=0,2$  м;  $a=0,035$  м; бетон имеет призменную прочность,  $R_b=24,5$  МПа; прочность при центральном растяжении  $R_{gt} = 1,4$  МПа; начальный модуль упругости  $E_b = 30\ 000$  МПа; арматура класса Ат-УІ в количестве  $10\emptyset 14$  мм с  $\sigma_{su} = 1050$  МПа,  $E_s=190000$  МПа.

Внешние силы заданы и равны  $N_z = 500$  кН,  $M_x = 175$  кН м.

Проверка несущей способности выполнялась по неполному уравнению

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ K_x \end{Bmatrix}$$

Разбивка круглого сечения, с учётом осесимметричного расположения арматуры при значительном количестве стержней, принималась по полосовой схеме.

Площадь элементарного участка бетона вычислялась по формуле трапеций (без учёта криволинейности боковых сторон)

$$A_{en} = 2\Delta y_{en} (R^2 - y_{en}^2)^{0,5},$$

где:  $\Delta y_{en}$  - высота элементарной площадки  $A_{en}$ ,

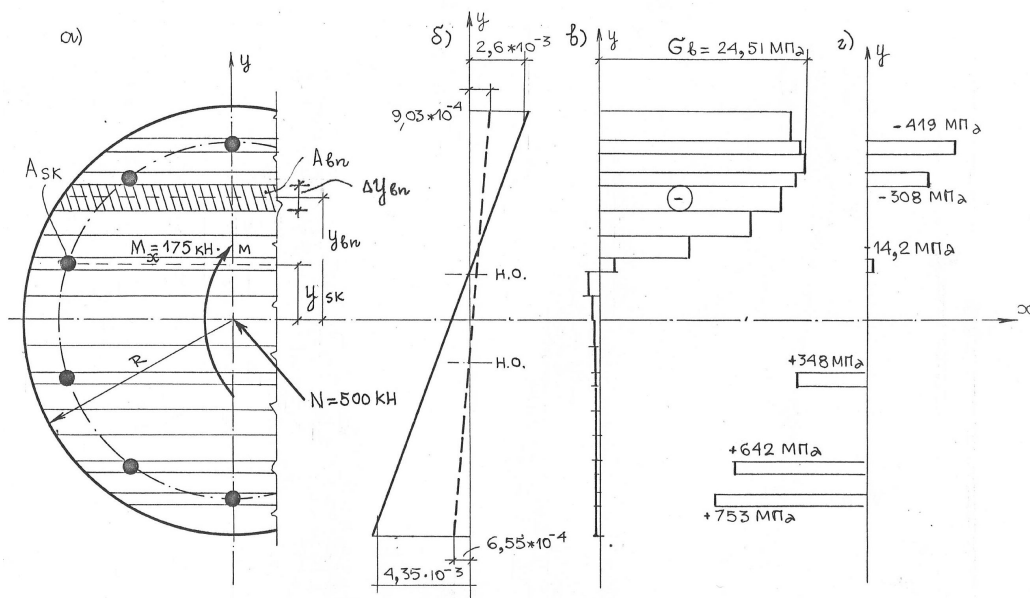
$y_{en}$  - расстояние от оси  $x$  до середины элементарного участка.

Следует отметить, что полярная система координат для круглых (и кольцевых) сечений оказалась менее удобной, чем прямоугольная.

Проверка несущей способности сечения осуществлялась по программе "ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЕ СЕЧЕНИЕ" на ЭВМ.

Сходимость итерационного процесса по условию (3.4.2) с точностью  $\omega = 0,001$  достигнута после 10-ти итераций.

Из рис. 3.7.10 следует, что напряжения в сжатом бетоне на крайнем волокне зафиксированы на нисходящей ветви диаграмм „ $\sigma_{\epsilon}$  -  $\epsilon_{\epsilon}$ “ что наблюдалось и в других примерах.



**Рис. 3.7.10. Сечение круглой формы с высокопрочной арматурой;**  
**а) схема разбивки, б) напряжения в бетоне,**  
**г) напряжения в арматуре продольные деформации по сечению**

Судя по эпюрам  $\sigma_{\epsilon}$  и  $\sigma_s$ , 125 можно полагать, что несущая способность в нормальном сечении при заданных внешних силах  $N_z$  и  $M_x$  далеко не исчерпана. Отыскание величин,  $N_z$  и  $M_x$ , при которых достигается разрушение по нормальному сечению, является предметом другой расчётной задачи, не рассматриваемой в настоящем примере.

### 3.8. Напряжённо-деформированное состояние в нормальных сечениях железобетонных элементов при сложных режимах загрузки

В реальных условиях большинство железобетонных конструкций работает в условиях сложных режимов загрузки, проходя стадии изготовления, транспортирования, монтажа, загрузки в процессе возведения сооружения, приложения вертикальных постоянных и временных нагрузок, испытывая знакопеременное воздействие горизонтальных нагрузок, температурных перепадов и т.д.

Расчёты по предельным состояниям [327] учитывают это обстоятельство тем, что в каждом конкретном случае формируется определённый состав расчётных нагрузок (сочетание нагрузок). Величины соответствующих этим сочетаниям внутренних сил и перемещений должны определяться не только интенсивностью и продолжительностью действия этих нагрузок, но и порядком их приложения в условиях физической и геометрической нелинейности.

Расчёт реальных железобетонных сооружений встречает затруднения как вследствие некоторой непредсказуемости величин, продолжительности порядка и приложения нагрузок, так и из-за недостаточной разработанности нелинейного расчётного аппарата.

Полные реальные диаграммы деформирования материалов (бетона и арматуры), включая длительность и повторность загрузки а также процессы разгрузки, позволяют на основе разработанных выше дискретных расчётных моделей описать напряжённо-деформированное состояние в сечениях железобетонных стержневых элементов и систем из них.

В дальнейших рассуждениях будем считать известными величины, продолжительность и порядок приложения (снятия) нагрузок, а также конкретные зависимости  $\sigma_m - \epsilon_m$  для бетона и арматуры, соответствующие характеру внешнего воздействия, с ветвями разгрузок и повторных загрузений.

Каждый сложный режим загрузки железобетонной конструкции можно представить совокупностью отдельных последовательно сменяющихся этапов, каждый из которых рассматривается как простое загрузение.

Связь между напряжениями и деформациями на каждом этапе загрузки принимается в общем виде

$$(3.8.1) \quad \Delta \sigma_m = \Delta E'_m * \Delta \epsilon_m$$

где:  $\Delta \sigma_m$  - приращение напряжений в бетоне (арматуре), отвечающее вектору нагрузок (воздействий) на рассматриваемом этапе загрузки;

$\Delta E'_m$  - секущий модуль деформаций для бетона (арматуры), вычисляемый в приращениях  $\Delta \sigma_m - \Delta \varepsilon_m$ ;

$\Delta \varepsilon_m$  - приращение деформаций в бетоне (арматуре) на рассматриваемом этапе загрузения (воздействия).

В формуле (3.8.1) предполагается, что на каждом очередном этапе сложного режима загрузения напряжения и деформации в бетоне (арматуре) отсчитываются от некоторых ранее достигнутых абсолютных уровней принимаемых в качестве исходных (нулевых).

При приращения напряжений  $\Delta \sigma_m$  и деформаций  $\Delta \varepsilon_m$  одного знака секущие модули деформаций  $\Delta E'_m$  будут положительными, если знаки  $\Delta \sigma_m$  и  $\Delta \varepsilon_m$  различаются, то модули деформаций будут отрицательными.

Условия равновесия в сечениях записываются в дискретной форме

$$\begin{aligned} N &= \sum_m \Delta \sigma_m A_m ; \\ M_y &= -\sum_m \Delta \sigma_m A_m x_m ; \\ M_x &= -\sum_m \Delta \sigma_m A_m y_m , \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

где:  $N$ ,  $M_y$  и  $M_x$  - элементы вектора сил в сечениях, отвечающие рассматриваемому этапу загрузения.

В статически определимых системах этот вектор сил определяется из уравнений статики, в статически неопределимых системах этот вектор сил раскрывается методом сосредоточенных деформаций.

В формуле (3.8.2)  $A_m$  - площадь элементарного участка бетона (арматуры), принимаемая по разбивочной схеме согласно рис. 3.1.1 ;

$y_m$  и  $x_m$  - координаты центров этих площадей в произвольно назначаемых координатных осях.

Как и ранее, принимается закон одно плоскостного распределения продольных деформаций в нормальных сечениях, т.е.

$$\Delta \varepsilon_m = \Delta \varepsilon_0 - \Delta K_y * x_m - \Delta K_x * y_m \quad (3.8.3.)$$

где:  $\Delta \varepsilon_m$  - приращение деформаций в бетоне (арматуре) на площадке  $A_m$ , от нагрузок (воздействий) на рассматриваемом этапе загрузения;

$\Delta \varepsilon_0$  - приращение <sup>127</sup> продольных деформаций в

бетоне (арматуре) на уровне продольной координатной оси;  $\Delta K_y$  и  $\Delta K_x$  приращения кривизн продольной оси в плоскостях действия изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_x$ .

Собирая вместе (3.8.1.), (3.8.2) и (3.8.3), получим

$$\{F\} = [\Delta C] * \{\Delta \lambda\}, \quad (3.8.4)$$

где:  $\{F\}$  - вектор нагрузок (воздействий), отвечающих рассматриваемому этапу загрузки;

$[\Delta C]$  - матрица жёсткости-сечения, аналогичная (3.3.1), но с тем отличием, что секущие модули деформации  $\Delta E'_m$  вычисляются в приращениях  $\Delta \sigma_m$  и  $\Delta \varepsilon_m$ ;  $\{\Delta \lambda\} = \{\Delta \varepsilon_0, \Delta K_y, \Delta K_x\}^T$  - вектор приращения деформаций.

Уравнение (3.8.4) аналогично уравнению (3.3.1), и оно решается подобным же образом, но здесь в качестве первого приближения матрица жёсткости сечений  $[C]$  принимается такой, которая была сформирована на предыдущем этапе загрузки.

Решая уравнение типа (3.8.4), записываемые отдельно для каждого этапа с номером  $j$ , и получая в результате решения элементы вектора приращения деформаций  $\{\Delta \lambda\}_j$ , а по ним и приращения напряжений по формулам (3.8.1), можно вычислить полные абсолютные напряжения и деформации в сечениях

$$\begin{aligned} \{\lambda\} &= \sum_j \{\Delta \lambda\}_j; \\ \sigma_m &= \sum_j \Delta \sigma_{m,j} \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

Рассмотрим подробнее один из наиболее важных режимов загрузки, состоящий из трёх стадий: "обжатие", "усадка" и "нагрузка".

Стадия "обжатие" заключается в передаче усилия предварительного напряжения с упоров на бетон (железобетон), стадия "усадка" означает формирование напряжённо-деформированного состояния в сечении вследствие усадки бетона, стадия "нагрузка" предполагает простое нагружение непрерывно возрастающей нагрузкой.

Известно, что такой режим загрузки имеет не только теоретический, но и практический интерес, ибо в этом режиме загрузки формируются основные параметры конструкций.

На стадии "обжатие" внешней нагрузкой будем считать усилия, передаваемые с упоров на бетон (железобетон), которые образуют вектор



$$\begin{aligned}
P &= -\sum_s \sigma_{sp} A_{sp}; \\
M_{y,p} &= \sum_s \sigma_{sp} A_{sp} x_{sp}; \\
M_{x,p} &= \sum_s \sigma_{sp} A_{sp} y_{sp},
\end{aligned}
\tag{3.8.6}$$

где:  $\sigma_{sp}$  - величина преднапряжения в  $s$ -ом напрягаемом арматурном стержне;  $A_{sp}$  - площадь сечения  $s$ -го стержня.

Напряжения  $\sigma_{sp}$  принимаются с учётом соответствующих потерь до обжатия бетона. В формулах (3.8.6)  $y_{sp}$  и  $x_{sp}$  - координаты  $s$ -го арматурного стержня в произвольных осях координат, сохраняющихся постоянными для всех этапов сложного режима загрузки.

Решение задачи на этапе "обжатие" с некоторыми приближениями можно вести от нулевых абсолютных напряжений в бетоне и ненапрягаемой арматуре, т.е. приращения напряжений для них на этапе "обжатие" будут одновременно абсолютными напряжениями.

В элементах матрицы жёсткости  $[\Delta C]$  компоненты, содержащие бетон и ненапрягаемую арматуру, будут вычисляться в абсолютных значениях „ $\sigma_m - \varepsilon_m$ “; в качестве первого приближения для бетона и ненапрягаемой арматуры используются начальные модули упругости  $E_b$  и  $E_s$ , во втором и последующих приближениях используются секущие модули деформаций  $E'_b$  и  $E'_s$  (см. точки 2 на диаграммах для растянутого и сжатого бетона и сжатой и растянутой арматуре, рис. 3.8.1 и 3.8.2).

Для напрягаемой арматуры в первом приближении модули деформаций отсчитываются на уровне в диаграмме „ $\sigma_{sp} - \varepsilon_{sp}$ “ соответствующей точке 1 на рис. 3.8.3; во втором и последующих приближениях вводятся секущие модули  $\Delta E'_{sp}$  в приращениях (см. точки 2 и 2' на рис. 3.8.3).

Точка 2 отвечает положительному приращению напряжений (деформаций) в напрягаемой арматуре, что может иметь место, например, в верхней напрягаемой неосновной арматуре в балочных железобетонных элементах.

Точка 2' на рис. 3.8.3 фиксирует напряжения и деформации в напрягаемой арматуре, снизившиеся вследствие отпуска натяжения с упоров на бетон (железобетон), что обычно имеет место в основной напрягаемой арматуре.

Следует отметить, что точка 2' лежит на разгрузочной ветви диаграммы, не повторяющей в общем случае исходную диаграмму „ $\sigma_{sp} - \varepsilon_{sp}$ “ конкретные выражения для диаграмм при прямом нагружении и разгрузке принимаются на основе экспериментов.

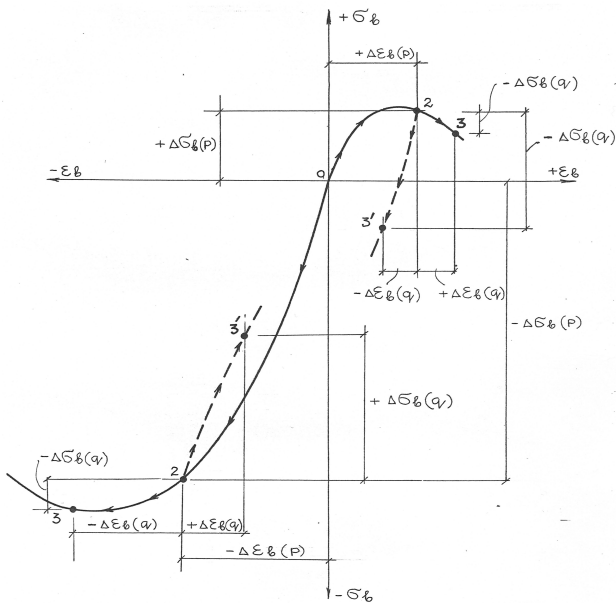


Рис. 3.8.1. Диаграмма « $\sigma_b - \epsilon_b$ » на стадии «обжатие» и «нагрузка»

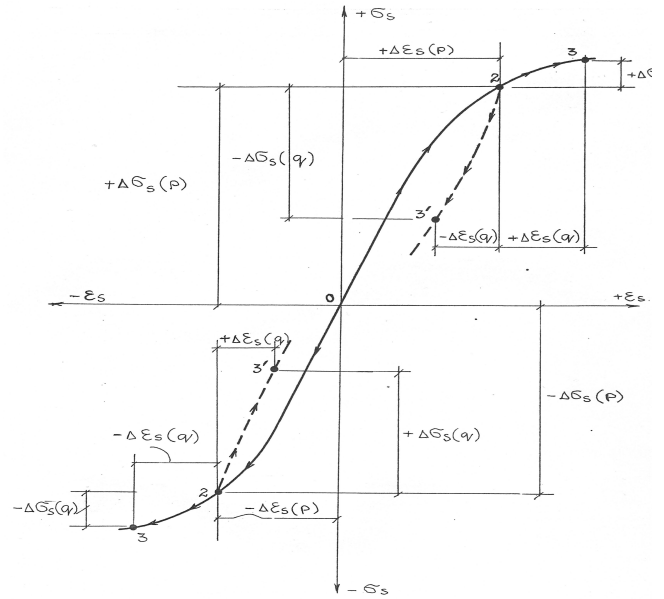


Рис. 3.8.2. Диаграмма « $\sigma_s - \epsilon_s$ » для ненапрягаемой арматуры на стадии «обжатие» и «нагрузка»

Таким образом на стадии "обжатие" раскрыто поведение бетона (рис.3.8.1), ненапрягаемой арматуры (рис. 3.8.2) и напрягаемой арматуры (рис. 3.8.3). Только в одном случае на стадии "обжатие" возможна разгрузка (в напрягаемой арматуре).

Рассмотрим теперь стадию "усадка". Она может предшествовать стадии "обжатие" или следовать за нею.

Причиной возникновения напряжённо-деформированного состояния в сечении железобетонного элемента на стадии "усадка" будут усадочные деформации в бетоне; будем считать величину свободной усадки известной (заданной) и равной  $(-\hat{\epsilon}_{yc})$ ; эти деформации будем считать равномерно распределёнными по поперечному сечению, в сечении без арматуры они не вызывают напряжений.

Вследствие сопротивления арматуры свободной усадке установившиеся деформации в бетоне и арматуре будут равны

$$\epsilon_{bn,yc} = -\hat{\epsilon}_{yc} + \Delta\epsilon_{bn,yc}; \quad (3.8.7)$$

$$\epsilon_{sk,yc} = 0 + \Delta\epsilon_{sk,yc}$$

С учетом (3.8.3) из формулы (3.8.7) следует

$$\begin{aligned} \epsilon_{bn,yc} &= -\hat{\epsilon}_{yc} + \Delta\epsilon_{0,yc} - \Delta K_{y,yc} x_{bn} - \Delta K_{x,yc} y_{bn}; \\ \epsilon_{sk,yc} &= \Delta\epsilon_{0,yc} - \Delta K_{y,yc} x_{sk} - \Delta K_{x,yc} y_{sk} \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

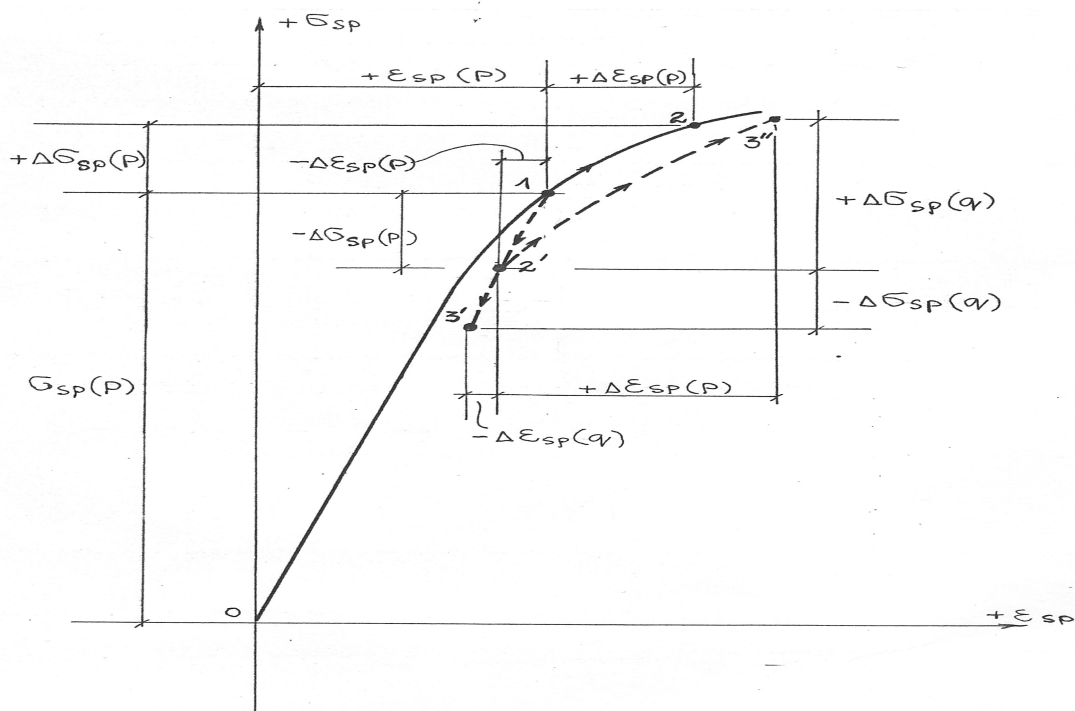


Рис. 3.8.3. Диаграмма " $\sigma_{\epsilon} - \epsilon_{\epsilon}$ " для напрягаемой арматуры на стадии "обжатие" и "нагрузка"

В этих формулах  $\epsilon_{en,yc}$  и  $\epsilon_{sk,yc}$  деформации, вызываемые усадкой с учётом сопротивления ей со стороны арматуры, и отсчитываемые от уровня, достигнутого на предыдущей стадии "обжатие".

Подставим (3.8.8) в (3.8.1), а затем в (3.8.2); получим, учитывая, что равнодействующие внутренних сил от усадки в сечении будут равны нулю (самоуравновешивающиеся напряжения):

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_n \Delta E'_{en} A_{en} \epsilon_{en,yc} + \sum_k \Delta E'_{sk} A_{sk} \epsilon_{sk,yc}; \\
 0 &= -\sum_n \Delta E'_{en} A_{en} \epsilon_{en,yc} x_{en} - \sum_k \Delta E'_{sk} A_{sk} \epsilon_{sk,yc} x_{sk}; \\
 0 &= -\sum_n \Delta E'_{en} A_{en} \epsilon_{en,yc} y_{en} - \sum_k \Delta E'_{sk} A_{sk} \epsilon_{sk,yc} y_{sk};
 \end{aligned} \tag{3.8.9}$$

Раскрывая деформации по формуле (3.8.8), приводя подобные члены и используя матричную форму записи, получим

$$\begin{Bmatrix} N_{yc} \\ M_{y,yc} \\ M_{x,yc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta C_{11} & \Delta C_{12} & \Delta C_{13} \\ \Delta C_{21} & \Delta C_{22} & \Delta C_{23} \\ \Delta C_{31} & \Delta C_{32} & \Delta C_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{o,yc} \\ \Delta K_{y,yc} \\ \Delta K_{x,yc} \end{Bmatrix}, \tag{3.8.10}$$

где:

$$\begin{aligned}
N_{yc} &= \sum_n \Delta E'_{en} A_{en} * \widehat{\varepsilon}_{yc}; \\
M_{y,yc} &= -\sum_n \Delta E'_{en} A_{en} x_{en} * \widehat{\varepsilon}_{yc}; \\
M_{x,yc} &= -\sum_n \Delta E'_{en} A_{en} y_{en} * \widehat{\varepsilon}_{yc}
\end{aligned}
\tag{3.8.11}$$

Элементы матрицы  $[\Delta C]$  по структуре полностью совпадают с формулами (3.3.6 – 3.3.11) с тем отличием, что секущие модули деформаций вычислены в приращениях  $\Delta \sigma_m - \Delta \varepsilon_m$ , отсчитываемых от предыдущего состояния как исходного. Кроме того, как следует из формул (3.8.11), усадочные воздействия как усадочные силы  $N_{yc}$ ,  $M_{y,yc}$  и  $M_{x,yc}$  содержат переменные секущие модули деформаций  $\Delta E'_{en}$ , поэтому в итерационном решении уравнения (3.8.10) корректируется не только матрица жёсткости  $[\Delta C]$ , но вектор усадочных сил.

Перейдём к стадии "нагрузка".

Решение задачи для этой стадии строится по вышеизложенным принципам в п. 3.3 с учётом того, что:

- по окончании стадии "обжатие" и "усадка" сформировавшаяся матрица жёсткости  $[\Delta C]$  принимается в качестве первого приближения;
- воздействия в виде сил обжатия и усадки на стадии нагрузка исключаются;
- в бетоне, напрягаемой и ненапрягаемой арматуре на стадии "нагрузка" в диаграммах " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " будут задействованы, как правило, ветви разгрузки и повторного нагружения.

На рис. 3.8.1, 3.8.2 и 3.8.3 для стадии "нагрузка" приращения в напряжениях и деформациях обозначены соответственно  $\Delta \sigma_g(q)$  и  $\Delta \varepsilon_g(q)$ ;  $\Delta \sigma_s(q)$  и  $\Delta \varepsilon_s(q)$ ;  $\Delta \sigma_{sp}(q)$  и  $\Delta \varepsilon_{sp}(q)$ . На этих же рисунках точки с номерами 3 фиксируют положения на исходных диаграммах " $\sigma_m - \varepsilon_m$ " точки с номерами 3' располагаются на диаграммах разгрузки, точка 3" в диаграмме на рис.3.8.3 располагается на диаграмме повторного нагружения.

В рассмотренных задачах о воздействии "обжатие", "усадка" и "нагрузка" считалось, что железобетонный элемент является статически определимым и невесомым; для этого используется алгоритм и программа для ЭВМ "ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЕ СЕЧЕНИЕ". Если одно из воздействий реализуется в условиях статической неопределимости, то решение строится на основе алгоритма и программы для ЭВМ "ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ".

1. В расчеты вводятся полные диаграммы " $\sigma - \varepsilon$ " для бетона и арматуры, включены нисходящие ветви, получаемые при различных длительностях загрузений на эталонных образцах.
2. Расчетные положения, развиваемые в настоящем исследовании основываются на характеристиках жесткости, вычисляемых относительно, первоначально и произвольно принятых координатных осей.
3. Расчеты прочности нормальных сечений различной формы и армирования, подвергаемые внешним воздействиям по МСД позволили установить, что поиск вектора нагрузки следует вести с точностью до  $\beta = 0,01$ , которая достигается за 5-7 приближений, интервал поиска следует назначать примерно 1/10 от ожидаемой разрушающей нагрузки.
4. По изложенному алгоритму решается задача проверки несущей способности железобетонного статистически-неопределимого стержня при известных (заданных) нагрузках и принятых размерах сечений, классах бетона и арматуры, длительности действия внешней нагрузки.

#### **ГЛАВА 4. ПЛОСКОНАПРЯЖЁННЫЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПО МЕТОДУ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

##### **4.1. Сопоставленный анализ основных положений МКЭ и МСД в задачах о плосконапряженных железобетонных элементах**

В несущих системах многоэтажных зданий плосконапряженными железобетонными элементами могут быть стенки диафрагм жесткости при расчете их на вертикальные и горизонтальные нагрузки без учета кручения здания. Плосконапряженное состояние испытывают наружные и внутренние стены в панельных и монолитных зданиях; по схеме плосконапряженного состояния могут рассчитываться сборные и монолитные диски перекрытий многоэтажных каркасных зданий при работе их в своей плоскости на действие горизонтальных нагрузок. В некоторых случаях по плосконапряженной модели целесообразно рассчитывать надпроемные перемычки многоэтажных зданий, рассматривая их как балки-стенки, работающие в своей плоскости.

Разумеется, во всех указанных случаях плосконапряженное состояние не реализуется в чистом виде, оно обычно сопровождается силовыми воздействиями из плоскости железобетонных элементов при поперечных нагрузках, неизбежных расчетных или случайных эксцентриситетах: действия сил из плоскости элементов, из-за конструктивной неоднородности сечений и проявление нелинейности, вследствие сложных условий опирания конструкций, а также и по другим причинам.

Среди различных методов расчёта плосконапряжённых железобетонных конструкций наибольшей полнотой и универсальностью обладает метод конечных элементов (МКЭ) [180, 195, 199, 308 и др.].

Ниже дается краткая характеристика - МКЭ применительно к расчету плосконапряженных железобетонных конструкций и показывается, что в некоторых случаях развиваемый в диссертации метод сосредоточенных деформаций (МСД) обладает определенными преимуществами перед МКЭ.

В методике расчета по МКЭ железобетонной конструкции, находящейся в условиях плосконапряженного состояния, выделим и рассмотрим несколько этапов: 1) разбивка конструкции на КЭ, 2) выбор функций перемещений по полю конечного элемента, 3) формирование матриц жесткости.

Разбивка рассчитываемой железобетонной конструкции на КЭ выполняется исходя из требуемой точности в картине напряженно-деформированного состояния, возможностей ЭВМ.

Форма КЭ чаще всего принимается прямоугольной, в некоторых случаях - треугольной.

Согласно МСД, разбивка рассчитываемой конструкции линиями (плоскостями) сосредоточенных деформаций производится формально, аналогично МКЭ.

Однако в МСД размеры элементов между плоскостями сосредоточенных деформаций могут быть приняты значительно большими чем в МКЭ. Это объясняется тем, что в МСД, в отличие от МКЭ, допускается переменное поле перемещений, деформаций, напряжений и модулей деформаций. В этом смысле элементы МСД можно уподобить комплекс-элементам (сложным элементам) или улучшенным элементам МКЭ.

В элементах МСД дополнительными точками по аналогии с комплекс-элементами МКЭ служат точки, расположенные по граням, однако при принятом плоском законе распределения продольных деформаций в каждом направлении эти дополнительные точки элементарно связаны в своих перемещениях с перемещением центров элементов МСД и не осложняют, как это бывает в МКЭ, составление матриц жесткости.

**В настоящей работе приведены некоторые сопоставительные задачи, решенные по МСД и МКЭ (примеры 4.6.4, 4.6.5, 4.6.6), из которых следует, что при одинаковой степени дискретизации МСД и МКЭ дают практически одинаковую точность; однако при этом число неизвестных в МСД заметно меньше, чем в МКЭ (при узлах с тремя степенями свободы).**

Так, в упомянутых выше тестовых задачах по балкам-стенкам число неизвестных по МСД составляло 432, в МКЭ - 504.

В примере 4.6.7 по МСД при разбивке на 160 элементов число неизвестных составило 480; при расчете по МКЭ при той же разбивке потребовалось бы решить системы алгебраических уравнений с 600 неизвестными; можно однако ожидать, что принятая в примере 4.6.7 степень дискретизации, достаточной для МСД, была бы неприемлемой в МКЭ.

Например в [303] диафрагма жесткости разбивалась по высоте этажа на 7 и по ширине на 12 элементов МКЭ, что потребовало бы для решения примера 4.6.7 840 элементов МКЭ, а число неизвестных при узлах с двумя степенями свободы при этом составило бы 1946, число неизвестных при узлах с тремя

степенями свободы достигло бы 2922. Этот пример довольно характерен для реальных плоских конструкции многоэтажных зданий, и он демонстрирует преимущества МСД перед МКЭ в смысле заметного снижения числа неизвестных перемещений, входящих в системы алгебраических уравнений.

Вторым этапом в МКЭ выделен выбор функций перемещений по полю элемента. Чаще всего в МКЭ поле перемещений задается в форме линейных функций локальных координат, поэтому при одинаковых перемещениях двух соседних узлов смежных КЭ по линии соприкосновения последних получаются также одинаковые перемещения, т.е. поле перемещений в рассчитываемой конструкции получается непрерывным. Вместе с тем поле деформаций, постоянное в пределах каждого КЭ, получает скачки (разрывы) по линиям контакта между смежными КЭ; то же относится и к напряжениям, а также и к жесткостным характеристикам в случае физически нелинейных задач.

**В МСД для плоско напряженного состояния общее поле перемещений в пределах каждого элемента допускает скачки по линиям локальных координат.**

**Это поле перемещений, как правило, имеет разрывы по смежным граням между соседними элементами.**

Таким образом, поле перемещений в плоско напряженной конструкции, рассчитываемой по МСД, менее спокойно, чем в МКЭ; однако оно, в отличие от МКЭ, имеет четко выраженную физическую природу, являясь совокупностью элементарных напряженных состояний: сжатия-растяжения в направлении локальных координатных осей, изгибов и сдвигов в плоскости конструкции. Поле деформаций в пределах каждого элемента МСД предполагается переменным по линейному закону (согласно гипотезе плоских сечений), что делает возможным вести расчет с переменными жесткостными характеристиками материалов в пределах каждого элемента МСД. Разумеется, поля деформаций и напряжений будут иметь, как правило, разрывы по граням элементов и по линиям локальных координатных осей. Таким образом, поле деформаций в элементах МСД является более сложным, чем в МКЭ, т.е. оно обладает большими возможностями.

Существенная разница между МКЭ и МСД прослеживается на третьем этапе, - при формировании матриц жесткости. Согласно МКЭ для плоско напряженных железобетонных конструкций жесткостные характеристики материалов (бетона и арматуры) в пределах каждого КЭ должны быть постоянными (средними в пределах КЭ). Это требование с одновременным стремлением к наибольшей детализации в раскрытии напряженно-деформированного состояния приводит к тому, что КЭ должны приниматься достаточно малыми, а их общее число и соответственно размерность системы алгебраических уравнений получаются большими. По этой причине плоские железобетонные конструкции реальных несущих систем многоэтажных зданий по МКЭ рассчитывать практически не удастся на современных ЭВМ. С ростом возможностей последних эта проблема будет смягчаться, однако разрыв между возможностями даже перспективных ЭВМ и потребностями расчетчиков

следует уменьшать путем поиска новых расчетных моделей и эффективных алгоритмов решения физически и геометрически нелинейных задач в условиях реальных режимов внешних воздействий и нагрузок.

На основании изложенного можно считать, что МСД способствует решению этой проблемы.

#### 4.2. Расчетная модель МСД для плоско напряженных несущих систем многоэтажных зданий

Распространим положения метода сосредоточенных деформаций, изложенные во второй главе, на плоские несущие системы многоэтажных зданий (плоские глухие и проемные диафрагмы жесткости, диски перекрытий при работе их в своей плоскости, внутренние и наружные сборные стены панельных многоэтажных зданий, и др.).

Начнем рассмотрение задачи с наиболее простого случая - упруго работающей плоской несущей системы. Известно, что упругое поведение для железобетонных плоских несущих систем ограничено сравнительно невысоким уровнем загрузки, однако решения в упругой постановке применительно к таким системам необходимы в итерационных нелинейных расчетах как первые приближения. Подробно это обстоятельство изложено в расчетах стержневых систем с учетом физической и геометрической нелинейности.

Аналогичный подход будет распространен также и на железобетонные плоские несущие системы.

Исходная железобетонная плоская несущая система разбивается плоскостями сосредоточенных деформаций на прямоугольные (или иной формы) элементы, причем целесообразно плоскости сосредоточенных деформаций совмещать с реальными швами между сборными железобетонными элементами: горизонтальными и вертикальными швами в панельных сборных стенах, межплитными швами в сборных перекрытиях и т.д.

На рис. 4.2.1 представлена расчетная модель метода сосредоточенных деформаций для железобетонных плоских несущих систем, в соответствии с ней элементы МСД предполагаются абсолютно жесткими, а их собственная деформативность и податливость реальных швов сводится по плоскостям сосредоточенных деформаций. По плоскостям сосредоточенных деформаций в общем случае располагаются реальные и собственные связи.

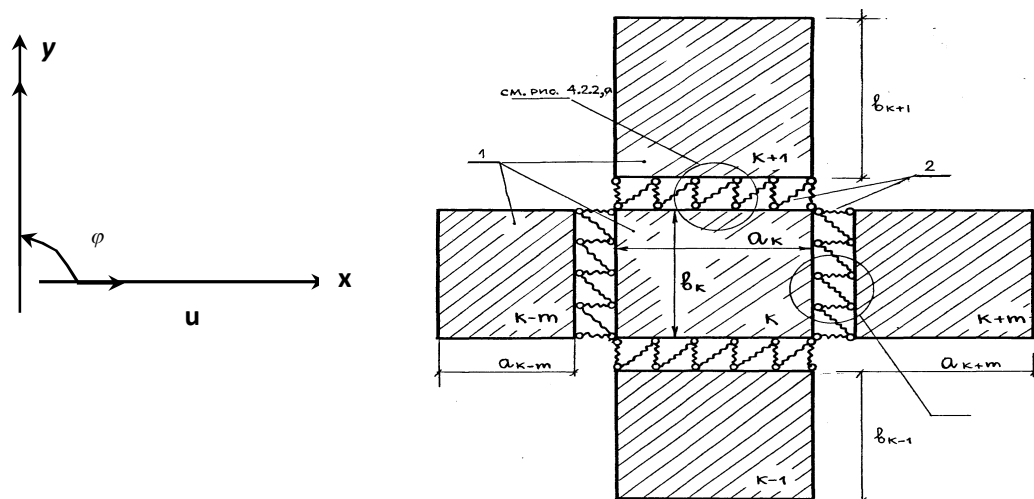




Рис. 4.2.1. Расчётная модель метода сосредоточенных деформаций для плоской задачи; 1 - элементы МСД, 2 - комплексные связи МСД

Реальные связи характеризуют свойства соединительных швов, собственные связи оценивают свойства самих элементов МСД.

Совместно реальные и собственные связи, работая по схеме последовательного соединения между собой, образуют комплексные связи метода сосредоточенных деформаций (рис.4.2.2).

Каждый жесткий  $k$ -й элемент МСД обладает тремя степенями свободы - перемещается поступательно на величину  $u_k$  и  $v_k$  в направлении осей X и Y и поворачивается в своей плоскости на угол  $\varphi_k$ .

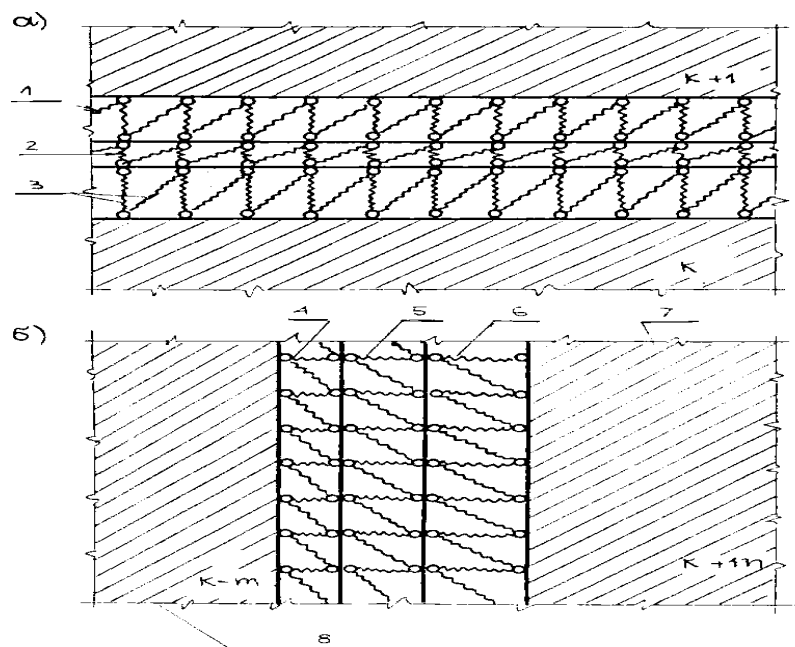


Рис. 4.2.2. Структура комплексных связей МСД; а) между  $(k+1)$ -м и  $k$ -м элементами, б) между  $(k+m)$ -м и  $(k-m)$ -м элементами 1 - собственные связи  $(k+1)$ -го элемента, 3, 4 и 6 - то же,  $k$ -го,  $(k-m)$ -го и  $(k+m)$ -го элементов, 2 и 5 - реальные связи

Вводя соответствующие связи метода перемещений, составим систему алгебраических уравнений рис. (4.2.3.)

$$[R]\{v\} = \{P\} \quad (4.2.1)$$

где:  $[R]$  - матрица внешней жесткости всей рассчитываемой несущей плоской системы;  $\{v\}$  - вектор перемещений элементов МСД;  $\{P\}$  - вектор узловых нагрузок.

Уравнение (4.2.1.) по форме полностью совпадает с уравнением для стержневых систем. Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_{ij}$  - усилие в  $i$

-й связи метода перемещений от единичного перемещения в направлении  $j$ -й связи; матрица  $[R]$  имеет размер  $3n \times 3n$ , где  $n$  - число элементов МСД. Элементы, вектора перемещений  $\{v\}$  - имеют по два линейных перемещения  $u$  и  $v$  одному угловому  $\varphi$  на каждый элемент МСД. Вектор нагрузок  $\{P\}$  - образуется из узловых нагрузок, приложенных к связям метода перемещений; так для типового  $k$ -го элемента (рис.4.2.3.)  $\{P\}_k = \{x_q; M_q; Y_q\}_k^T$ .

Вектор  $\{P\}$  - составляется без затруднений, внешние силы приводятся в узлы с сохранением условий равновесия; при разбивке исходной плоской несущей системы на элементы МСД обычно удается совместить узлы закреплений с местами приложения внешних сил или их равнодействующих.

Основная трудность задачи состоит в формировании матрицы, внешней жесткости плоской несущей системы  $[R]$ . Для ее построения можно применить способ единичных перемещений элементов МСД в направлении наложенных связей, как это была сделано в стержневых системах.

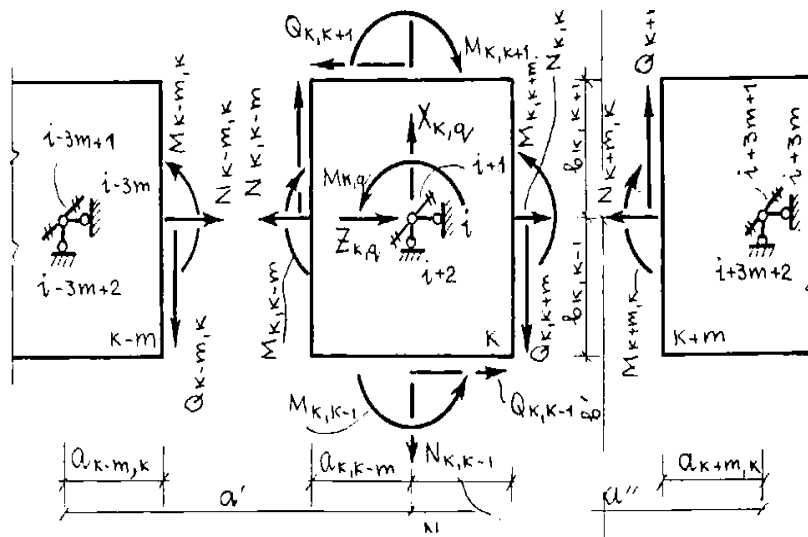


Рис. 4.2.3. Плоская задача. Схема внутренних сил

Однако, как это было показано в стержневых системах, удобнее воспользоваться формулой

$$[R] = [A][K][A]^T$$

где:  $[A]$  - составлена из коэффициентов при внутренних силах в уравнениях равновесия элементов МСД;  $[A]^T$  - матрица, транспонированная с предыдущей;  $[K]$  - матрица внутренней жесткости системы, ее элементы имеют тот же смысл, что и в стержневых системах, т. е. они означают величины соответствующих усилий в связях метода сосредоточенных деформаций при единичных взаимных смещениях элементов МСД. Локальная матрица равновесия  $[A]_k$  для  $k$ -го типового элемента МСД приведена в табл.4.2.1; она строится по тому же принципу, что и для стержневых систем.

Для более наглядного представления о расчетной модели метода сосредоточенных деформаций для плоских несущих систем ограничимся вначале случаем, когда координатные оси совпадают с центральными, коэффициент поперечного расширения равен нулю, материал конструкций и элементов изотропен и работает упруго, реальные швы между элементами МСД отсутствуют.

Связь между внутренними усилиями по плоскостям сосредоточенных деформаций и соответствующими деформациями запишем в матричном виде для типового  $k$ -го элемента МСД так (рис. 4.2.3.):

$$\{F\}_k = [C]_k * \{\lambda\}_k, \quad (4.2.2)$$

где:  $\{F\}_k$  - вектор внутренних сил по граням  $k$ -го элемента (по плоскостям сосредоточенных деформаций, рис.4.2.1);

$[C]_k$  - матрица жесткости сечений для  $k$ -го элемента по тем же граням;

$\{\lambda\}_k$  - вектор соответствующих деформаций.

Таблица 4.2.1.

Матрица равновесия для плоской задачи  $[A]_k$

Элементы МСД	Уравнения равнов	Связи метода перемещений	№	κ-m			κ-1			κ+1			κ+m			
				$N_{k,k-m}$	$M_{k,k-m}$	$Q_{k,k-m}$	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}$	$Q_{k,k+1}$	$N_{k,k+m}$	$M_{k,k+m}$	$Q_{k,k+m}$	
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
κ-m	$\Sigma Z_{k-m}$	$i-3m$	1	1												
	$\Sigma M_{k-m}$	$i-3m+1$	2		1	$-a_{\kappa-m,\kappa}$										
	$\Sigma X_{k-m}$	$i-3m+2$	3			-1										
κ-1	$\Sigma Z_{k-1}$	$i-3$	4							-1						
	$\Sigma M_{k-1}$	$i-2$	5					-1	$-e_{\kappa-1,\kappa}$							
	$\Sigma X_{k-1}$	$i-1$	6				1									
κ	$\Sigma Z_{\kappa}$	$i$	7	-1						1			-1	1		
	$\Sigma M_{\kappa}$	$i+1$	8		-1	$-a_{\kappa,\kappa-m}$		1	$-e_{\kappa,\kappa-1}$		-1			1		$-a_{\kappa,\kappa+m}$
	$\Sigma X_{\kappa}$	$i+2$	9			1	-1			1						-1
κ+1	$\Sigma Z_{\kappa+1}$	$i+3$	10									1				
	$\Sigma M_{\kappa+1}$	$i+4$	11								1					
	$\Sigma X_{\kappa+1}$	$i+5$	12							-1						
κ+m	$\Sigma Z_{\kappa+m}$	$i+3m$	13											-1		
	$\Sigma M_{\kappa+m}$	$i+3m+1$	14												-1	$-a_{\kappa+m,\kappa}$
	$\Sigma X_{\kappa+m}$	$i+3m+2$	15													1

Связи между внутренними силами и соответствующими деформациями запишутся по  $(k, k - m)$  - и грани элемента МСД

$$\begin{aligned} N_{k,k-m} &= (EA)_{k,k-m} * \varepsilon_{k,k-m}; \\ M_{k,k-m} &= (EJ)_{k,k-m} * K_{k,k-m}; \\ Q_{k,k-m} &= (GA/x)_{k,k-m} * \gamma_{k,k-m} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Здесь:  $E$  - модуль упругости материала  $k$ -го элемента;

**$A$  - площадь поперечного сечения торца  $k$ -го элемента со стороны**

$(k-m)$  -го элемента;

$J_{k,k-m}$  - момент инерции того же сечения относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости  $k$ -го элемента;

$\varepsilon_{k,k-m}$  - продольные деформации в направлении оси  $Z$ ,

$K_{k,k-m}$  - кривизна оси  $Z$ ,

$\gamma_{k,k-m}$  - угол сдвига в  $k$ -ом элементе МСД со стороны  $(k-m)$  -го элемента МСД;

$x_{k,k-m}$  - коэффициент сдвига.

По аналогии с (4.2.3.) записываются соотношения между внутренними силами и деформациями по всем остальным граням  $k$ -го элемента МСД.

Таким образом, вектор деформаций для  $k$ -го элемента будет иметь вид:

$$\{\lambda\}_k = \left\{ \varepsilon_{k,k-m}; K_{k,k-m}; \gamma_{k,k-m}; \varepsilon_{k,k-1}; K_{k,k-1}; \gamma_{k,k-1}; \varepsilon_{k,k}; K_{k,k}; \gamma_{k,k}; \varepsilon_{k,k+1}; K_{k,k+1}; \gamma_{k,k+1}; \varepsilon_{k,k+2}; K_{k,k+2}; \gamma_{k,k+2} \right\} \quad (4.2.4)$$

Матрица жесткости сечений  $[C]_k$  для  $k$ -го элемента представлена в табл.4.2.2.

Задавая единичные перемещения в направлении связей МСД и полагая деформации постоянными в пределах между гранями элемента МСД (плоскостями сосредоточенных деформаций) и узлами закрепления элементов МСД по методу перемещений, получим (для грани между  $k$ -м и  $(k-m)$ -м элементами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,k-m} &= 1 / a_{k,k-m}; \\ K_{k,k-m} &= 1 / a_{k,k-m}; \\ \gamma_{k,k-m} &= 1 / a_{k,k-m} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Тогда, используя соотношения между внутренними силами и деформациями, найдем внутренние силы при единичных перемещениях по плоскостям сосредоточенных деформаций

$$\begin{aligned}
N_{k,k-m} &= 1^* (EA)_{k,k-m} / a_{k,k-m}; \\
M_{k,k-m} &= 1^* (EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m}; \\
Q_{k,k-m} &= 1^* (GA/x)_{k,k-m} / a_{k,k-m}
\end{aligned} \tag{4.2.6.}$$

Подобным образом записываются соотношения по всем другим граням  $k$ -го элемента (плоскостям сосредоточенных деформаций).

Правые части (4.2.6.) будут означать элементы матрицы собственной внутренней жесткости для  $k$ -го элемента МСД.

На основе (4.2.6.) составим матрицу внутренней жесткости  $k$ -го элемента МСД  $[K]_k$ , учитывая последовательное соединение собственных связей метода сосредоточенных деформаций. Вызывая единичные взаимные перемещения  $k$ -го элемента МСД относительно  $(k-m)$ -го элемента, получим

$$\begin{aligned}
N_{k,k-m} &= 1^* (((EA)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((EA)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1}; \\
M_{k,k-m} &= 1^* (((EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((EJ)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1}; \\
Q_{k,k-m} &= 1^* (((GA/x)_{k,k-m} / a_{k,k-m} + ((GA/x)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1}
\end{aligned} \tag{4.2.7.}$$

Таким же образом составляются соотношения по другим плоскостям сосредоточенных деформаций вокруг  $k$ -го элемента.

Правые части уравнений (4.2.7.) будут элементами матрицы внутренней жесткости  $k$ -го элемента МСД  $[K]_k$ .

На основании (4.2.2.) связь между внутренними силами и взаимными смещениями элементов МСД запишем так:

$$\{F\}_k = [K]_k * \{\Delta v\}_k \tag{4.2.8}$$

где:

$$\begin{aligned}
\{F\}_k &= \left\{ \begin{array}{l} N_{k,k-m}; M_{k,k-m}; Q_{k,k-m}; \\ N_{k,k-1}; M_{k,k-1}; Q_{k,k-1}; \\ N_{k,k+1}; M_{k,k+1}; Q_{k,k+1}; \\ N_{k,k+m}; M_{k,k+m}; Q_{k,k+m} \end{array} \right\}^T \\
\{\Delta v\}_k &= \left\{ \begin{array}{l} \Delta \omega_{k,k-m}; \Delta \varphi_{k,k-m}; \Delta u_{k,k-m}; \\ \Delta u_{k,k-1}; \Delta \varphi_{k,k-1}; \Delta u_{k,k-1}; \\ u_{k,k+1}; \Delta \phi_{k,k+1}; \Delta \omega_{k,k+1} \\ \Delta \omega_{k,k+m}; \Delta \varphi_{k,k+m}; \Delta \omega_{k,k+m} \end{array} \right\}^T
\end{aligned}$$

Матрица жесткости нормальных сечений для плоской задачи  $[C]_k$ 

Элементы МСД	№	κ-m			κ-1			κ+1			κ+m		
		$N_{k,k-m}$	$M_{k,k-m}$	$Q_{k,k-m}$	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}$	$Q_{k,k+1}$	$N_{k,k+m}$	$M_{k,k+m}$	$Q_{k,k+m}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
κ-m	1	$EA_{k,k-m}$											
	2		$EJ_{k,k-m}$										
	3			$\frac{GA_{k,k-m}}{x_{k,k-m}}$									
κ-1	4				$EA_{k,k-1}$								
	5					$EJ_{k,k-1}$							
	6						$\frac{GA_{k,k-1}}{x_{k,k-1}}$						
κ+1	7							$EA_{k,k+1}$					
	8								$EJ_{k,k+1}$				
	9									$\frac{GA_{k,k+1}}{x_{k,k+1}}$			
κ+m	10										$EA_{k,k+m}$		
	11											$EJ_{k,k+m}$	
	12												$\frac{GA_{k,k+m}}{x_{k,k+m}}$

В свою очередь взаимные смещения элементов МСД по смежным  $k$ -й и  $(k-m)$ -й граням выразятся так:

$$\Delta \omega_{k,k-m} = \omega_i - \omega_{i-3m};$$

$$\Delta \varphi_{k,k-m} = \varphi_{i+1} - \varphi_{i-3m+1};$$

$$\Delta u_{k,k-m} = -u_{i+2} + u_{i-3m+2} + \varphi_{i+1} * a_{k,k-m} + \varphi_{i-3m+1} * a_{k-m,k}$$

**Аналогичным образом определяются взаимные смещения по всем остальным граням между  $k$ -м и смежными элементами МСД.**

Матрицу внутренней жесткости на основе формул (4.2.7.) запишем для всего  $k$ -го элемента, используя для сокращения блочную запись матриц:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c}
 [\mathcal{E}]_{k,k-m} & & & \\
 \hline
 & [\mathcal{E}]_{k,k-1} & & \\
 \hline
 [K]_k = & & [\mathcal{E}]_{k,k+1} & \\
 \hline
 & & & [\mathcal{E}]_{k,k+m}
 \end{array} \right] \quad (4.2.10)$$

Матрица  $[K]_k$  в полном виде представлена в табл.4.2.3-4.2.6. Из элементарных матриц внутренней жесткости  $[K]$  собирается матрица внутренней жесткости всей плоской несущей системы  $[K]$ , состоящей из  $n$  элементов МСД.

Теперь, перемножая матрицы  $[A]_k$ ,  $[K]_k$  и  $[A]_k^T$  получим матрицу внешней жесткости для  $k$ -го элемента. В данном случае, при диагональной матрице  $[K]_k$ , перемножение указанных матриц можно выполнить построчно.

Используя матрицу  $[A]_k$  и матрицы типа  $[K]_k$ , запишем элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  для общего случая (элементы МСД имеют разные размеры и жесткости); элементы матрицы приведены в табл. 4.2.7 - 4.2.9.

Поясним структуру табл.4.2.7. и смысл ее элементов.

В ней представлены элементы матрицы внешней жесткости  $R_{i,j}$ , где  $j = i - 3m, \dots, i + 3m + 2$ , т.е. формулы для вычисления реакций в  $i$ -й связи (рис.4.2.3.) от единичного перемещения всех элементов МСД, окружающих типовой  $k$ -й элемент МСД, в направлении соответствующих связей метода перемещений с  $j$ -ми индексами.



Матрица жесткости  $[\mathcal{E}]_{k,k-m}$  для плоской задачи

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c|c}
 ((E_k A_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + \\
 + (E_{k-m} A_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 ((E_k J_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + \\
 + (E_{k-m} J_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 ((G_k A_{k,k-m} / a_{k,k-m} x_{k,k-m})^{-1} + \\
 + (G_{k-m} A_{k-m,k} / a_{k-m,k} x_{k-m,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c|c}
 \eta_{k,k-m} & \\
 \hline
 \omega_{k,k-m} & \\
 \hline
 \xi_{k,k-m} & \\
 \hline
 \zeta_{k,k-m} & \\
 \hline
 \end{array} \right] [\mathcal{E}]_{k,k-m} =
 \end{array}$$

Таблица 4.2.4.

Матрица жесткости  $[\mathcal{E}]_{k,k-1}$  для плоской задачи

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c|c}
 ((E_k A_{k,k-1} / e_{k,k-1})^{-1} + \\
 + (E_{k-1} A_{k-1,k} / e_{k-1,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 ((E_k J_{k,k-1} / e_{k,k-1})^{-1} + \\
 + (E_{k-1} J_{k-1,k} / e_{k-1,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 ((G_k A_{k,k-1} / e_{k,k-1} x_{k,k-1})^{-1} + \\
 + (G_{k-1} A_{k-1,k} / e_{k-1,k} x_{k-1,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c|c}
 \eta_{k,k-1} & \\
 \hline
 \omega_{k,k-1} & \\
 \hline
 \xi_{k,k-1} & \\
 \hline
 \zeta_{k,k-1} & \\
 \hline
 \end{array} \right] [\mathcal{E}]_{k,k-1} =
 \end{array}$$

Таблица 4.2.5.

Матрица жесткости  $[\Theta]_{k,k+1}$  для плоской задачи

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c|c|c}
 ((E_k A_{k,k+1} / \varrho_{k,k+1})^{-1} + \\
 + (E_{k+1} A_{k+1,k} / \varrho_{k+1,k})^{-1})^{-1} & & \\
 \hline
 [ \Theta ]_{k,k+1} = & \left[ \begin{array}{c|c}
 ((E_k J_{k,k+1} / \varrho_{k,k+1})^{-1} + \\
 + (E_{k+1} J_{k+1,k} / \varrho_{k+1,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 ((G_k A_{k,k+1} / \varrho_{k,k+1} x_{k,k+1})^{-1} + \\
 + (G_{k+1} A_{k+1,k} / \varrho_{k+1,k} x_{k+1,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 \end{array} \right] & \\
 \hline
 \eta_{k,k+1} & & \\
 \hline
 \omega_{k,k+1} [ \Theta ]_{k,k+1} = & & \\
 \xi_{k,k+1} & &
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Таблица 4.2.6.

Матрица жесткости  $[\Theta]_{k,k+m}$  для плоской задачи

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c|c|c}
 ((E_k A_{k,k+m} / a_{k,k+m})^{-1} + \\
 + (E_{k+m} A_{k+m,k} / a_{k+m,k})^{-1})^{-1} & & \\
 \hline
 [ \Theta ]_{k,k+m} = & \left[ \begin{array}{c|c}
 ((E_k J_{k,k+m} / a_{k,k+m})^{-1} + \\
 + (E_{k+m} J_{k+m,k} / a_{k+m,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 ((G_k A_{k,k+m} / a_{k,k+m} x_{k,k+m})^{-1} + \\
 + (G_{k+m} A_{k+m,k} / a_{k+m,k} x_{k+m,k})^{-1})^{-1} & \\
 \hline
 \end{array} \right] & \\
 \hline
 \eta_{k,k+m} & & \\
 \hline
 \omega_{k,k+m} [ \Theta ]_{k,k+m} = & & \\
 \xi_{k,k+m} & &
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Таблица 4.2.7.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

№ п/п	Связи	$R_{i,j}; \quad j = i - 3m, \dots, i + 3m + 2$
1.	$i - 3m$	$R_{i,i-3m} = -\eta_{k,k-m}$
2.	$i - 3m + 1$	$R_{i,i-3m+1} = 0$
3.	$i - 3m + 2$	$R_{i,i-3m+2} = 0$
4.	$i - 3$	$R_{i,i-3} = \xi_{k,k-1}$
5.	$i - 2$	$R_{i,i-2} = \theta_{k-1,k} * \xi_{k,k-1}$
6.	$i - 1$	$R_{i,i-1} = 0$
7.	$i$	$R_{i,i} = \eta_{k,k-m} + \xi_{k,k-1} + \xi_{k,k+1} + \eta_{k,k+m}$
8.	$i + 1$	$R_{i,i+1} = \theta_{k,k-1} * \xi_{k,k-1} - \theta_{k,k+1} * \xi_{k,k+1}$
9.	$i + 2$	$R_{i,i+2} = 0$
10.	$i + 3$	$R_{i,i+3} = -\xi_{k,k+1}$
11.	$i + 4$	$R_{i,i+4} = -\theta_{k+1,k} * \xi_{k,k+1}$
12.	$i + 5$	$R_{i,i+5} = 0$
13.	$i + 3m$	$R_{i,i+3m} = -\eta_{k,k+m}$
14.	$i + 3m + 1$	$R_{i,i+3m+1} = 0$
15.	$i + 3m + 2$	$R_{i,i+3m+2} = 0$

Таблица 4.2.8.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

№ п/п	Связи	$R_{i+1,j}; \quad j = i - 3m, \dots, i + 3m + 2$
1	$i - 3m$	$R_{i+1,i-3m} = 0$
2	$i - 3m + 1$	$R_{i+1,i-3m+1} = -\omega_{k,k-m} + a_{k,k-m} * a_{k-m,k} * \xi_{k,k-m}$
3	$i - 3m + 2$	$R_{i+1,i-3m+2} = a_{k,k+m} * \xi_{k,k-m}$
4	$i - 3$	$R_{i+1,i-3} = -\theta_{k,k-1} * \xi_{k,k-1}$
5	$i - 2$	$R_{i+1,i-2} = -\omega_{k,k-1} + \theta_{k,k+1} * \theta_{k-1,k} * \xi_{k,k-1}$
6	$i - 1$	$R_{i+1,i-1} = 0$
7	$i$	$R_{i+1,i} = \theta_{k,k-1} * \xi_{k,k-1} - \theta_{k,k+1} * \xi_{k,k+1}$
8	$i + 1$	$R_{i+1,i+1} = \omega_{k,k-m} + a_{k,k-m}^2 * \xi_{k,k-m} + \omega_{k,k-1} +$ $+ \theta_{k,k-1}^2 * \xi_{k,k-1} + \omega_{k,k+1} + \theta_{k,k+1}^2 * \xi_{k,k+1} +$ $+ \omega_{k,k+m} + a_{k,k+m}^2 * \xi_{k,k+m}$
9	$i + 2$	$R_{i+1,i+2} = -a_{k,k-m} * \xi_{k,k-m} + a_{k,k+m} * \xi_{k,k+m}$
10	$i + 3$	$R_{i+1,i+3} = \theta_{k,k+1} * \xi_{k,k+1}$
11	$i + 4$	$R_{i+1,i+4} = -\omega_{k,k+1} + \theta_{k,k+1} * \theta_{k+1,k} * \xi_{k,k+1}$
12	$i + 5$	$R_{i+1,i+5} = 0$
13	$i + 3m$	$R_{i+1,i+3m} = 0$
14	$i + 3m + 1$	$R_{i+1,i+3m+1} = -\omega_{k,k-m} + a_{k,k+m} * a_{k+m,k} * \xi_{k,k+m}$
15	$i + 3m + 2$	$R_{i+1,i+3m+2} = -a_{k,k+m} * \xi_{k,k+m}$

Так, например, в 13-й строке

147

записана реакция в  $i$ -й связи  $k$ -го

элемента МСД от смещения  $(k+m)$ -го элемента МСД в направлении его  $(i+3m)$ -й связи. Разумеется, всегда сохраняется равенство  $R_{i,j} = R_{j,i}$ .

Тот же смысл имеют элементы табл. 4.2.8 и 4.2.9, но они относятся к  $(i+1)$ -й и  $(i+2)$ -й связям соответственно.

В табл.4.2.10 дан фрагмент глобальной матрицы внешней жесткости  $\{R\}_k$ , элементы составлены на основании таблиц 4.2.7 - 4.2.9.

Таблица 4.2.9.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

№ п/п	Связи	$R_{i+1,j}; j = i - 3m, \dots, i + 3m + 2$
1	$i - 3m$	$R_{i+2,i-3m} = 0$
2	$i - 3m + 1$	$R_{i+2,i-3m+1} = -a_{k-m,k} * \xi_{k,k-m}$
3	$i - 3m + 2$	$R_{i+2,i-3m+2} = -\xi_{k,k-m}$
4	$i - 3$	$R_{i+2,i-3} = 0$
5	$i - 2$	$R_{i+2,i-2} = 0$
6	$i - 1$	$R_{i+2,i-1} = -\eta_{k,k-1}$
7	$i$	$R_{i+2,i} = 0$
8	$i + 1$	$R_{i+2,i+1} = -a_{k,k-m} * \xi_{k,k-m} + a_{k,k+m} * \xi_{k,k+m}$
9	$i + 2$	$R_{i+2,i+2} = \xi_{k,k-m} + \eta_{k,k-1} + \eta_{k,k+1} + \xi_{k,k+m}$
10	$i + 3$	$R_{i+2,i+3} = 0$
11	$i + 4$	$R_{i+2,i+4} = 0$
12	$i + 5$	$R_{i+2,i+5} = -\eta$
13	$i + 3m$	$R_{i+2,i+3m} = 0$
14	$i + 3m + 1$	$R_{i+2,i+3m+1} = a_{k+m,k} * \xi_{k,k+m}$
15	$i + 3m + 2$	$R_{i+2,i+3m+2} = -\xi_{k,k+m}$

#### 4.3. Учет граничных условий и конструктивных особенностей реальных швов

В развиваемом варианте расчета плоских несущих систем многоэтажных зданий по методу сосредоточенных деформаций предполагается, что каждый элемент МСД, включая и приопорные элементы, обладает тремя степенями свободы. Поэтому независимо от способов примыкания плоской несущей системы многоэтажных зданий к опорным устройствам число неизвестных метода перемещений всегда будет одинаковым и равным  $3n$ , где  $n$  - число элементов МСД. Отличие опорных элементов от всех остальных будет заключаться в особенностях формирования их матриц внутренней жесткости, зависящих от типа опорных устройств и способов присоединения к ним опорных элементов МСД.

Таблица 4.2.10.

Структура матрицы внешней жесткости для плоской задачи  $[R]_k$ 

Связи метода переме щений	$\kappa-m$			$\kappa-1$			$\kappa$			$\kappa+1$			$\kappa+m$		
	$i-3m$	$i-3m+2$	$i-3m+2$	$i-3$	$i-2$	$i-1$	$i$	$i+1$	$i+2$	$i+3$	$i+4$	$i+5$	$i+3m$	$i+3m+1$	$i+3m+2$
$i$	$R_{i,i-3m}$			$R_{i,i-3}$	$R_{i,i-2}$		$R_{i,i}$	$R_{i,i+1}$		$R_{i,i+3}$	$R_{i,i+4}$		$R_{i,i+3m}$		
$i+1$		$R_{i+1,i-3m+1}$	$R_{i+1,i-3m+2}$	$R_{i+1,i-3}$	$R_{i+1,i-2}$		$R_{i+1,i}$	$R_{i+1,i+1}$	$R_{i+1,i+2}$	$R_{i+1,i+3}$	$R_{i+1,i+4}$			$R_{i+1,i+3m+1}$	$R_{i+1,i+3m+2}$
$i+2$		$R_{i+2,i-3m+1}$	$R_{i+2,i-3m+2}$			$R_{i+2,i-1}$		$R_{i+2,i+1}$	$R_{i+2,i+2}$			$R_{i+2,i+5}$		$R_{i+2,i+3m+1}$	$R_{i+2,i+3m+2}$

Рассмотрим некоторые, наиболее характерные условия опирания плоских несущих систем многоэтажных зданий.

При шарнирно-подвижном опирании элемента МСД в одной точке (рис.4.3.1,а) опору можно представить раздвоенной (рис.4.3.1,б), так что в опорном  $k$ -м элементе МСД по грани со стороны  $(k-m)$ -го элемента МСД развивается сдвигающая опорная реакция  $Q_{k,k-m} = Q_{k-m,k}$ , а по грани со стороны  $(k-1)$ -го элемента МСД действует опорная реакция  $N_{k,k-1} = N_{k-1,k}$  (рис. 4.3.1,в).

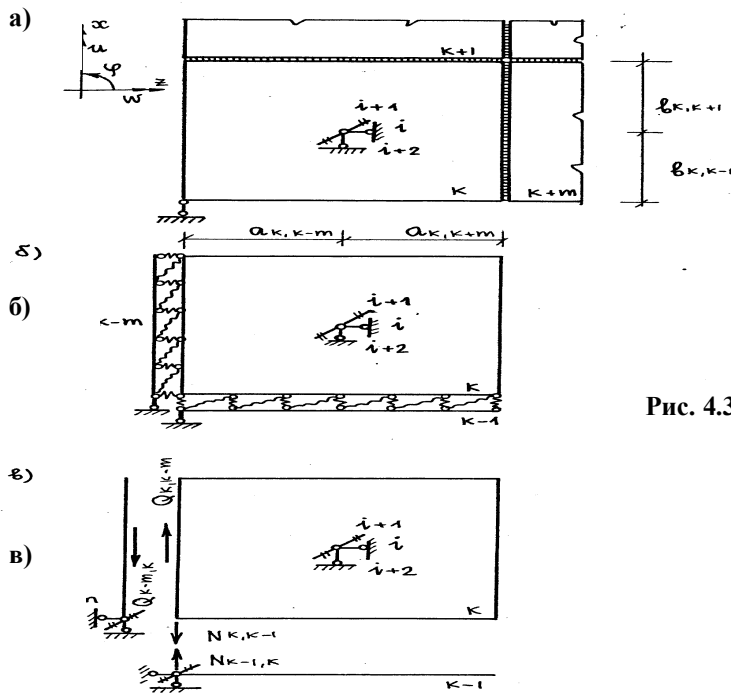


Рис. 4.3.1. Граничные условия при точно-угловом опирании;  
а) исходная схема,  
б) схема МСД,  
в) внутренние силы

Элементы матрицы внешней жесткости для опорного  $k$ -го элемента МСД, получим из обычного соотношения

$$[R]_k = [A]_k [K]_k [A]_k^T$$

На рис. 4.3.2 представлены уравнения равновесия для  $k$ -го элемента МСД, коэффициенты при этих уравнениях образуют локальную матрицу  $[A]_k$ , в которую включены только элементы, относящиеся  $(k-m)$ -му и  $(k-1)$ -му элементам МСД (эти элементы фиктивные, вводятся для удобства вывода формул).

ЭЛЕМЕНТ МСД	УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ	СМЫСЛ МЕТОДА ПЕРЕМЕ- ЩЕНИЯ	N N П.П.	k-m			k-1		
				$N_{k,k-m}$	$M_{k,k-m}$	$Q_{k,k-m}$	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$
				1	2	3	4	5	6
k	$\sum R_k$	i	7						
	$\sum M_k$	i+1	8			$\epsilon_{k,k-m}$	$\kappa_{k,k-1}$		
	$\sum X_k$	i+2	9			1	-1		

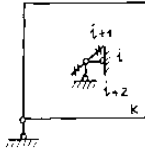


Рис. 4.3.2. Граничные условия при точно-угловом опирании

$$R_{i,i} = \xi_{k,k+1} + \xi_{k,k+m};$$

$$R_{i,i+1} = -\nu_{k,k+1} + \xi_{k,k+1};$$

$$R_{i+1,i+1} = a_{k,k,m}^2 \xi'_{k,k-m} + a_{k,k,m}^2 h'_{k,k-1} + \omega_{k,k-1} + \nu_{k,k+1}^2 \xi_{k,k+1} + \omega_{k,k+m} + a_{k,k,m}^2 \xi_{k,k+m};$$

$$R_{i+1,i+2} = -a_{k,k,m} \xi'_{k,k-m} - a_{k,k-m} h'_{k,k-1} - a_{k,k+m} \xi_{k,k+m};$$

$$h'_{k,k-1} = E_k A_{k,k-1} / \nu_{k,k-1};$$

$$\xi'_{k,k-1} = G_k A_{k,k-1} / \nu_{k,k-1} \epsilon_{k,k-1}.$$

Соответствующие элементы матрицы  $[K]_k$  приведены на рис. 4.3.2, причем только те из них, которые относятся к  $(k-m)$ -му и  $(k-1)$ -му элементам МСД, элементы матрицы  $[K]_k$  со стороны  $(k+1)$ -го и  $(k+m)$ -го элементов МСД остаются неизменными и принимаются по табл.4.2.6 и 4.2.7.

Выполняя перемножение строк в матрице  $[A]_k$ , с учетом диагонального характера матрицы  $[K]_k$  получим элементы матрицы  $[R]_k$ ; на рис.4.3.2 приведены только те из них, которые отличаются от приведенных для промежуточного  $k$ -го элемента МСД (табл.4.2.8-4.2.10). При шарнирно-неподвижном опирании элемента МСД в одной точке внутренние неизвестные силы по граням  $k$ -го элемента приводятся к двум нормальным ( $N_{k,k-m}$  и  $N_{k,k-1}$ ) и одной поперечной  $Q_{k,k-1}$  (рис. 4.3.3). Соответствующая им матрица коэффициентов при уравнениях равновесия представлена на рис. 4.3.4, здесь даны формулы для элементов матрицы внешней жесткости, отличные от ранее приводившихся для промежуточного (неопорного) элемента МСД (табл.4.2.8. - 4.2.9. ). По той же схеме построены выводы формул для элементов матрицы  $[R]_k$  при защемленной сосредоточенной опоре на углу элемента МСД (рис.4.3.5.) и (4.3.6.); здесь по каждой из граней со стороны  $(k-m)$ -го и  $(k-1)$ -го элементов МСД действуют внутренние силы в виде продольных сил, изгибающих моментов и поперечных сил.

Рассмотренные выше опирания в точке для плоских несущих систем многоэтажных зданий имеют больше расчетно-теоретический интерес; в реальных несущих системах опорные площадки имеют некоторые конечные размеры.

Рассмотрим два типа таких линейных опор (рис.4.3.7. и 4.3.9.).

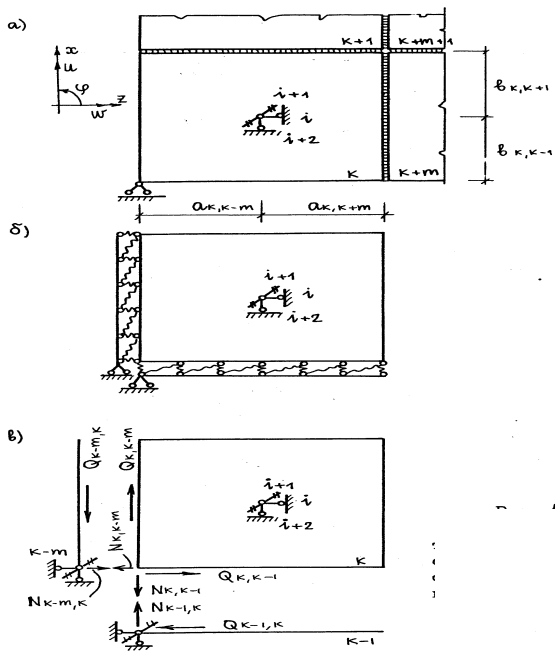
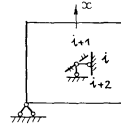


Рис.4.3.3. Граничные условия при точечно-угловом неподвижном опирании; а) исходная схема, б) схема МСД, в) внутренние силы

ЭЛЕМЕНТ МСД	УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ	СВЯЗЬ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	NN П.П.	k-m			k-1		
				1	2	3	4	5	6
K	$\sum Z_k$	i	7	-1	2				
	$\sum M_k$	i+1	8	$-b_{k,k-1}$		$-a_{k,k-m}$	$a_{k,k-m}$		
	$\sum X_k$	i+2	9			1	-1		



$$R_{i,i} = h'_{k,k-m} + \xi'_{k,k-1} + \xi_{k,k+1} + h_{k,k+m};$$

$$R_{i,i+1} = b_{k,k-1} * \xi'_{k,k-1} - b_{k,k+1} * \xi_{k,k+1} + b_{k,k-1} * h'_{k,k-m};$$

$$R_{i+1,i+1} = a_{k,k-m}^2 * \xi'_{k,k-m} + a_{k,k-m}^2 * h'_{k,k-1} + b_{k,k-1}^2 * h'_{k,k-m} + \omega_{k,k+1} + b_{k,k+1}^2 * \xi_{k,k+1} + \omega_{k,k-m} + a_{k,k-m}^2 * \xi_{k,k+m};$$

$$R_{i+1,i+2} = -a_{k,k-m} * \xi'_{k,k-m} - a_{k,k-m} * h'_{k,k-1} + a_{k,k-m} * \xi_{k,k+m};$$

$$R_{i+2,i+2} = \xi'_{k,k-m} + h'_{k,k-1} + h_{k,k+1} + \xi_{k,k+m};$$

$$h'_{k,k-m} = E k A_{k,k-m} / a_{k,k-m};$$

$$\xi'_{k,k-m} = G k A_{k,k-m} / a_{k,k-m} \alpha_{k,k-m};$$

$$h'_{k,k-1} = E k A_{k,k-1} / b_{k,k-1};$$

$$\xi_{k,k-1} = G k A_{k,k-1} / b_{k,k-1} \alpha_{k,k-1}.$$

Рис. 4.3.4. Граничные условия при точечно-угловом неподвижном опирании.

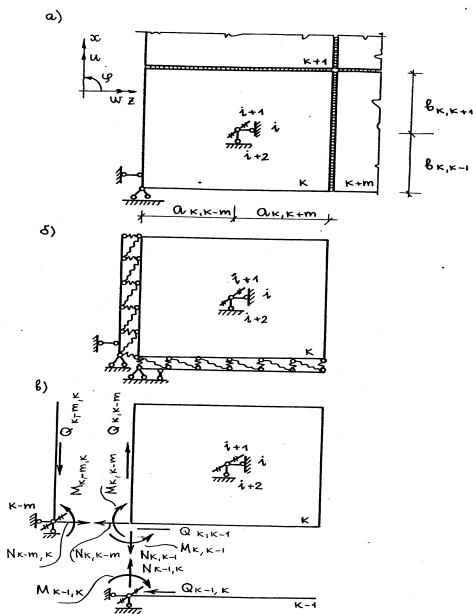
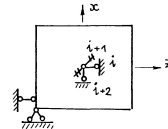


Рис.4.3.5. Граничные условия при угловом защемлении; а) исходная схема, б) схема МСД; в) внутренние силы

ЭЛЕМЕНТ МСД	УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ	СВЯЗЬ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	NN П.П.	k-m			k-1		
				1	2	3	4	5	6
K	$\sum Z_k$	i	7	-1	2				
	$\sum M_k$	i+1	8	$b_{k,k-1}$	-1	$a_{k,k-m}$	$a_{k,k-m}$	1	$b_{k,k-1}$
	$\sum X_k$	i+2	9			1	-1		



$$R_{i,i} = h'_{k,k-m} + \xi'_{k,k-1} + \xi_{k,k+1} + h_{k,k+m};$$

$$R_{i,i+1} = b_{k,k-1} * h'_{k,k-m} + b_{k,k-1} * \xi_{k,k+1} - b_{k,k+1} * \xi_{k,k+1};$$

$$R_{i+1,i+1} = b_{k,k-1}^2 * h'_{k,k-m} + \omega_{k,k-1} + a_{k,k-m}^2 * \xi'_{k,k-1} + a_{k,k-m}^2 * h'_{k,k-1} + \omega_{k,k-1} + b_{k,k-1}^2 * \xi_{k,k-1} + \omega_{k,k+1} - b_{k,k+1}^2 * \xi_{k,k+1} + \omega_{k,k-m} + a_{k,k-m}^2 * \xi_{k,k+m};$$

$$R_{i+1,i+2} = -a_{k,k-m} * \xi'_{k,k-m} - a_{k,k-m} * h'_{k,k-1} + a_{k,k-m} * \xi_{k,k+m};$$

$$R_{i+2,i+2} = \xi'_{k,k-m} + h'_{k,k-1} + h_{k,k+1} + \xi_{k,k+m};$$

$$h'_{k,k-m} = E k A_{k,k-m} / a_{k,k-m}; \quad \omega_{k,k-m} = E k J_{k,k-m} / a_{k,k-m};$$

$$\xi'_{k,k-m} = G k A_{k,k-m} / a_{k,k-m} \alpha_{k,k-m}; \quad \omega_{k,k-1} = E k J_{k,k-1} / b_{k,k-1};$$

$$h'_{k,k-1} = E k A_{k,k-1} / b_{k,k-1};$$

$$\xi_{k,k-1} = G k A_{k,k-1} / b_{k,k-1} \alpha_{k,k-1}.$$

Рис. 4.3.6. Граничные условия при угловом защемлении



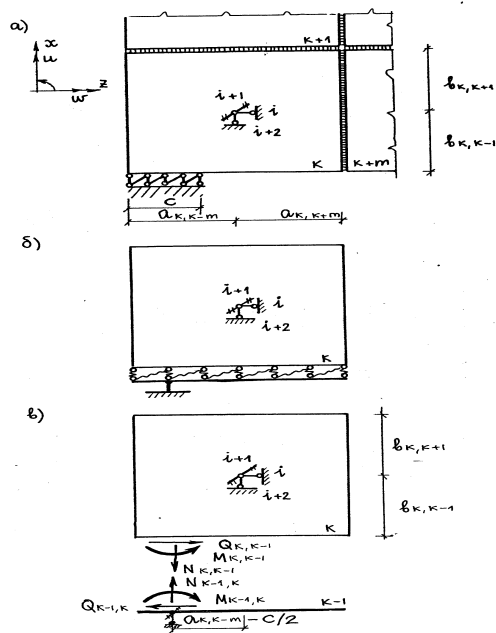
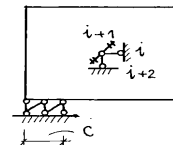


Рис.4.3.9. Граничные условия при полосовом неподвижном опирании;  
 а) исходная схема, б) схема МСД,  
 в) внутренние силы

ЭЛЕМЕНТ МСД	УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ	СВЯЗИ МЕТОДА ПЕРЕВЕРТКИ	N И П	K-1		
				N <sub>k,k-1</sub>	M <sub>k,k-1</sub>	Q <sub>k,k-1</sub>
K	ΣZ <sub>k</sub>	i	7	1	2	3
	ΣM <sub>k</sub>	i+1	8	0 <sub>k,k-m</sub> - c/2	1	1
	ΣX <sub>k</sub>	i+2	9	-1		



$$R_{i,i} = \xi'_{k,k-1} + \xi'_{k,k+1} + h'_{k,k+m};$$

$$R_{i,i+1} = b_{k,k-1} * \xi'_{k,k-1} - b_{k,k+1} * \xi'_{k,k+1};$$

$$R_{i+1,i+1} = (a_{k,k-m} - c/2)^2 * h'_{k,k-1} + \omega'_{k,k-1} + b_{k,k-1}^2 * \xi'_{k,k-1} + \omega_{k,k+1} + b_{k,k+1}^2 * \xi'_{k,k+1} + \omega_{k,k+m} + a_{k,k+m}^2 * \xi'_{k,k+m};$$

$$R_{i+1,i+2} = -(a_{k,k-m} - c/2) * h'_{k,k-1};$$

$$R_{i+2,i+2} = h'_{k,k-1} + h'_{k,k+1} + \xi'_{k,k+m};$$

$$h'_{k,k-1} = E_k A_{k,k-1} / b_{k,k-1};$$

$$\xi'_{k,k-1} = G_k A_{k,k-1} / b_{k,k-1} * \alpha_{k,k-1};$$

$$\omega'_{k,k-1} = E_k J_{k,k-1} / b_{k,k-1}.$$

Рис.4.3.10. Граничные условия при полосовом неподвижном опирании

В первом из них опора шарнирно подвижная, способная воспринимать продольную, силу  $N_{k,k-1}$  и изгибающий момент  $M_{k,k-1}$ .

Матрица коэффициентов при уравнениях равновесия  $[A]_k$ , относящихся к грани со стороны (k-1) -го элемента представлена на рис.4.3.8, здесь даны и соответствующие элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ .

При шарнирно-неподвижном линейном опирании внутренние силы со стороны (k-1)-го элемента содержат продольную силу  $N_{k,k-1}$ , поперечную силу  $Q_{k,k-1}$  и изгибающий момент  $M_{k,k-1}$ ; на рис.4.3.10 приведены элементы матрицы  $[A]_k$  и матрицы  $[R]_k$  для этого случая опирания.

Таким образом, порядок составления матрицы внешней жесткости всей плоской несущей системы  $[R]$  при всех типах опирания принимается одним: формируется матрица  $[A]_k$  для опорного элемента в зависимости от способа опирания, выделяются соответствующие ей элементы матрицы  $[K]_k$  и

соответствующим перемножением вычисляются элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ , которые входят в полную матрицу  $[R]$  всей плоской системы.

Опорные реакции вычисляются после решения системы уравнений метода перемещений по общим формулам (4.2.3.).

Подобным образом строится матрица  $[R]_k$  при опирании других элементов МСД; описание может быть не только внешним, но и внутриконтурным. В случае, если опоры являются податливыми, то в элементы матрицы  $[R]_k$  вносятся изменения по типу стержневых систем или так, как это будет изложено ниже для систем с реальными швами между элементами МСД.

Рассмотрим теперь принципы построения элементов матрицы  $[R]_k$  при наличии реальных швов между  $k$ -м типовым элементом МСД и всеми его окружающими элементами:  $(k-m), (k-1), (k+1)$  и  $(k+m)$ .

Матрицы  $[\mathcal{E}]_{k,j}^*$  ( $j = k-m, k-1, k+1, k+m$ ) характеризуют жесткость комплексных связей метода сосредоточенных деформаций, состоящих из собственных и реальных связей.

Матрицы  $[\mathcal{E}]_{k,j}^*$  ( $j = k-m, k-1, k+1, k+m$ ) характеризуют жесткость собственных связей и вычисляются по формулам табл.4.2.4 - 4.2.7.

Элементами матриц  $[S]_{k,j}$  являются характеристики жесткости реальных швов и они принимаются по нижеприведенным формулам (табл.4.3.1.).

Таблица 4.3.

Элементы матриц  $[\mathcal{E}]_k^*$  при реальных связях.

$\eta_{k,k-m}^s$			$\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]$
	$\omega_{k,k-m}^s$		
	$[S]_{k,k-m}$	$\xi_{k,k-m}^s$	
$\eta_{k,k-1}^s$			$\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]$
	$\omega_{k,k-1}^s [S]_{k,k-1} =$		
		$\xi_{k,k-1}^s$	
$\eta_{k,k+1}^s$			$\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]$
	$\omega_{k,k+1}^s [S]_{k,k+1} =$		

		$\xi_{k,k+1}^s$	
$\eta_{k,k+m}^s$	$\omega_{k,k}^s [S]_{k,k+m} =$	$\xi_{k,k+m}^s$	];

154

Матрицы жесткости комплексных швов:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{E}]_{k,k-m}^* &= \left[ [\mathcal{E}]_{k,k-m}^{-1} + [S]_{k,k-m}^{-1} \right]^{-1}; \\
 [\mathcal{E}]_{k,k-1}^* &= \left[ [\mathcal{E}]_{k,k-1}^{-1} + [S]_{k,k-1}^{-1} \right]^{-1}; \\
 [\mathcal{E}]_{k,k+1}^* &= \left[ [\mathcal{E}]_{k,k+1}^{-1} + [S]_{k,k+1}^{-1} \right]^{-1}; \\
 [\mathcal{E}]_{k,k+m}^* &= \left[ [\mathcal{E}]_{k,k+m}^{-1} + [S]_{k,k+m}^{-1} \right]^{-1};
 \end{aligned}$$

В этих формулах применены операции сложения матриц податливости, обратных матрицам жесткостей, при последовательном соединении собственных и реальных связей по каждой плоскости сосредоточенных деформаций (рис.4.2.2.).

Разумеется, при отсутствии реальных связей какого-либо типа (сжатия-растяжения с характеристиками  $\eta$ , изгиба с характеристиками  $\omega$  и сдвига с характеристиками  $\xi$ ) со стороны какой-либо грани типового к-го элемента МСД формулы табл.4.3.1 сохраняются; они являются общими, в них достаточно принять равной нулю соответствующую жесткостную характеристику, чтобы получить любой частный результат: а именно - примыкание к опорным жестким и податливым опорам, соединение элементов МСД друг с другом без реальных швов и т.д.

#### 4.4. Соотношение между внутренними силами и перемещениями. Учет коэффициента поперечного расширения

Расчет стержневых систем в упругой стадии их работы и в упругопластической стадии для железобетонных стержней, исходя из того, что продольные "волокна" не давят друг на друга. В этом случае коэффициент поперечного расширения принимается равным нулю. Это же допущение было распространено на плоские несущие системы в п.4.2., благодаря чему

144

существенно упростились процедуры составления матриц жесткости сечений  $[C]_k$ , матрицы элементной жесткости  $[\mathcal{E}]_k$ , матрицы внутренней жесткости  $[K]_k$  и матрицы внешней жесткости всей системы  $[R]$ .

В практике расчета строительных конструкций часто пренебрегаются коэффициентом поперечного расширения. Следует, однако, оценить правомерность таких допущений в методе сосредоточенных деформаций.

Рассмотрим прямоугольный элемент, полученный в результате деления исходной плоской несущей системы, нагруженный продольными силами по противоположным граням, которые получили: соответствующие линейные перемещения (рис.4.4.1).

Воспользуемся известными уравнениями теории упругости

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_z + \mu \varepsilon_x); \\ \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_z) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

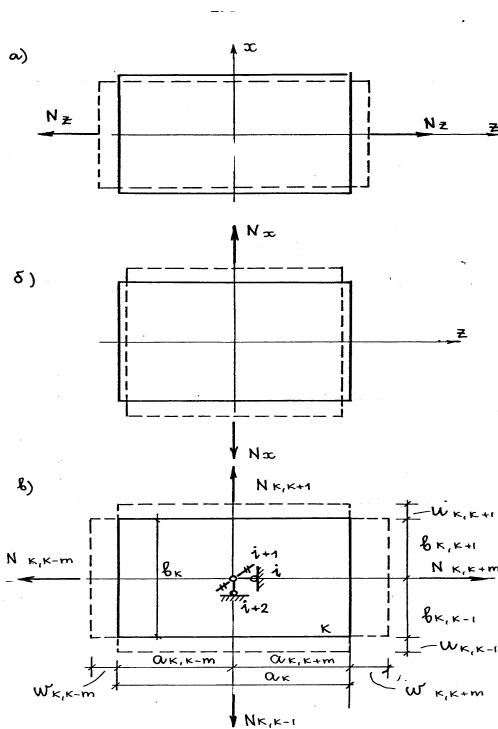


Рис. 4.4.1. Деформирование элемента при осевых силах;  
а) в направлении оси Z,  
б) в направлении оси X,  
в) в перемещении граней

В данном случае, переходя от напряжений к усилиям и от деформаций к перемещениям, запишем:

$$\begin{aligned} N_{k,k-m} &= \frac{(EA)_{k,k-m}}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\omega_{k,k-m}}{a_{k,k-m}} + \mu(u_{k,k-1} + u_{k,k+1}) / \nu_k \right]; \\ N_{k,k+m} &= \frac{(EA)_{k,k+m}}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\omega_{k,k+m}}{a_{k,k+m}} + \mu(u_{k,k+1} + u_{k,k-1}) / \nu_k \right]; \end{aligned}$$

$$N_{k,k-1} = \frac{(EA)_{k,k-1}}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\omega_{k,k-1}}{a_{k,k-1}} + \mu(u_{k,k-m} + u_{k,k+m}) / a_k \right]; \quad (4.4.2)$$

$$N_{k,k+1} = \frac{(EA)_{k,k+1}}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\omega_{k,k+1}}{a_{k,k+1}} + \mu(u_{k,k-m} + u_{k,k+m}) / a_k \right]$$

Формулы (4.4.2) записаны в предположении, что деформации перпендикулярного направления приняты усредненными.

Таким образом удается сравнительно просто, и вместе с тем достаточно строго связать внутренние силы по граням элемента МСД с линейными перемещениями в направлениях действия этих сил. В случае, если

$$u_{k,k-1} = u_{k,k+1} = u_k; \quad v_{k,k-1} = v_{k,k+1} = v_k / 2,$$

$$\omega_{k,k-m} = \omega_{k,k+m} = \omega_k; \quad a_{k,k-m} = a_{k,k+m} = a_k / 2,$$

$$(EA)_{k,k-m} = (EA)_{k,k+m} = (EA)_{k,z}; \quad (EA)_{k,k-1} = (EA)_{k,k+1} = (EA)_{k,z};$$

становятся равными и соответствующие силы

$$N_{k,k-m} = N_{k,k+m} = N_z; \quad N_{k,k-1} = N_{k,k+1} = N_x;$$

тогда вместо четырех уравнений (4.4.2.) получится два уравнения, аналогичных (4.4.1.), но связывающих внутренние силы и перемещения

$$N_z = \frac{2E_k A_{k,z}}{1 - \mu^2} (\omega_k / a_k + \mu u_k / v_k); \quad (4.4.3)$$

$$N_x = \frac{2E_k A_{k,x}}{1 - \mu^2} (u_k / v_k + \mu \omega_k / a_k)$$

Таким образом, уравнения (4.4.2.) возможны при условии, что неуравновешенные силы по противоположным граням воспринимаются связями метода перемещений.

Уравнения (4.4.2.) можно переписать в матричной форме:

$$\{N\}_k = [\mathcal{E}]_{k,N} * \{v\}_{k,N}, \quad (4.4.4)$$

где:  $\{N\}_k = \{N_{k,k-m}; N_{k,k-1}; N_{k,k+1}; N_{k,k+m}\}^T$ ,

$\{v\}_{k,N}^T = \{\omega_{k,k-m}; u_{k,k-1}; u_{k,k+1}; \omega_{k,k+m}\}^T$  - вектор перемещений граней  $k$ -го элемента от действия продольных сил.

Матрица жесткости  $[\mathcal{E}]_{k,N}$  и (только для продольных сил) представлена в табл.4.4.1.

Элементы матрицы  $[\mathcal{E}]_{k,N}$  отвечают принципу симметрии; так, например,  $\mu A_{k,k-m} / \epsilon_k = \mu A_{k,k-1} / a_k$  что является необходимым признаком правильности записи  $[\mathcal{E}]_{k,N}$ .

Матричное уравнение (4.4.4.) можно решить относительно линейных перемещений

$$[\nu]_{k,N} = [B]_{k,N} \{N\}_k \quad (4.4.5)$$

где:  $[B]_{k,N} = [\mathcal{E}]_{k,N}^{-1}$  - матрица податливости сечений (только для продольных сил)  $k$ -го элемента МСД.

Соотношения, подобные (табл.4.4.1.) можно записать не только для  $k$ -го элемента МСД, но и всех с ним связанных плоскостями сосредоточенных деформаций.

Перейдем к построению матрицы жесткости  $[\mathcal{E}]_{k,N}$ , т.е. вычислению усилий в связях по плоскостям сосредоточенных деформаций, развивающихся при линейных смещениях  $k$ -го элемента относительно всех его окружающих.

Для  $(k-m)$ -го элемента можно тоже записать соотношение типа (4.4.5).

$$[\nu]_{k-m,N} = [B]_{k-m,N} \{N\}_{k-m} \quad (4.4.6)$$

Таблица 4.4.1.

Элементы матрицы жесткости  $[\mathcal{E}]_k$  при учете поперечного расширения

$N_{k,k-m}$	$N_{k,k-1}$	$N_{k,k+1}$	$N_{k,k+m}$
$\frac{A_{k,k-m}}{a_{k,k-m}}$	$\mu_k \frac{A_{k,k-m}}{\epsilon_k}$	$\mu_k \frac{A_{k,k-m}}{\epsilon_k}$	
$\mu_k \frac{A_{k,k-1}}{a_k}$	$\frac{E_k}{1 - \mu_k^2}$		$\mu_k \frac{A_{k,k-m}}{a_k}$
$\mu_k \frac{A_{k,k+1}}{a_k}$		$\frac{A_{k,k+1}}{\epsilon_{k,k+1}}$	$\mu_k \frac{A_{k,k+1}}{a_k}$
	$\mu_k \frac{A_{k,k+m}}{\epsilon_k}$	$\mu_k \frac{A_{k,k+m}}{\epsilon_k}$	$\frac{A_{k,k+1}}{a_{k,k+m}}$

Рассмотрим поведение в  $k$ -ом и  $(k-m)$ -ом элементах МСД по плоскости сосредоточенных деформаций между ними. Примем в  $k$ -ом элементе МСД перемещения  $u_{k,k-1} = 0$ ;  $u_{k,k+1} = 0$ ;  $\omega_{k,k+m} = 0$ ; таким же образом в  $(k-m)$ -ом элементе МСД  $u_{k-m,k-m-1} = 0$ ;  $u_{k-m,k-m+1} = 0$ ;  $\omega_{k-m,k-zm} = 0$ ; перемещения по смежной плоскости сосредоточенных деформаций тогда выразятся так

$$\omega_{k,k-m} = \left( \frac{E_k A_{k,k-m}}{1 - \mu_k^2} \cdot \frac{1}{a_{k,k-m}} \right)^{-1} * N_{k,k-m};$$

$$\omega_{k-m,k} = \left( \frac{E_{k-m} A_{k-m,k}}{1 - \mu_{k-m}^2} \cdot \frac{1}{a_{k-m,k}} \right)^{-1} * N_{k-m,k} \quad (4.4.7)$$

Суммируя эти перемещения и учитывая, что  $N_{k,k-m} = N_{k-m,k}$ , получим

$$(\omega_{k,k-m} + \omega_{k-m,k}) =$$

$$= \left( \left( \frac{E_k A_{k,k-m}}{1 - \mu_k^2} \cdot \frac{1}{a_{k,k-m}} \right)^{-1} + \left( \frac{E_{k-m} A_{k-m,k}}{1 - \mu_{k-m}^2} \cdot \frac{1}{a_{k-m,k}} \right)^{-1} \right) * N_{k,k-m} \quad (4.4.8)$$

или 
$$\Delta\omega_{k,k-m} = \eta_{k,k-m}^{-1} * N_{k,k-m} \quad (4.4.9)$$

где:  $\eta_{k,k-m}^{-1}$  - элемент матрицы жёсткости для  $k$ -го элемента МСД -  $[K]_k$ , означающий величину продольных сил по плоскости сосредоточенных деформаций между  $k$ -м и  $(k-m)$ -м элементами при единичном взаимном их смещении относительно друг друга.

Элемент внутренней жесткости  $[K]_k$  для  $k$ -го элемента отличается от ранее полученного в формуле (4.2.7.) лишь наличием коэффициентов поперечного расширения  $\mu_k$  и  $\mu_{k-m}$  в  $(k-m)$  и  $(k)$  элементах МСД.

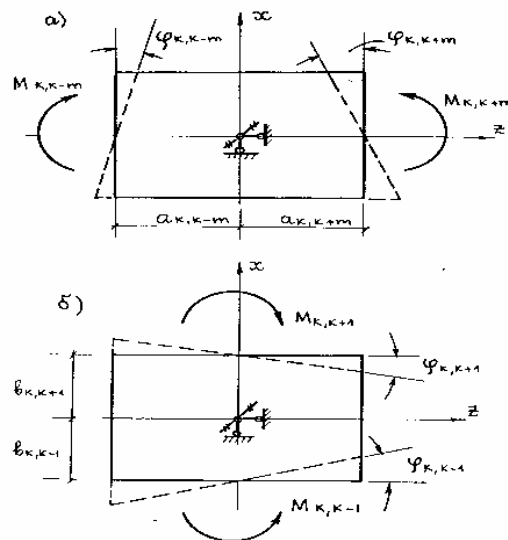


Рис. 4.4.2. Деформирование элемента под действием изгибающих моментов; а) при моментах  $M_{k,k-m}$ ,  $k$ ,  $k+m$  б) при моментах  $M_{k,k-1}$ ,  $k$ ,  $k+1$

**Соотношения между кривизнами (углами поворотов по граням  $k$ -го элемента МСД) и соответствующими изгибающими моментами запишется так:**

$$\begin{aligned}
M_{k,k-m} &= \frac{E_k J_{k,k-m}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{1}{a_{k,k-m}} * \varphi_{k,k-m}; \\
M_{k,k-1} &= \frac{E_k J_{k,k-1}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{e}_{k,k-m}} * \varphi_{k,k-1}; \\
M_{k,k+1} &= \frac{E_k J_{k,k+1}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{e}_{k,k+m}} * \varphi_{k,k+1}; \\
M_{k,k+m} &= \frac{E_k J_{k,k+m}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{1}{a_{k,k+m}} * \varphi_{k,k+m}
\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

или

$$\{M\}_k = [\mathfrak{E}]_{k,m} * \{\nu\}_{k,m} \tag{4.4.11}$$

В этих формулах взаимное влияние изгибающих моментов не проявляется, так гипотеза плоского деформирования принимается для всех сечений, в том числе перпендикулярных к плоскостям действия изгибающих моментов (рис.4.4.2).

По смежным плоскостям сосредоточенных деформаций, например, между  $k$ -м и  $(k-m)$ -м элементами МСД, взаимные угловые смещения запишутся по аналогии с (4.4.10.).

$$\begin{aligned}
(\varphi_{k,k-m} + \varphi_{k-m,k}) &= \\
&= \left( \left( \frac{E_k J_{k,k-m}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{1}{a_{k,k-m}} \right)^{-1} + \left( \frac{E_{k-m} J_{k-m,k}}{1-\mu_{k-m}^2} \cdot \frac{1}{a_{k-m,k}} \right)^{-1} \right) * M_{k,k-m}
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

или

$$\Delta\varphi_{k,k-m} = (\omega_{k,k-m})^{-1} * M_{k,k-m} \tag{4.4.13}$$

где:  $\omega_{k,k-m}$  - элемент матрицы внутренней жесткости  $[K]_k$ , для  $k$ -го элемента, означающий величину изгибающего момента по плоскости сосредоточенных деформаций между  $(k-m)$ -м и  $k$ -м элементами МСД при их единичном взаимном угловом смещении.

Рассмотрим теперь действие поперечных сил по граням  $k$ -го элемента МСД (рис.4.4.3.). Для этого случая сохраняют силу соотношения между внутренними силами (поперечными силами) и перемещениями, установленными ранее.

$$\begin{aligned}
Q_{k,k-m} &= \frac{E_k A_{k,k-m}}{2(1+\mu_k)a_{k,k-m}} \Delta_{k,k-m}; & Q_{k,k-1} &= \frac{E_k A_{k,k-1}}{2(1+\mu_k)\mathfrak{e}_{k,k-1}} \Delta_{k,k-1}; \\
Q_{k,k+1} &= \frac{E_k A_{k,k+1}}{2(1+\mu_k)\mathfrak{e}_{k,k+1}} \Delta_{k,k+1}; & Q_{k,k+m} &= \frac{E_k A_{k,k+m}}{2(1+\mu_k)a_{k,k+m}} \Delta_{k,k+m};
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

где:  $\Delta_{k,k-m}$ ;  $\Delta_{k,k-1}$ ;  $\Delta_{k,k+1}$ ;  $\Delta_{k,k+m}$ ; -смещения (сдвиги) граней с соответствующими индексами.



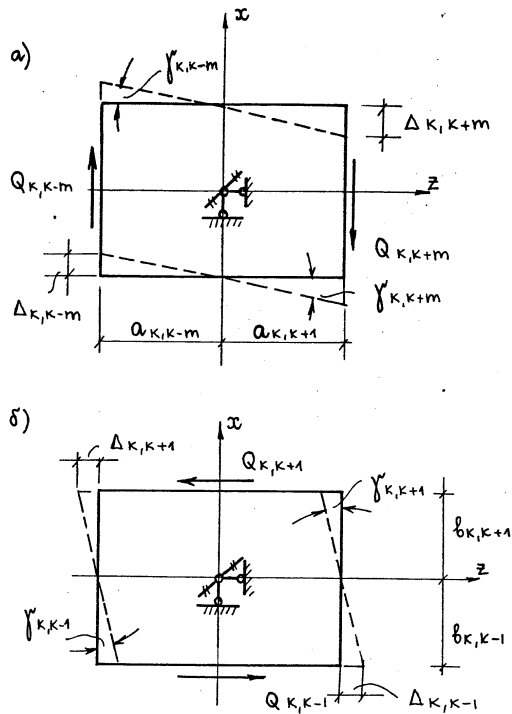


Рис. 4.4.3. Деформация элемента при сдвиге;

а) при моментах  $M_{k,k-m,k,k+m}$

б) при моментах  $M_{k,k-1,k,k+1}$

На границах между соседними элементами МСД по плоскостям сосредоточенных деформаций имеют место соотношения, аналогичные вышеприведенным; например, для  $k$ -го и  $(k-m)$ -го элементов МСД при

$$\begin{aligned}
 Q_{k,k-m} &= Q_{k-m,k} : \\
 \Delta_{k-m,k} + \Delta_{k,k-m} &= \left( \left( \frac{E_{k-m} A_{k-m,k} a_{k-m,k}^{-1}}{2(1 + \mu_{k-m}) x_{k-m,k}} \right)^{-1} + \right. \\
 &\left. + \left( \frac{E_k A_{k,k-m} a_{k,k-m}^{-1}}{2(1 + \mu_k) x_{k,k-m}} \right)^{-1} \right) * Q_{k,k-m}
 \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

или

$$\Delta_{k-m,k} + \Delta_{k,k-m} = (\xi_{k,k-m})^{-1} Q_{k,k-m} \tag{4.4.16}$$

где:  $\xi_{k,k-m}$  - элемент матрицы внутренней жесткости  $[\mathfrak{E}]_{k,Q}$ , для  $k$ -го элемента, означающий величину поперечной силы по плоскости сосредоточенных деформаций между  $(k-m)$ -м и  $k$ -м элементами МСД при их единичном сдвиге.  $\Delta_{k,k-m} + \Delta_{k-m,k} = 1$

Запишем теперь полную матрицу  $[K]_k$  для  $k$ -го элемента, составляя ее из матриц  $[\mathcal{E}]_{k,N}$ ,  $[\mathcal{E}]_{k,M}$  и  $[\mathcal{E}]_{k,Q}$  (табл.4.4.2.).

В таблице  $[K]_k$  элементы типа  $\mathcal{E}_{1,1}$ ;  $\mathcal{E}_{2,2}$ ;  $\mathcal{E}_{3,3}$ ; и  $\mathcal{E}_{4,4}$  вычисляются по формулам (4.4.8.);

Элементы  $\mathcal{E}_{1,4} = \mathcal{E}_{4,1}$ ;  $\mathcal{E}_{1,7} = \mathcal{E}_{7,1}$ ;  $\mathcal{E}_{4,10} = \mathcal{E}_{10,4}$ ;  $\mathcal{E}_{7,10} = \mathcal{E}_{10,7}$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{1,4} &= \left( \left( \frac{E_k A_{k,k-m} \mu_k}{(1 - \mu_k^2) \mathbf{e}_k} \right)^{-1} + \left( \frac{E_{k-1} A_{k-1,k-m-1} \mu_{k-1}}{(1 - \mu_{k-1}^2) \mathbf{e}_{k-1}} \right)^{-1} \right)^{-1}; \\
 \mathcal{E}_{1,7} &= \left( \left( \frac{E_k A_{k,k-m} \mu_k}{(1 - \mu_k^2) \mathbf{e}_k} \right)^{-1} + \left( \frac{E_{k+1} A_{k+1,k+m+1} \mu_{k+1}}{(1 - \mu_{k+1}^2) \mathbf{e}_{k+1}} \right)^{-1} \right)^{-1}; \\
 \mathcal{E}_{4,10} &= \left( \left( \frac{E_k A_{k,k+m} \mu_k}{(1 - \mu_k^2) \mathbf{a}_k} \right)^{-1} + \left( \frac{E_{k-1} A_{k-1,k-m-1} \mu_{k-1}}{(1 - \mu_{k-1}^2) \mathbf{e}_{k-1}} \right)^{-1} \right)^{-1}; \\
 \mathcal{E}_{7,10} &= \left( \left( \frac{E_k A_{k,k+1} \mu_k}{(1 - \mu_k^2) \mathbf{a}_k} \right)^{-1} + \left( \frac{E_{k+1} A_{k+1,k+m+1} \mu_{k+1}}{(1 - \mu_{k+1}^2) \mathbf{a}_{k+1}} \right)^{-1} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Элементы  $\mathcal{E}_{2,2}$ ;  $\mathcal{E}_{5,5}$ ;  $\mathcal{E}_{8,8}$  и  $\mathcal{E}_{11,11}$  вычисляются по формулам (4.4.10).

Элементы  $\mathcal{E}_{3,3}$ ;  $\mathcal{E}_{6,6}$ ;  $\mathcal{E}_{9,9}$  и  $\mathcal{E}_{12,12}$  вычисляются по формуле (4.4.15).

Для составления матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  следует вычислить произведение  $[A]_k [\mathcal{E}]_k [A]_k^T$ , при этом матрицы  $[A]_k$  принимаются без изменений по п.4.3.2; а матрица  $[K]_k$  по табл.4.4.2.

Таблица 4.4.2.

Матрица жесткости  $[K]_k$  для плоской задачи.

Элементы МСД	№	к-м			к-1			к+1			к+Г		
		$N_{k,k-m}$	$M_{k,k-m}$	$Q_{k,k-m}$	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$	$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}$	$Q_{k,k+1}$	$N_{k,k+m}$	$M_{k,k+m}$	$Q_{k,k+m}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к-м	1	$\vartheta_{1,1}$			$\vartheta_{1,4}$			$\vartheta_{1,7}$					
	2		$\vartheta_{2,2}$										
	3			$\vartheta_{3,3}$									
к-1	4	$\vartheta_{4,1}$			$\vartheta_{4,4}$						$\vartheta_{4,10}$		
	5					$\vartheta_{5,5}$							
	6						$\vartheta_{6,6}$						
к+1	7	$\vartheta_{7,1}$						$\vartheta_{7,7}$			$\vartheta_{7,10}$		
	8								$\vartheta_{8,8}$				
	9									$\vartheta_{9,9}$			
к+Г	10				$\vartheta_{10,4}$			$\vartheta_{10,7}$			$\vartheta_{10,10}$		
	11											$\vartheta_{11,11}$	
	12												$\vartheta_{12,12}$

#### 4.5. Расчет плоско - напряженных железобетонных несущих систем многоэтажных зданий МСД.

Основная задача состоит в формировании матрицы внешней жесткости  $[R]$  плосконапряженной железобетонной системы. Решение этой задачи состоит из следующих этапов:

- устанавливаются соотношения между напряжениями и деформациями с помощью материальной матрицы для бетона и арматуры в условиях двухосного напряженно-деформированного состояния;

- принимаются законы деформирования в элементе МСД, т.е. законы распределения деформаций сжатия (растяжения) и сдвига по плоскостям сосредоточенных деформаций;

- записываются соотношения между перемещениями по граням элемента МСД и соответствующими деформациями;

- строится связь между внутренними силами по всем граням элемента МСД и перемещениями по этим граням;

- формируется матрица  $[C]_k$  жесткости сечений для типового  $k$ -го элемента МСД;

- определяется элементная матрица (внутренней жесткости)  $[K]_k$  для типового  $k$ -го элемента МСД и всей плоской системы  $[K]$ ;

- формируется матрица коэффициентов уравнений равновесия для  $k$ -го элемента  $[A]_k$  и всей плоской системы  $[A]$ ;

- строится матрица внешней жесткости элемента  $[R]_k$  и всей системы  $[R]$ ;

- составляется и решается система уравнений метода перемещений с нелинейной матрицей жесткости  $[R]$ ;

- из решения системы уравнений метода перемещений находятся перемещения всех элементов МСД, а также сосредоточенные деформации (взаимные перемещения) по граням между элементами МСД;

- по сосредоточенным деформациям отыскиваются деформации в бетоне и арматуре в любой стадии напряженно-деформированного состояния и с учетом длительности действия внешних сил, делается вывод о достаточной или недостаточной способности плоской железобетонной системы воспринимать заданные внешние силы или отыскиваются такие внешние силы (нагрузки), которые могут быть восприняты плоской железобетонной системой, задача решается итерационным способом с проверкой его сходимости; при сходящемся (по перемещениям) процессе плоская железобетонная система отвечает условиям равновесия, т.е. ее несущая способность достаточна.

Перейдем к выводу необходимых соотношений в соответствии с намеченными этапами.

Соотношения между нормальными напряжениями для бетона в любой точке плоского элемента МСД  $\sigma_z$  и  $\sigma_x$  касательными напряжениями  $\tau_{xz}$  и соответствующими деформациями примем в общем, виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= D'_x(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx}) * \varepsilon_x; \\ \sigma_z &= D'_z(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx}) * \varepsilon_z; \\ \tau_{xz} &= G'(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx}) * \gamma_{xz},\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

где:  $D'_z(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx})$  и  $D'_x(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx})$  - секущие "одноосные" модули продольных деформаций, как функции уровня длительности и характера напряженно-деформированного состояния;  $G'(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx})$  - секущий модуль сдвига.

Для арматуры диаграмма " $\sigma_s - \varepsilon_s$ " принимается одноосной без учета объемного напряженно-деформированного состояния.

$$\sigma_s = E'_s \varepsilon_s\tag{4.5.2}$$

где:  $E'_s$  - секущий модуль продольных деформаций.

Конкретные аналитические выражения для элементов матрицы жесткости  $[D]$  могут быть различными, но общая запись в форме (4.5.1.) позволяет построить необходимые расчетные формулы в достаточно компактной форме.

Для арматуры можно также принять соотношения между напряжениями и деформациями по типу (4.5.1.), однако, такая общая запись будет, видимо, избыточно сложной.

Деформирование элементов МСД примем таким, которое позволяет наиболее просто, и вместе с тем с практической точки зрения, обеспечить достаточную точность: продольные деформации сжатия (растяжения) в направлении координатных осей примем распределенными в пределах каждой стороны элемента МСД по линейному закону (гипотеза плоских сечений), а поперечные и сдвиговые деформации принимаются постоянными (усредненными) по каждой из сторон элемента МСД.

Запишем соотношение между деформациями и перемещениями для каждой из граней  $k$ -го элемента МСД в общем виде

$$\{\varepsilon\}_k = [L]_k * \{v\}_k\tag{4.5.3}$$

где:  $\{\varepsilon\}_k$  - вектор деформаций,

$[L]_k$  - матрица, зависящая от геометрических размеров  $k$ -го элемента (геометрическая матрица),

$\{v\}_k$  - вектор перемещений по граням  $k$ -го элемента.

Подставляя (4.5.3.) в (4.5.1.) запишем

$$\{\sigma\}_k = [D]_k [L]_k \{v\}_k \quad (4.5.4)$$

Внутренние силы по граням  $k$ -го элемента можно выразить через напряжение так:

$$\{F\}_k = [S]_k [D]_k [L]_k \{v\}_k = [\mathcal{E}]_k \{v\}_k \quad (4.5.5)$$

Или, с учетом (4.5.4)

$$\{F\}_k = [S]_k [D]_k [L]_k \{v\}_k = [\mathcal{E}]_k \{v\}_k \quad (4.5.6)$$

где:  $[S]_k$  - матрица площадей по граням  $k$ -го элемента,  
 $[\mathcal{E}]_k$  - матрица жесткости  $k$ -го элемента.

Уравнение (4.5.6.) устанавливает связь между внутренними силами по граням  $k$ -го элемента и перемещениями этих граней, элементами матрицы  $[\mathcal{E}]_k$  являются внутренние силы при единичных перемещениях граней  $k$ -го элемента.

Уравнение типа (4.5.6.) записываются для всех элементов МСД, окружающих  $k$ -й элемент МСД.

Например, для  $(k-m)$ -го элемента будет справедливо соотношение

$$\{F\}_{k-m} = [\mathcal{E}]_{k-m} \{v\}_{k-m} \quad (4.5.7)$$

Решая (4.5.6.) и (4.5.7.) относительно перемещений, получим:

$$\{v\}_k = [B]_k \{F\}_k; \quad \{v\}_{k-m} = [B]_{k-m} \{F\}_{k-m} \quad (4.5.8)$$

где:  $[B]_k$  и  $[B]_{k-m}$  - матрицы податливости, обратные соответствующим матрицам жесткости  $[\mathcal{E}]_k$  и  $[\mathcal{E}]_{k-m}$ .

Просуммируем одноименные перемещения по смежным граням  $k$ -го и  $(k-m)$ -го элементов МСД, найдем

$$\{v\}_k + \{v\}_{k-m} = ([B]_k + [B]_{k-m}) * \{F\}_{k,k-m} \quad (4.5.9)$$

или  $\{F\}_{k,k-m} = \{F\}_{k-m,k} = [K]_{k,k-m} \{v\}_{k,k-m}$

где:  $\{F\}_{k,k-m} = \{F\}_{k-m,k}$  - вектор внутренних сил по линии сосредоточенных деформаций между  $(k-m)$ -м и  $k$ -м элементами;

$\{v\}_k + \{v\}_{k-m}$  - суммарное перемещение смежных граней  $(k-m)$ -го и  $k$ -го элементов;

$[K]_{k,k-m}$  - блок элементной матрицы внутренней жесткости  $k$ -го элемента МСД.

Перейдем к детальному раскрытию общих соотношений (4.5.3-4.5.9).

Рассмотрим железобетонный элемент МСД (рис.4.5.1.), внутренние силы по граням которого образуют вектор  $\{F\}_k$ , нормальные сечения по каждой из граней будем рассматривать в дискретной форме.

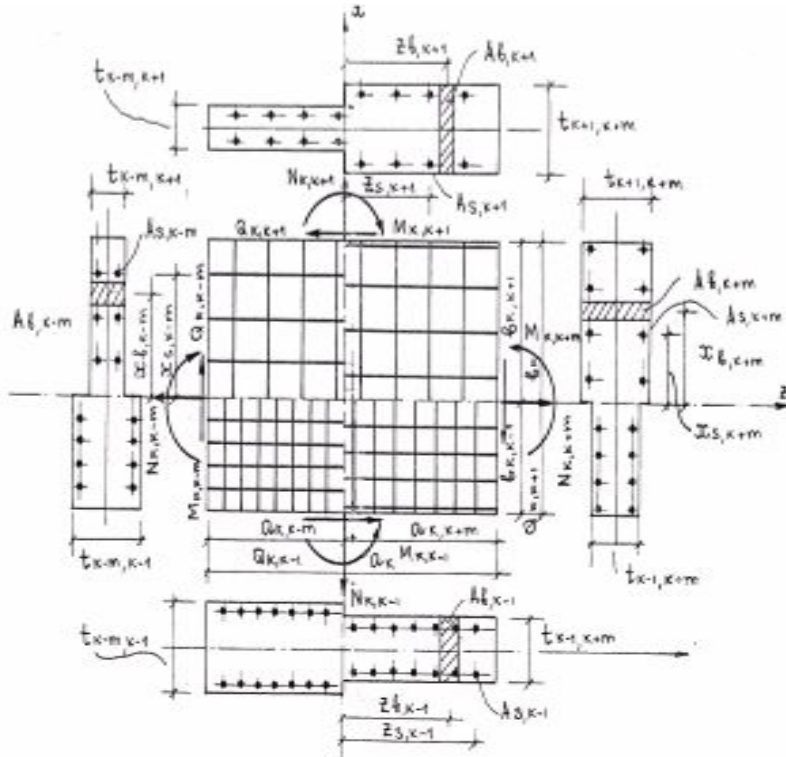


Рис. 4.5.1. Плоская задача для железобетонной плиты

Перемещения граней  $k$ -го элемента МСД принимаются по рис.4.4.2, 4.4.3, 4.4.4.

Установим соотношения между перемещениями граней  $k$ -го элемента МСД и деформациями по этим же граням.

Для  $(k, k-m)$ -и грани будем иметь в точке с координатой  $x_{\theta, (k-m)}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} - \varphi_{k,k-m} / a_{k,k-m} x_{\theta, (k-m)} ; \\ \varepsilon_x &= (u_{k,k-1} + u_{k,k+1}) / \nu_k + \varphi_{k,k-1} a_{k,k-m} / 2\nu_{k,k-1} + \varphi_{k,k+1} a_{k,k-m} / 2\nu_{k,k+1} ; \\ \gamma_{xz} &= \Delta_{k,k-m} / a_{k,k-m} \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Используя формулы (4.5.1.), запишем выражение для нормальных и касательных напряжений по  $(k, k-m)$ -й грани:

$$\begin{aligned} \sigma_{z, \theta, (k,k-m)} &= D'_z (\omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} - (\varphi_{k,k-m} / a_{k,k-m}) x_{\theta, (k-m)}) ; \\ \tau_{\theta, xz, (k,k-m)} &= G'_{\theta, k, k-m} \Delta_{k,k-m} / a_{k,k-m} \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

В формулах (4.5.1.) модули 167  $D'_z$  и  $G'_{\theta, k, k-m}$  являются

переменными в пределах длины  $(\kappa, \kappa-m)$  -ой грани и зависят от соотношения и уровня деформаций по (4.5.10.).

Подобные соотношения запишем для арматурного стержня на  $(\kappa, \kappa-m)$ -й грани с координатой  $x_{s,(\kappa-m)}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{z,s,(\kappa, \kappa-m)} &= E'_z (\omega_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} - (\varphi_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m}) x_{s, \kappa-m}); \\ \tau_{s,xz,(\kappa, \kappa-m)} &= G'_{s, \kappa, \kappa-m} \Delta_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m}\end{aligned}\quad (4.5.12)$$

Учитывая дискретную схему для  $(\kappa, \kappa-m)$  -ой грани, запишем выражения для равнодействующих для внутренних сил по этой грани:

$$\begin{aligned}N_{\kappa, \kappa-m} &= \sum_{\kappa-m} D'_{z,(\kappa, \kappa-m)} A_{\varepsilon, \kappa-m} \omega_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} - \\ &- \sum_{\kappa-m} D'_{z,(\kappa, \kappa-m)} A_{\varepsilon, \kappa-m} x_{\varepsilon, (\kappa-m)} \varphi_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} + \\ &+ \sum_{\kappa-m} E'_{s, \kappa-m} A_{s, \kappa-m} \omega_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} - \\ &- \sum_{\kappa-m} E'_{s, \kappa-m} A_{s, \kappa-m} x_{s, \kappa-m} \varphi_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m}; \\ M_{\kappa, \kappa-m} &= - \sum_{\kappa-m} D'_{z, \kappa, \kappa-m} x_{\varepsilon, \kappa, \kappa-m} \omega_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} + \\ &+ \sum_{\kappa-m} D'_{z,(\kappa, \kappa-m)} x_{\varepsilon, \kappa, \kappa-m}^2 \varphi_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} - \\ &- \sum_{\kappa-m} E'_{s, \kappa, \kappa-m} A_{s, \kappa, \kappa-m} x_{s, \kappa, \kappa-m} \omega_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} + \\ &+ \sum_{\kappa-m} E'_{s, \kappa, \kappa-m} A_{s, \kappa, \kappa-m} x_{s, \kappa, \kappa-m} \varphi_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m}; \\ Q_{\kappa, \kappa-m} &= \sum_{\kappa-m} G'_{\varepsilon, \kappa, \kappa-m} A_{\varepsilon, \kappa, \kappa-m} \Delta_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m} + \\ &+ \sum_{\kappa-m} G'_{s, \kappa, \kappa-m} A_{s, \kappa, \kappa-m} \Delta_{\kappa, \kappa-m} / a_{\kappa, \kappa-m}\end{aligned}\quad (4.5.13)$$

Аналогичные выражения для усилий записываются по всем остальным граням. Пропуская промежуточные выражения типа (4.5.10.), (4.5.11.) и (4.5.12.), приведем окончательные формулы для усилий,

По  $(\kappa, \kappa-1)$  -й грани:

$$\begin{aligned}N_{\kappa, \kappa-1} &= \sum_{\kappa-1} D'_{\varepsilon x, \kappa, \kappa-1} A_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1} u_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1} - \sum_{\kappa-1} D'_{\varepsilon x, \kappa, \kappa-1} A_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1} z_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1} \varphi_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1} + \\ &+ \sum_{\kappa-1} E'_{sx, \kappa, \kappa-1} A_{s, x, \kappa-1} u_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1} - \sum_{\kappa-1} E'_{sx, \kappa, \kappa-1} A_{s, \kappa, \kappa-1} z_{s, \kappa, \kappa-1} \varphi_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1}; \\ M_{\kappa, \kappa-1} &= - \sum_{\kappa-1} D'_{\varepsilon x, \kappa, \kappa-1} A_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1} z_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1} u_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1} + \sum_{\kappa-1} D'_{\varepsilon x, \kappa, \kappa-1} A_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1} z_{\varepsilon, \kappa, \kappa-1}^2 \varphi_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1} + \\ &+ \sum_{\kappa-1} E'_{sx, \kappa, \kappa-1} A_{s, \kappa, \kappa-1} z_{s, \kappa, \kappa-1} u_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1} + \sum_{\kappa-1} E'_{sx, \kappa, \kappa-1} A_{s, \kappa, \kappa-1} z_{s, \kappa, \kappa-1}^2 \varphi_{\kappa, \kappa-1} / \varepsilon_{\kappa, \kappa-1};\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
Q_{k,k-1} &= \sum_{k-1} G'_{\epsilon,k,k-1} A_{\epsilon,k,k-1} \Delta_{k,k-1} / \epsilon_{k,k-1} + \\
&+ \sum_{k-1} G'_{s,k,k-1} A_{s,k,k-1} \Delta_{k,k-1} / \epsilon_{k,k-1}
\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

По  $(\kappa, \kappa+1)$ -й грани:

$$\begin{aligned}
N_{k,k+1} &= \sum_{k+1} D'_{x,k,k+1} A_{\epsilon,k,k+1} u_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} - \\
&- \sum_{k+1} D'_{x,k,k+1} A_{\epsilon,k,k+1} z_{\epsilon,k,k+1} \varphi_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} + \\
&+ \sum_{k+1} E'_{s,k,k+1} A_{s,k,k+1} u_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} - \\
&- \sum_{k+1} E_{s,k,k+1} A_{s,k,k+1} z_{s,k,k+1} \varphi_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1}; \\
M_{k,k+1} &= - \sum_{k+1} D'_{x,k,k+1} A_{\epsilon,k,k+1} z_{\epsilon,k,k+1} u_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} + \\
&+ \sum_{k+1} D'_{x,k,k+1} A_{\epsilon,k,k+1} z_{\epsilon,k,k+1}^2 \varphi_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} - \\
&- \sum_{k+1} E'_{s,k,k+1} A_{s,k,k+1} z_{s,k,k+1} u_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} + \\
&+ \sum_{k+1} E'_{s,k,k+1} A_{s,k,k+1} z_{s,k,k+1}^2 \varphi_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1}; \\
Q_{k,k+1} &= \sum_{k+1} G'_{\epsilon,k,k+1} A_{\epsilon,k,k+1} \Delta_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1} + \\
&+ \sum_{k+1} G'_{s,k,k+1} A_{s,k,k+1} \Delta_{k,k+1} / \epsilon_{k,k+1}
\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

По  $(\kappa, \kappa+m)$ -й грани:

$$\begin{aligned}
N_{k,k+m} &= \sum_{k+m} D'_{z,k,k+m} A_{\epsilon,k,k+m} \omega_{k,k+m} / a_{k,k+m} - \\
&- \sum_{k+m} D'_{z,k,k+m} A_{\epsilon,k,k+m} x_{\epsilon,k,k+m} \varphi_{k,k+m} / a_{k,k+m} + \\
&+ \sum_{k+m} E'_{s,k,k+m} A_{s,k,k+m} \omega_{k,k+m} / a_{k,k+m} - \\
&- \sum_{k+m} E_{s,k,k+m} A_{s,k,k+m} x_{s,k,k+m} \varphi_{k,k+m} / a_{k,k+m}; \\
M_{k,k+m} &= - \sum_{k+m} D'_{z,k,k+m} A_{\epsilon,k,k+m} x_{\epsilon,k,k+m} \omega_{k,k+m} / a_{k,k+m} + \\
&+ \sum_{k+m} D'_{z,k,k+m} A_{\epsilon,k,k+m} x_{\epsilon,k,k+m}^2 \varphi_{k,k+m} / a_{k,k+m} - \\
&- \sum_{k+m} E'_{s,k,k+m} A_{s,k,k+m} x_{s,k,k+m} \omega_{k,k+m} / a_{k,k+m} + \\
&+ \sum_{k+m} E'_{s,k,k+m} A_{s,k,k+m} x_{s,k,k+m}^2 \varphi_{k,k+m} / a_{k,k+m};
\end{aligned}$$

$$Q_{k,k+m} = \sum_{k+m} G'_{e,k,k+m} A_{e,k,k+m} \Delta_{k,k+m} / \epsilon_{k,k+m} + \\ + \sum_{k+m} G'_{s,k,k+m} A_{s,k,k+m} \Delta_{k,k+m} / \epsilon_{k,k+m} \quad (4.5.16)$$

В формулах (4.5.13 -4.5.16.) множители перед перемещениям граней  $k$ -го элемента являются элементами матрицы жесткости  $[\mathcal{E}]_k$ , которая представлена в табл.4.5.1, а отдельные подматрицы этой матрицы даны в таблицах 4.5.2 - 4.5.5.

Элементы этих матриц - усилия по граням элемента при единичных перемещениях этих граней при принятых законах перемещений.

Из условия (4.5.9.) составлены подматрицы жесткости элемента  $[K]_k$  элементами которых являются усилия в связях метода перемещений в соседних  $(k-m)$ -ом,  $(k-1)$ -ом,  $(k+1)$ -ом и  $(k+m)$ -ом элементах МСД при перемещениях  $k$ -го элемента. в направлении соответствующих связей.

Элементная матрица  $[K]_k$  представлена в таблице 4.5.6 , а ее подматрицы в таблице 4.5.7.

Поясним смысл элементов матрицы  $[K]_k$ . Так, например, элемент  $\mathcal{E}_{1,1}^k$  означает величину нормальной силы  $N_{k,k-m} = N_{k-m,k}$  на грани между  $(k-m)$ -м и  $k$ -м элементами МСД при смещении  $(k-m)$ -го элемента МСД в направлении  $(i-3m)$ -й связи метода перемещений (рис.4.2.3.) или при смещении  $k$ -го элемента МСД в направлении  $i$ -й связи метода перемещений; одновременно  $\mathcal{E}_{1,1}^k$  - усилия в  $(i-3m)$ -й и  $i$ -й связях при их взаимном единичном смещении  $(k-m)$ -го и  $k$ -го элемента в направлении оси  $z$ .

Элемент  $\mathcal{E}_{1,2}^k$  - нормальная сила  $N_{k,k-m} = N_{k-m,k}$  по той же грани при единичном смещении  $(k-m)$ -го элемента в направлении  $(i-3m+1)$ -й связи; одновременно  $\mathcal{E}_{1,2}^k$  - усилия в  $(i-3m)$ -й или  $(i+1)$ -й связях при взаимном единичном смещении  $(k-m)$ -го и  $k$ -го элементов в направлении  $(i-3m+1)$ -й или  $(i+1)$ -й связей метода перемещений.

Отметим, что матрица в табл.4.5.6 отличается от аналогичной для упругой плоской системы по форме тем, что в последней (см.4.2.10.) наличием побочных элементов, отражающих взаимное влияние продольных сил и изгибающих моментов на каждой грани  $k$ -го элемента.

Однако наиболее существенная особенность матрицы  $[K]_k$  в таблице 4.5.6– это нелинейность ее элементов, вызываемая неупругими деформациями бетона и арматуры.

Таблица 4.5.1.

Матрица внутренней жесткости  $[\mathcal{E}]_k$  для плоской задачи железобетона

Элементы МСД	Внутренние силы	№	к-м			к-1			к+1			к+m		
			$\omega_{k,k-m}$	$\varphi_{k,k-m}$	$\Delta_{k,k-m}$	$u_{k,k-1}$	$\varphi_{k,k-1}$	$\Delta_{k,k-1}$	$u_{k,k+1}$	$\varphi_{k,k+1}$	$\Delta_{k,k+1}$	$\omega_{k,k+m}$	$\varphi_{k,k+m}$	$\Delta_{k,k+m}$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к-м	$N_{k,k-m}$	1	$\eta_{k,k-m}$	$\lambda_{k,k-m}$										
	$M_{k,k-m}$	2	$\lambda_{k,k-m}$	$\omega_{k,k-m}$										
	$Q_{k,k-m}$	3			$\xi_{k,k-m}$									
к-1	$N_{k,k-1}$	4				$\eta_{k,k-1}$	$\lambda_{k,k-1}$							
	$M_{k,k-1}$	5				$\lambda_{k,k-1}$	$\omega_{k,k-1}$							
	$Q_{k,k-1}$	6						$\xi_{k,k-1}$						
к+1	$N_{k,k+1}$	7							$\eta_{k,k+1}$	$\lambda_{k,k+1}$				
	$M_{k,k+1}$	8							$\lambda_{k,k+1}$	$\omega_{k,k+1}$				
	$Q_{k,k+1}$	9									$\xi_{k,k+1}$			
к+m	$N_{k,k+m}$	10										$\eta_{k,k+m}$	$\lambda_{k,k+m}$	
	$M_{k,k+m}$	11										$\lambda_{k,k+m}$	$\omega_{k,k+m}$	
	$Q_{k,k+m}$	12											$\xi_{k,k+m}$	

Таблица 4.5.2.

Матрица жесткости  $[\Theta]_{k,k-m}$

	$\omega_{k,k-m}$	$\varphi_{k,k-m}$	$\Delta_{k,k-m}$
$N_{k,k-m}$	$\sum_{k-m} A_{e,k-m} D'_{e,k-m} / a_{k,k-m} +$ $+ \sum_{k-m} A_{s,k-m} E'_{s,k-m} / a_{k,k-m}$	$-\sum_{k-m} A_{e,k-m} D_{e,k-m} x_e / a_{k,k-m} -$ $-\sum_{k-m} A_{s,k-m} E_{s,k-m} x_s / a_{k,k-m}$	
$M_k [\Theta]_{k,k-m}$	$-\sum_{k-m} A_{e,k-m} D'_{e,k-m} x_e / a_{k,k-m} -$ $-\sum_{k-m} A_{s,k-m} E'_{s,k-m} x_s / a_{k,k-m}$	$\sum_{k-m} A_{e,k-m} D_{e,k-m} x_e^2 / a_{k,k-m} +$ $+ \sum_{k-m} A_{s,k-m} E_{s,k-m} x_s^2 / a_{k,k-m}$	
$Q_{k,k-m}$			$\sum_{k-m} A_{e,k-m} G_{e,k-m} / a_{k,k-m} +$ $+ \sum_{k-m} A_{s,k-m} G_{s,k-m} / a_{k,k-m}$

$$\begin{array}{c|c|c}
 \eta_{k,k-m} & \lambda_{k,k-m} & \\
 \hline
 \lambda_{k,k-m} & [\Theta]_{k,k-m} & \\
 \hline
 & & \xi_{k,k-m}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Таблица 4.5.3.

Матрица жесткости  $[\mathcal{E}]_{k,k-1}$

	$u_{k,k-1}$	$\varphi_{k,k-1}$	$\Delta_{k,k-1}$
$N_{k,k-1}$	$\sum_{k-1} A_{e,k-1} D'_{e,k-1} / a_{k,k-1} +$ $+ \sum_{k-1} A_{s,k-1} E'_{s,k-1} / a_{k,k-1}$	$-\sum_{k-1} A_{e,k-1} D'_{e,k-1} z_e / a_{k,k-1} -$ $-\sum_{k-1} A_{s,k-1} E'_{s,k-1} z_s / a_{k,k-1}$	
$[\mathcal{E}]_{k,k-1}^M =$	$-\sum_{k-1} A_{e,k-1} D'_{e,k-1} z_e / a_{k,k-1} -$ $-\sum_{k-1} A_{s,k-1} E'_{s,k-1} z_s / a_{k,k-1}$	$\sum_{k-1} A_{e,k-1} D'_{e,k-1} z_e^2 / a_{k,k-1} +$ $+ \sum_{k-1} A_{s,k-1} E'_{s,k-1} z_s^2 / a_{k,k-1}$	
$Q_{k,k-1}$			$\sum_{k-1} A_{e,k-1} G'_{e,k-1} / a_{k,k-1} +$ $+ \sum_{k-1} A_{s,k-1} G'_{s,k-1} / a_{k,k-1}$

$\eta_{k,k-1}$	$\lambda_{k,k-1}$	$\left[ \begin{array}{c} \\ \\ \xi_{k,k-1} \end{array} \right]$
$\lambda_{k,k-1}$	$[\mathcal{E}]_{k,k-1} =$	

Таблица 4.5.4.

Матрица жесткости  $[\mathfrak{E}]_{k,k+1}$

	$u_{k,k+1}$	$\varphi_{k,k+1}$	$\Delta_{k,k+1}$
$N_{k,k+1}$	$\sum_{k+1} A_{\sigma,k+1} D'_{\sigma,k+1} / a_{k,k+1} +$ $+ \sum_{k+1} A_{s,k+1} E'_{s,k+1} / a_{k,k+1}$	$-\sum_{k+1} A_{\sigma,k+1} D'_{\sigma,k+1} z_{\sigma} / a_{k,k+1} -$ $-\sum_{k+1} A_{s,k+1} E'_{s,k+1} z_s / a_{k,k+1}$	
$[\mathfrak{E}]_{k,k+1}^M =$	$-\sum_{k+1} A_{\sigma,k+1} D'_{\sigma,k+1} z_{\sigma} / a_{k,k+1} -$ $-\sum_{k+1} A_{s,k+1} E'_{s,k+1} z_s / a_{k,k+1}$	$\sum_{k+1} A_{\sigma,k+1} D'_{\sigma,k+1} z_{\sigma}^2 / a_{k,k+1} +$ $+ \sum_{k+1} A_{s,k+1} E'_{s,k+1} z_s^2 / a_{k,k+1}$	
$Q_{k,k+1}$			$\sum_{k+1} A_{\sigma,k+1} G'_{\sigma,k+1} / a_{k,k+1} +$ $+ \sum_{k+1} A_{s,k+1} G'_{s,k+1} / a_{k,k+1}$

$\eta_{k,k+1}$	$\lambda_{k,k+1}$	$\left[ \begin{array}{c} \\ \\ \xi_{k,k+1} \end{array} \right]$
$\lambda_{k,k+1}$	$\varphi_{k,k+1}$ $[\mathfrak{E}]_{k,k+1}$	

Таблица 4.5.5.

Матрица жесткости  $[\Theta]_{k,k+m}$

	$\omega_{k,k+m}$	$\varphi_{k,k+m}$	$\Delta_{k,k+m}$
$N_{k,k+m}$	$\sum_{k+m} A_{e,k+m} D'_{e,k+m} / a_{k,k+m} +$ $+ \sum_{k+m} A_{s,k+m} E'_{s,k+m} / a_{k,k+m}$	$-\sum_{k+m} A_{e,k+m} D'_{e,k+m} x_e / a_{k,k+m} -$ $-\sum_{k+m} A_{s,k+m} E'_{s,k+m} x_s / a_{k,k+m}$	
$[\Theta]_{k,k+m} M_{k,k+m} =$	$-\sum_{k+m} A_{e,k+m} D'_{e,k+m} x_e / a_{k,k+m} -$ $-\sum_{k+m} A_{s,k+m} E'_{s,k+m} x_s / a_{k,k+m}$	$\sum_{k+m} A_{e,k+m} D'_{e,k+m} x_e^2 / a_{k,k+m} +$ $+ \sum_{k+m} A_{s,k+m} E'_{s,k+m} x_s^2 / a_{k,k+m}$	
$Q_{k,k+m}$			$\sum_{k+m} A_{e,k+m} G'_{e,k+m} / a_{k,k+m} +$ $+ \sum_{k+m} A_{s,k+m} G'_{s,k+m} / a_{k,k+m}$

$\eta_{k,k+m}$	$\lambda_{k,k+m}$	$\left[ \begin{array}{c} \\ \\ \xi_{k,k+m} \end{array} \right]$
$\lambda_{k,k+m}$	$a_{k,k+m} [\Theta]_{k,k+m} =$	

Матрица жесткости  $[K]_k$

Элементы	Внутренние силы	№	к-м			к-1			к+1			к+m		
			$i-3m$	$i-3m+1$	$i-3m+2$	$i-1$	$i-2$	$i-3$	$i+5$	$i+4$	$i+3$	$i+3m$	$i+3m+1$	$i+3m+2$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к-м	$N_{k,k-m}$	1	$\mathfrak{A}_{1,1}^k$	$\mathfrak{A}_{1,2}^k$										
	$M_{k,k-m}$	2	$\mathfrak{A}_{2,1}^k$	$\mathfrak{A}_{2,2}^k$										
	$Q_{k,k-m}$	3			$\mathfrak{A}_{3,3}^k$									
к-1	$N_{k,k-1}$	4				$\mathfrak{A}_{4,4}^k$	$\mathfrak{A}_{4,5}^k$							
	$M_{k,k-1}$	5				$\mathfrak{A}_{5,4}^k$	$\mathfrak{A}_{5,5}^k$							
	$Q_{k,k-1}$	6						$\mathfrak{A}_{6,6}^k$						
к+1	$N_{k,k+1}$	7							$\mathfrak{A}_{7,7}^k$	$\mathfrak{A}_{7,8}^k$				
	$M_{k,k+1}$	8							$\mathfrak{A}_{8,7}^k$	$\mathfrak{A}_{8,8}^k$				
	$Q_{k,k+1}$	9									$\mathfrak{A}_{9,9}^k$			
к+m	$N_{k,k+m}$	10										$\mathfrak{A}_{10,10}^k$	$\mathfrak{A}_{10,11}^k$	
	$M_{k,k+m}$	11										$\mathfrak{A}_{11,10}^k$	$\mathfrak{A}_{11,11}^k$	
	$Q_{k,k+m}$	12											$\mathfrak{A}_{12,12}^k$	



Таблица 4.5.7.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{A}_{1,1} & \mathcal{A}_{1,2} & \\ \hline \mathcal{A}_{2,1} & \mathcal{A}_{2,2} & \\ \hline & & \mathcal{A}_{3,3} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k,k-m} & \lambda_{k,k-m} & \\ \hline \lambda_{k,k-m} & \omega_{k,k-m} & \\ \hline & & \xi_{k,k-m} \end{array} \right]^{-1} + \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k-m,k} & \lambda_{k-m,k} & \\ \hline \lambda_{k-m,k} & \omega_{k-m,k} & \\ \hline & & \xi_{k-m,k} \end{array} \right]^{-1} \Bigg]^{-1} \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{A}_{4,4} & \mathcal{A}_{4,5} & \\ \hline \mathcal{A}_{5,4} & \mathcal{A}_{5,5} & \\ \hline & & \mathcal{A}_{6,6} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k,k-1} & \lambda_{k,k-1} & \\ \hline \lambda_{k,k-1} & \omega_{k,k-1} & \\ \hline & & \xi_{k,k-1} \end{array} \right]^{-1} + \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k-1,k} & \lambda_{k-1,k} & \\ \hline \lambda_{k-1,k} & \omega_{k-1,k} & \\ \hline & & \xi_{k-1,k} \end{array} \right]^{-1} \Bigg]^{-1} \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{A}_{7,7} & \mathcal{A}_{7,8} & \\ \hline \mathcal{A}_{8,7} & \mathcal{A}_{8,8} & \\ \hline & & \mathcal{A}_{9,9} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k,k+1} & \lambda_{k,k+1} & \\ \hline \lambda_{k,k+1} & \omega_{k,k+1} & \\ \hline & & \xi_{k,k+1} \end{array} \right]^{-1} + \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k+1,k} & \lambda_{k+1,k} & \\ \hline \lambda_{k+1,k} & \omega_{k+1,k} & \\ \hline & & \xi_{k+1,k} \end{array} \right]^{-1} \Bigg]^{-1} \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{A}_{10,10} & \mathcal{A}_{10,11} & \\ \hline \mathcal{A}_{11,10} & \mathcal{A}_{11,11} & \\ \hline & & \mathcal{A}_{12,12} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k,k+m} & \lambda_{k,k+m} & \\ \hline \lambda_{k,k+m} & \omega_{k,k+m} & \\ \hline & & \xi_{k,k+m} \end{array} \right]^{-1} + \left[ \begin{array}{c|c|c} \eta_{k+m,k} & \lambda_{k+m,k} & \\ \hline \lambda_{k+m,k} & \omega_{k+m,k} & \\ \hline & & \xi_{k+m,k} \end{array} \right]^{-1} \Bigg]^{-1}
 \end{array}$$

Элементы матрицы жёсткости  $[K]_k$

Теперь перейдем к построению матрицы внешней жесткости для  $k$ -го элемента МСД и всей плоской системы.

Для этого используется соотношение

$$[R]_k = [A]_k [K]_k [A]_k^T \quad (4.5.17.)$$

где:  $[A]_k$  - матрица равновесия (табл.4.2.1.), остающаяся единой для упругой плоской задачи и плоской задачи для железобетона.

Перемножение по формуле (4.5.17.) приведет к матрицам, аналогичным тем, которые были получены для железобетонных стержней, работающих в условиях плоского изгиба (внецентренного сжатия-растяжения при внутренних силах  $N$ ,  $M$  и  $Q$  (см.п.3.5.)), однако для плоского элемента матрица  $[R]_k$  будет содержать в общем случае вдвое больше элементов, чем для стержневого.

#### 4.6. Алгоритм, блок-схема и программа «МСД» для расчета

## плоско-напряженных несущих систем многоэтажных зданий в упругой стадии работы. Примеры расчета.

Плоские железобетонные несущие элементы и их системы работают под нагрузкой, как правило, в неупругой стадии и их расчет должен это учитывать.

Вместе с тем, расчеты железобетонных плоских несущих систем на ЭВМ, основывающиеся на итерационных подходах, начинаются от упругого состояния, принимаемого в качестве первого приближения.

Задачи о плоском напряженном состоянии элементов и несущих систем методом сосредоточенных деформаций решаются на ЭВМ в такой последовательности.

Во-первых, составляется расчетная схема, т.е. назначаются плоскости (линии) сосредоточенных деформаций.

Получающиеся при этом элементы МСД могут иметь квадратную или прямоугольную форму. Разбивку исходной плоской системы на элементы МСД следует производить, учитывая некоторое предварительное представление о работе рассчитываемой конструкции: плоскости сосредоточенных деформаций следует совмещать с местами наибольших усилий в системе, а также реальными швами (связями); число элементов МСД следует принимать по возможности небольшим; целесообразно стремиться также к однотипности элементов МСД, даже если это приводит к увеличению их общего числа.

Во-вторых, описываются физические свойства рассчитываемой системы, и формируется матрица внутренней жесткости в памяти ЭВМ. По заданным размерам элементов МСД, их упругим свойствам и характеристикам реальных швов вычисляются характеристики жесткости комплексных связей метода сосредоточенных деформаций по формулам п.4.2; характеристики комплексных связей МСД сохраняются в памяти ЭВМ и при необходимости используются при формировании матрицы внешней жесткости по формулам п.4.2

В-третьих, формируется вектор нагрузок, как реакции в фиктивных связях метода перемещений, накладываемых на каждый элемент МСД, от внешних сил. Эти реакции в связях вычисляются из элементарных уравнений равновесия для каждого элемента МСД, рассматриваемого изолированно от всех примыкающих к нему элементов, закрепленного связями метода перемещений и нагруженного непосредственно приложенной нагрузкой.

В-четвертых» формируется матрица внешней жесткости всей плоской системы, элементы которой вычисляются по формулам п. 4.2.

В-пятых формируется и решается система уравнений метода перемещений общего типа

$$[R]\{v\} = [P] \quad (4.6.1.)$$

неизвестными которой являются перемещения элементов МСД (по два линейных и одному угловому).

Система линейных алгебраических уравнений (4.6.1.) с ленточной симметричной матрицей, полностью помещающейся в

памяти ЭВМ, решается по стандартной программе.

В-шестых, по формулам п.4.2. вычисляются внутренние усилия по граням элементов (продольные и поперечные силы и изгибающие моменты). Блок-схема программы «MSD» представлена на рис. 4.6.1.



Рис. 4.6.1. Блок-схема программы «MSD»

По программе «MSD» выполнены многочисленные расчеты; приведем некоторые из них. Эти примеры призваны проиллюстрировать, возможности метода сосредоточенных деформаций и оценить точность получаемых решений (в сравнении с другими).

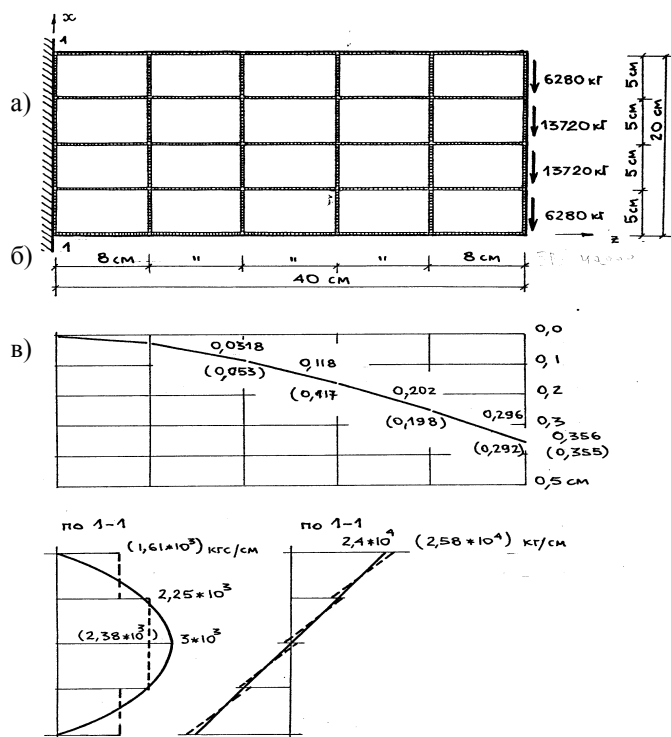


Рис. 4.6.2. Расчет консольной балки-стенки: а) схема MSD, б) прогибы, в) касательные и нормальные напряжения.

**Пример 4.6.1.**

Консольная балка-стенка 179 нагружена по торцу касательными силами, распределенными по закону квадратной параболы; точное решение

этой задачи дается во многих курсах по теории упругости [262], при таком распределении нагрузки должно сохраняться линейное распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  по всей высоте (рис. 4.6.2.).

Деформативные свойства элементов МСД сосредоточены по линиям (плоскостям) разбивки, а также на периферии; такая схема приводит к одинаковым характеристикам жесткости собственных условных связей во всех элементах. При достаточно "грубой" разбивке (рис.4.6.2,а) в данном случае достигается хорошее совпадение по прогибам продольной оси (рис.4.6.2,б), нормальным напряжениям (рис.4.6.2,в); отмечается заметное расхождение в величинах касательных напряжений (рис.4.6.2), что вызывается заложенным в расчете равномерным распределением касательных напряжений, в том числе и для элементов, выходящих на контур, свободный от нагрузок.

**Пример 4.6.2.**

Та же консольная балка, но с разбивкой на  $10 \cdot 20 = 200$  элементов МСД, загружена по торцу сдвигающими напряжениями, распределенными по закону квадратной параболы (рис.4.6.3.).

Из рис.4.6.3, б видно, что вычисленные по МСД прогибы хорошо согласуются с полученными по формулам теории упругости; то же можно сказать о нормальных напряжениях (рис.4.6.3,в); касательные напряжения, в отличие от примера 4.6.2, сблизилась с вычисленными по формулам теории упругости.

**Пример 4.6.3.**

Квадратная балка-стенка жёстко заделана по боковым граням (опоры воспринимают распорные силы) и загружена равномерно распределённой по верхней грани нагрузкой интенсивностью  $q=1$  кгс/см.

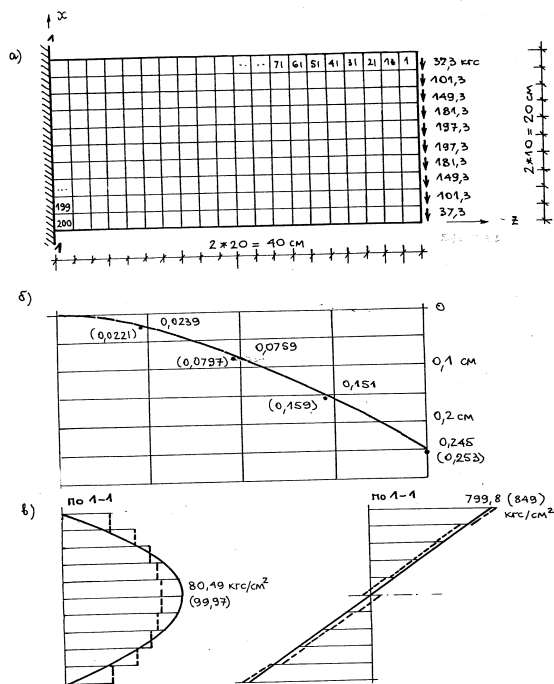


Рис. 4.6.3. Расчет консольной балки-стенки; а) схема МСД, б) прогибы, в) касательные и нормальные напряжения

Размеры балки-стенки  $a \cdot v = 12 \cdot 12$  см, толщина  $t = 1$  см, материал принят с характеристиками: модулем 180

упругости  $E = 2 * 10^4 \text{ кгс/см}^2$  и коэффициентом поперечного расширения  $\mu = 0,3$ .

Целью настоящих расчётов по методу сосредоточенных деформаций (МСД) являлась проверка этой расчётной модели и основных её допущений. Сравнение проведено с табличными данными [38], также с результатами специально выполненных расчётов по МКЭ при той же степени дискретизации и с узлами МКЭ, имеющими три степени свободы (два линейных и одно угловое перемещение в плоскости балки-стенки)

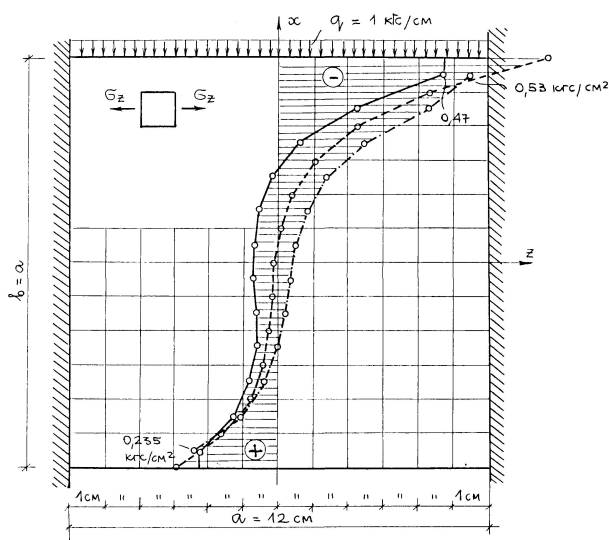


Рис.4.6.4. Напряжения  $\sigma_z$  на уровне оси — по МСД, - - - по МКЭ, - . - по [38].

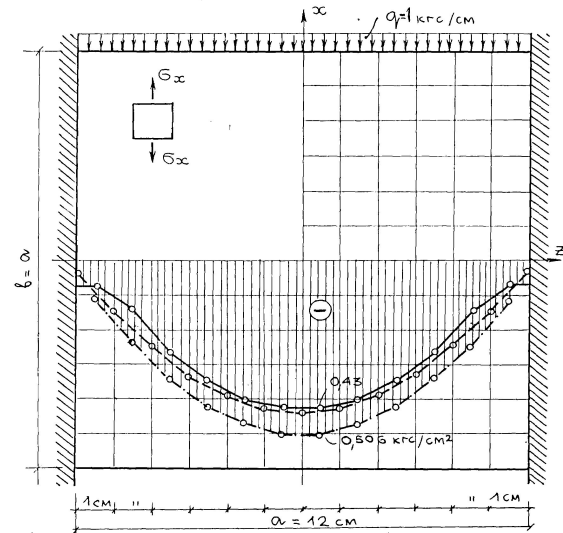


Рис. 4.6.5. Напряжения  $\sigma_x$  на уровне оси — по МСД, - - - по МКЭ, - . - по [38].

Из рис. 4.6.4 и 4.6.5 следует, что результаты расчётов по МСД близки к полученным другими численными способами; в области наибольших и наименьших значений напряжений  $\sigma_z$  и  $\sigma_x$  все три методики дают практически совпадающие результаты, и их различия объясняются, по видимому, численной природой всех сравниваемых расчётных подходов.

#### Пример 4.6.4.

Квадратные балки-стенки оперты шарнирно подвижно на площадках длиной  $C = 0,1 a$  загружены равномерно распределенной нагрузкой вниз (рис. 4.6.6.) и вверх (рис. 4.6.7.) интенсивностью  $q = 1 \text{ кгс/см}$  на длине  $0,8 a$  (размеры балок-стенок и характеристики их материалов сохранены по примеру 4.6.3.).

Здесь как и в предыдущем примере, даны напряжения в характерных сечениях, вычисленные по трем методикам.

Нормальные напряжения  $\sigma_z$  в обеих балках - стенках, вычисленные тремя способами, совпадают с достаточной для практики точностью, что еще раз подтверждает достоверность метода сосредоточенных деформаций (МСД).

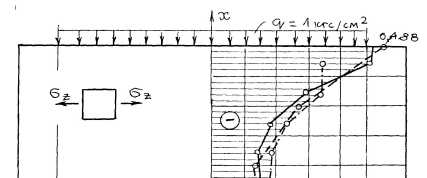
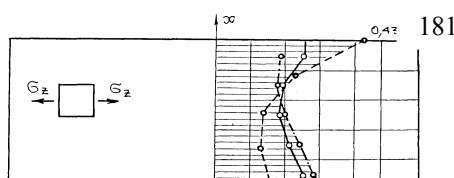


Рис. 4.6.6. Нормальные напряжения при расчете  
 — по МСД, ---- по МКЭ, ----- по [38]

Рис. 4.6.7. Нормальные напряжения при расчете  
 — по МСД по МКЭ, ---- по [38].

### Пример 4.6.5.

Квадратные балки-стенки загружены распределёнными и сосредоточенными нагрузками по верхним и нижним граням (рис, 4.6.9 и 4.6.10).

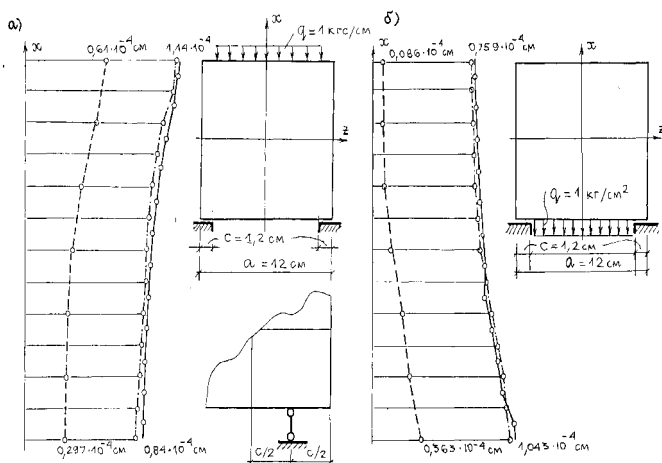


Рис. 4.6.8. Вертикальные перемещения по оси X при расчете — по МСД, ---- по МКЭ, ---- по [38].

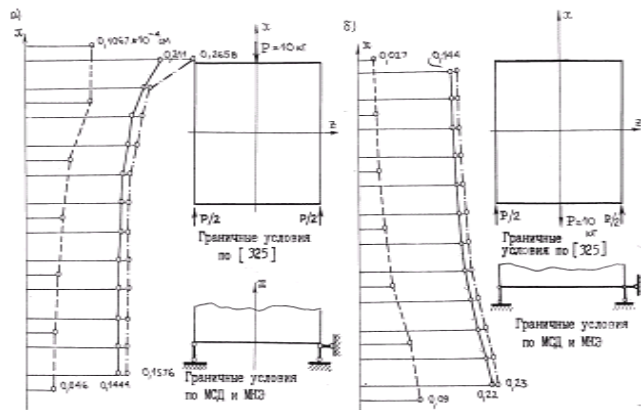


Рис. 4.6.9. Вертикальные перемещения по оси X при расчете — по МСД, ---- по МКЭ, ---- по [333] и 38.

В этом примере цель состояла в сопоставлениях перемещений в балках-стенках, вычисленных тремя разными способами.

Из сопоставления результатов обнаружена специфическая погрешность в справочных таблицах [38], относящаяся к перемещениям балок-стенок.

Перемещения балок-стенок, как это следует из таблиц [333], вычислены при граничных условиях, отвечающих первой основной краевой задаче теории упругости для плоского напряжённого состояния [174], т.е. при граничных условиях в напряжениях. В таблицах [333] для этих балок-стенок опорные реакции приложены в виде распределённых сил на длине  $C = 0,1a$  (рис.4.6.9) и сосредоточенных сил в углах (рис. 4.6.9).

Из рис.4.6.8 видно, что перемещения в балках-стенках по МСД и МКЭ практически одинаковы. Перемещения же, заимствованные из таблиц [333], недопустимо отличаются от найденных по МСД и МКЭ.

Можно заметить также, что это отличие составляет некоторую постоянную величину для 182 перемещений в пределах всей высоты балок-стенок, и если кривые перемещений по МСД и МКЭ сместить

влево, то они сольются с табличными по [38].

Причиной такого неприемлемого расхождения следует считать неравномерное распространение результатов из таблиц [333] на таблицы [38]: в таблицах [333] перемещения вычислены при граничных условиях в напряжениях (в виде распределённых реактивных сил на длине  $C = 0,1 a$ ), в таблицах [38] эти же перемещения отнесены к условиям опирания в перемещениях (в виде неподатливых опор).

Совершенно аналогичные результаты по перемещениям получены и для других балок-стенок (рис.4.6.9). В этих случаях причиной расхождения в перемещениях, заимствованных из таблиц [333] и вычисленных по МСД и МКЭ, является неравномерная подмена граничных условий, допущенная в [38] и [316].

Обнаруженные погрешности в перемещениях балок-стенок имеют не только теоретический, но и практический интерес. В реальных условиях работы балок-стенок, в том числе при испытаниях модельных и натуральных образцов, их опирание всегда осуществляется при граничных условиях в перемещениях, т.е. неподвижно зафиксированных опорах, обеспечивающих неподвижность балок-стенок в целом как жёстких дисков. Для этих реальных условий на контуре, т.е. условий опирания, и следовало бы специально привести данные по перемещениям в справочной литературе [38] и [333] вместо тех, которые не имеют практического значения, но могут ввести в заблуждение экспериментаторов - исследователей при анализе опытных данных.

**Пример 4.6.6.** Десятиэтажная двухстолбовая диафрагма жёсткости загружена горизонтальной нагрузкой (рис. 4.6.10). Требуется вычислить усилия и горизонтальные перемещения по МСД и сопоставить их с полученными по дискретно-континуальной модели [121].

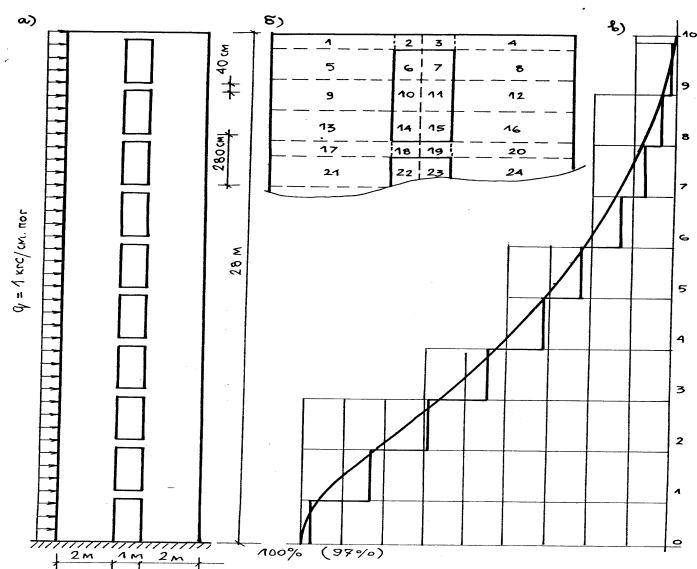


Рис.4.6.10. Десятиэтажная диафрагма жёсткости, а) исходные данные, б) расчетная схема МСД, в) нормальные силы в столбах

Разбивка диафрагмы на элементы МСД выполнена согласно рис. 4.6.10,б (всего получено 160 элементов МСД).

Таблица 4.6.1

Расчет диафрагм жесткости по МСД и сравнение с решением [121]

Этажность	Разбивка диафрагмы	Прогиб по формулам [121]	Прогиб по МСД	Процент расхождения	Решение наиболее удовлетворяющее [121]	Прогиб усилия в вершинах									Процент расхождения $\Delta M$	
						По методу [121]					По МСД					
						f см	N кН	Q кН	M кН·м	$M = \frac{qH^2}{2}$	f см	N кН	Q кН	M кН·м		$\Sigma M + BN$
5	10 x 3		0,041													
	15 x 3		0,039													
	10 x 4	0,02	0,038													
	10 x 6		0,037													
	20 x 4		0,018	10 %	20 x 4	0,02	-19,1	-7,0	-20,3	98	0,018	-20,3	-7,6	-19,3	97,9	$1,75 \times 10^{-4}$
10	20 x 3		0,354													
	20 x 4		0,331													
	20 x 6	0,21	0,325													
	20 x 7		0,325													
	40 x 4		0,194	7 %	40 x 4	0,21	-92,8	-14,0	-56,7	392	0,194	-90,5	-15,03	-61,7	391,99	$8,9 \times 10^{-4}$
15	30 x 3		1,310													
	30 x 4		1,240													
	30 x 6	0,95	1,230													
	45 x 4		1,230													
	60 x 3		0,884	7 %	60 x 3	0,95	-223,4	-21,0	-105,9	882	0,884	-226,8	-18,85	96,01	872,31	$1,1 \times 10^{-2}$
20	40 x 3		3,510													
	40 x 4		3,370													
	40 x 6	2,88	3,340													
	80 x 4		2,610	8 %	80 x 4	2,88	-410,9	-28,0	-167,7	1568	2,61	-413,4	-26,16	-164,5	1554,8	$8,4 \times 10^{-3}$



На рис. 4.6.10, в приведены эпюры нормальных сил в столбах (ступенчатая линия) по МСД, здесь же даны нормальные силы по дискретно-континуальной модели; можно говорить о достаточной близости значений нормальных сил на уровнях всех этажей. На рис. 4.6.11, а приведены прогибы этой же диафрагмы, вычисленные по МСД (штриховые линии) и по дискретно-континуальной модели; прогибы практически одинаковы, то же можно сказать и об изгибающих моментах (рис. 4.6.11, б). Все результаты расчета диафрагмы жесткости многоэтажных зданий по МСД приведены в таблице 4.6.1.

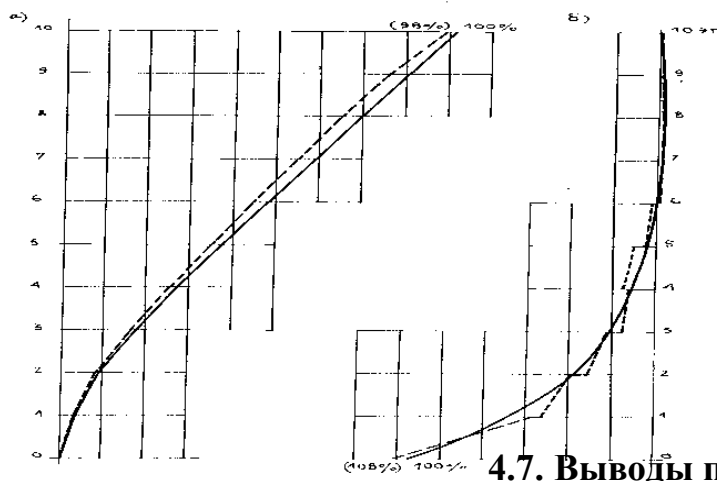


Рис.4.6.11. Десятиэтажная диафрагма жесткости, а) прогибы, б) изгибающие моменты в столбах, — по [121], ---- по МСД.

#### 4.7. Выводы по главе

1. Плоскостные железобетонные элементы многоэтажных зданий, работающие в условиях нелинейности, наиболее просто рассчитывать по методу сосредоточенных деформаций, в котором реализована дискретная расчетная модель, предполагающая переменность поля жесткостей в пределах одного элемента.

2. Метод сосредоточенных деформаций, применительный к плоско-напряженным железобетонным конструкциям, основывающийся на дискретном представлении сечений в элементах МСД, в линейном представлении деформации в их пределах, позволяет получить достаточно простые формулы для элементов матрицы внешней жесткости, что позволяет избежать перемножения матриц высокого порядка.

3. Прочность и перемещения железобетонных плосконапряженных конструкций на основе МСД удовлетворительно описываются с использованием исходных и трансформированных диаграмм деформирования бетона и арматуры, включая нисходящие ветви, что позволяет проследить поведение плосконапряженных железобетонных конструкций на всех стадиях и длительностях их загрузки, включая разрушающую.

4. Сопоставления результатов экспериментов на железобетонных моделях балок-стенок и их расчетов по методу сосредоточенных деформаций (МСД) с учетом физической нелинейности показали, что несущая способность по опыту отличается от расчетной на 6-12 %, перемещения при нагрузке 0,7 от разрушающей различаются на 5-16 %.

# МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ РАБОТЫ

## 5.1. Сопоставительный анализ основных положений МКЭ и МСД в задачах изгибаемых железобетонных плит перекрытий

Изгибаемые железобетонные плиты, как частный вид плоскостных элементов несущих систем многоэтажных зданий, входят прежде всего, в состав перекрытий всех конструктивных систем многоэтажных зданий; как изгибаемые железобетонные плиты работают плитные фундаменты; компоненты изгибного напряженного состояния могут присутствовать в стенах панельных и монолитных зданий при внецентренном приложении вертикальных нагрузок.

Изгибное напряженное состояние в плоскостных железобетонных элементах несущих систем многоэтажных зданий в чистом виде практически не встречается; оно обычно сопровождается компонентами плоского напряженного состояния.

Компоненты плоского напряженного состояния в изгибаемых плитах развиваются не только вследствие приложения нагрузок в плоскости плит, но также из-за сдерживания деформаций при стесненных условиях опирания (эффект распора) и развития геометрической и физической нелинейности.

По этим причинам деление плоскостных железобетонных элементов на изгибаемые и плосконапряженные, следует считать условным, оправдываемым преимущественной ролью того или иного напряженно-деформированного состояния, а также удобствами расчета.

Из различных применяемых ныне расчетных методов для изгибаемых железобетонных плит перекрытий, наибольшей универсальностью и полнотой обладает метод конечных элементов (МКЭ), [58, 180, 265 и др.], основные этапы которого состоят:

1. в разбивке исходной конструкции на конечные элементы;
2. в выборе функций для перемещений по полю конечного элемента;
3. в формировании матриц жесткости.

Разбивка рассчитываемой плиты на конечные элементы выполняется исходя из задач расчета и вычислительных возможностей, при этом конечные элементы чаще всего применяются в прямоугольной форме, реже в треугольной или иной форме.

В методе сосредоточенных деформаций (МСД) назначение плоскостей сосредоточенных деформаций приводит к образованию элементов, аналогичных как в методе конечных элементов. Плоскости сосредоточенных деформаций отделяют конструкцию от опорных устройств, позволяя таким образом вычислять внутренние силы непосредственно вблизи опорных устройств, где они обычно являются определяющими. Плоскости сосредоточенных деформаций целесообразно совмещать с конструктивными

швами и другими податливыми соединениями между сборными железобетонными элементами.

При расчете железобетонных изгибаемых плит по МКЭ предполагается, что жесткостная характеристика каждого КЭ в его пределах постоянна. Это обстоятельство вынуждает назначать размеры КЭ достаточно малыми, чтобы получить подробные сведения о напряженно-деформированном состоянии плиты, а также обеспечить достаточную точность расчета.

При расчете железобетонных изгибаемых плит по МСД, [89, 91, 299 и др.] допускаются переменные по толщине и в плане элемента жесткостные характеристики, что позволяет назначать элементы значительно больших размеров, чем в МКЭ, добиваясь тем самым существенного снижения трудоемкости вычислительных работ.

При расчете плит на изгиб по МКЭ отыскиваются перемещения (прогибы) элементов в углах их сопряжения, при этом получается 4 параметра, с помощью которых аппроксимируется поле прогибов конечного элемента.

Часто употребляются конечные элементы, для узлов которых задаются кроме прогибов также углы их поворотов; тогда образуется 12 параметров, позволяющих построить достаточно сложное поле перемещений в пределах конечного элемента.

Такие конечные элементы вскрывают только изгибное напряженно-деформированное состояние в плите, которое может быть достаточным для описания поведения упругих плит.

В железобетонных изгибаемых плитах вследствие физической нелинейности положение точек с ненулевыми деформациями меняется по толщине плиты в процессе увеличения нагрузки. По этой причине узлы закрепления конечных элементов и точки нулевых деформаций, будучи совмещенными в упругой стадии работы, по мере развития неупругих деформаций будут расходиться, то есть узлы закрепления конечных элементов будут получать перемещения в плоскости изгибаемой плиты.

Таким образом, в приложении к железобетонным изгибаемым плитам обычный вариант МКЭ для упругих плит нуждается в развитии, узлы КЭ должны быть наделены степенями свободы, учитывающими возможность их перемещений в плоскости плиты перекрытий.

Разрабатываемый в настоящей работе метод сосредоточенных деформаций (МСД) учитывает изложенное обстоятельство. Элементы МСД наделяются шестью степенями свободы, по три степени свободы для изгибного и плосконапряженного состояния, что делает решение достаточно строгим и полным.

Существенное отличие МКЭ и МСД состоит в способах формирования матриц жесткости. В МСД поле перемещений для изгибной части складывается из цилиндрических изгибов в двух координатных плоскостях (им соответствуют изгибные жесткости), кручения (с соответствующими жесткостями на кручение), сдвига (сдвига) в двух направлениях (при соответствующих жесткостях на сдвиг); для плосконапряженной части перемещения складываются из сжатия-растяжения в направлении

координатных осей (при соответствующих осевых жесткостях), сдвига в плоскости плиты (при жесткостях на сдвиг), изгиба в своей плоскости (при соответствующих изгибных жесткостях).

Таким образом, в матрицах жесткости МСД присутствуют физически ясные жесткостные характеристики, подробно изучаемые в теории железобетона. Из сказанного следует, что в основных своих положениях МСД имеет определенные преимущества перед МКЭ применительно к расчету изгибаемых железобетонных плит перекрытий.

В настоящей работе формируется плоско-изгибная расчетная модель для сборной железобетонной плиты перекрытия, опертой по контуру, в монолитных многоэтажных зданиях.

## 5.2. Расчет изгибаемых железобетонных плит перекрытий и их фрагментов МСД

Дискретные модели для изгибаемых железобетонных плит в форме жестких элементов (брусьев), соединенных упругими связями, сопротивляющимися изгибу и кручению, предлагались и ранее, например в [4,5].

Развиваемая здесь расчетная модель, основанная на методе сосредоточенных деформаций, отличается от известных расчетных моделей общностью и универсальностью; она позволяет вести расчет конструкций, составленных из разнотипных элементов (имеющих различные размеры и физические характеристики); кроме того элементы могут иметь реальные связи между собой, что характерно для сборных железобетонных плитных конструкций (перекрытий, элементов каркаса многоэтажных зданий и т.д.).

Рассмотрим вначале изгибаемую плиту постоянной толщины, изотропную в упругой стадии работы без реальных швов. Исходная изгибаемая железобетонная плита перекрытия сплошного сечения разбивается плоскостями сосредоточенных деформаций на прямоугольные (квадратные) элементы размером  $a_k * b_k$  (рис. 5.2.1. и 5.2.3.).

Рассматривая эти «элементы МСД» как жесткие на изгиб, кручение и сдвиг (срез), из своей плоскости и в своей плоскости введем между ними условные (фиктивные) связи, способные сопротивляться изгибу, кручению, сдвигу и сжатию-растяжению; характеристики жесткости этих связей должны быть назначены такими, чтобы исходная плита и ее модуль в МСД были эквивалентными, т.е. при действии нагрузки давали одинаковые прогибы, углы поворота, величины изгибающих и крутящих моментов, и поперечных (перерезывающих) сил в интересующих сечениях.

Задачу о напряженно-деформированном состоянии изгибаемой плиты будем решать на основе метода перемещений; каждый элемент МСД закрепляется фиктивными связями, исключаящими его поворот вокруг оси  $X$ , поворот вокруг оси  $Z$  и перемещение в направлении оси  $Y$ . Аналогичные связи вводятся во всех других элементах МСД. На рис. 5.2.2 и 5.2.4 показана схема

внутренних сил по плоскостям сосредоточенных деформаций; внешние силы сводятся к узловым, прикладываемым в местах фиктивных связей метода перемещений. Чаще всего эти внешние силы – поперечная нагрузка из плоскости плиты; однако нагрузки могут быть приложены в виде изгибающих моментов, что не меняет последовательности расчета и его трудоемкости.

Напряженно-деформированное состояние железобетонных плит раскрывается из системы алгебраических линейных уравнений метода перемещений в общей форме

$$[R]*\{V\} = \{P\} \quad (5.2.1)$$

где:  $[R]$  - матрица внешней жесткости для всей рассчитываемой системы; ее элементы  $R_{i,j}$  – реакция в  $i$ -й связи метода перемещений от смещения  $j$ -й связи на единицу;  $\{V\}$  - вектор искомых перемещений, его элементы – перемещения элементов МСД (по два угловых и одному линейному для каждого);  $\{P\}$  - вектор нагрузок, его элементы – сосредоточенные силы и изгибающие моменты, действующие в узлах закрепления элементов МСД.

По перемещениям на основе общих зависимостей определяются внутренние силы

$$\{F\} = [D]*\{\lambda\} \quad (5.2.2)$$

где:

$\{F\}$  - вектор внутренних сил, элементами которого являются внутренние силы по плоскостям сосредоточенных деформаций (изгибающий момент  $M$ , крутящий момент  $H$  и поперечная сила  $Q$  с каждой из четырех сторон элемента МСД);  $[D]$  – матрица внутренней жесткости системы, ее элементы – внутренние силы по плоскостям сосредоточенных деформаций от единичного взаимного смещения соседних элементов МСД;  $\{\lambda\}$  - вектор сосредоточенных деформаций (взаимных смещений и поворотов элементов МСД).

**Для всех сечений элементов МСД по плоскостям сосредоточенных деформаций принимается гипотеза плоских сечений.**

Система алгебраических уравнений (5.2.1) решается относительно вектора перемещений  $\{V\}$ . Для этого должны быть известны матрица внешней жесткости  $[R]$  и вектор узловых нагрузок  $\{P\}$ .

Имея расчетную модель, без особых затруднений можно составить вектор внешних сил  $\{P\}$ . Основная трудность заключается в формировании матрицы внешней жесткости системы  $[R]$ . Для ее построения можно применить способ единичных перемещений элементов МСД в направлении наложенных связей.

Однако, как показала практика, удобнее воспользоваться формулой

$$[R] = [A]*[K]*[A]^T \quad (5.2.3)$$

$[A]$  - матрица, коэффициентов уравнений равновесия элементов МСД;

$[A]^T$  - матрица, транспонированная с матрицей коэффициентов уравнений равновесия  $[A]$ ;

$[K]$  - матрица внутренней жесткости сечений. Согласно формуле (5.2.2) связь между внутренними усилиями по плоскостям сосредоточенных деформаций и соответствующими деформациями для типового  $k$ -го элемента МСД запишем в матричном виде (рис. 5.2.2 и 5.2.4)

$$\{F\}_k = [\mathcal{E}]_k * \{\lambda\}_k \quad (5.2.4)$$

где:  $\{F\}_k$  - вектор внутренних сил по граням  $k$ -го элемента по плоскостям сосредоточенных деформаций;

$[\mathcal{E}]_k$  - матрица жесткости сечений для  $k$ -го элемента по тем же граням;

$\{\lambda\}_k$  - вектор соответствующих деформаций.

Рассмотрим сечение между  $k$ -м и  $(k-m)$ -м элементами, тогда связь между внутренними силами и соответствующими деформациями запишется

$$\begin{aligned} N_{k,k-m} &= (EA)_{k,k-m} * \varepsilon_{k,k-m} \\ M_{k,k-m} &= (EJ)_{k,k-m} * K_{k,k-m} \\ Q_{k,k-m} &= (GA/x)_{k,k-m} * \gamma_{k,k-m} \\ M_{k,k-m} &= (EJ)_{k,k-m} * K_{k,k-m} \\ H_{k,k-m} &= (GJ)_{k,k-m} * \rho_{k,k-m} \\ Q_{k,k-m} &= (GA/x)_{k,k-m} * \gamma_{k,k-m} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

В формуле (5.2.5) выражения жесткостей связей МСД согласно [23, 26] записываются в виде

$$\begin{aligned} \eta_{k,k-m} &= (EA)_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\ \omega_{k,k-m} &= (EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\ \varepsilon_{k,k-m} &= (GA)_{k,k-m} / a_{k,k-m} * x \\ \omega_{k,k-m} &= (EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\ \psi_{k,k-m} &= (GJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\ \varepsilon_{k,k-m} &= (GA)_{k,k-m} / a_{k,k-m} * x \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

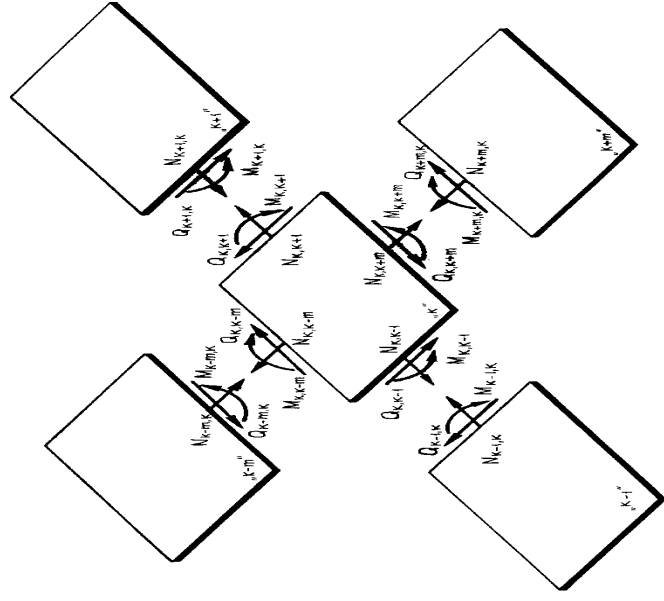


Рис. 5.2.2. Изгибаемая плита, внутренние силы ПЛОСКО-напряженного

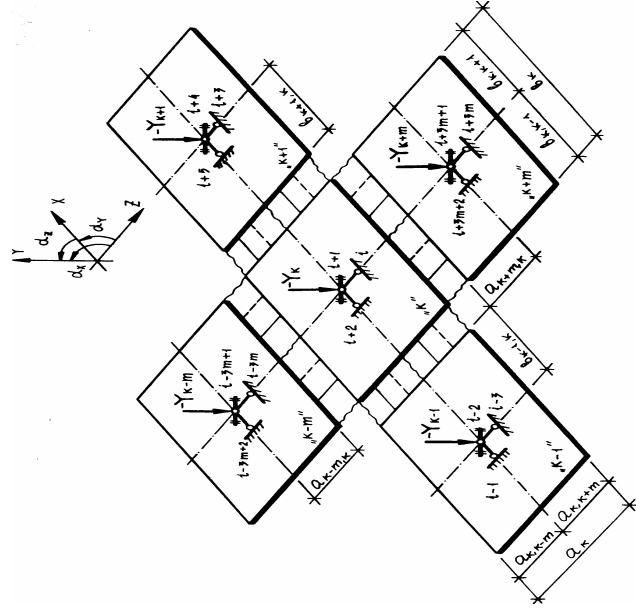


Рис. 5.2.1. Изгибаемая плита, связь метода перемещений для плоско-напряженного состояния

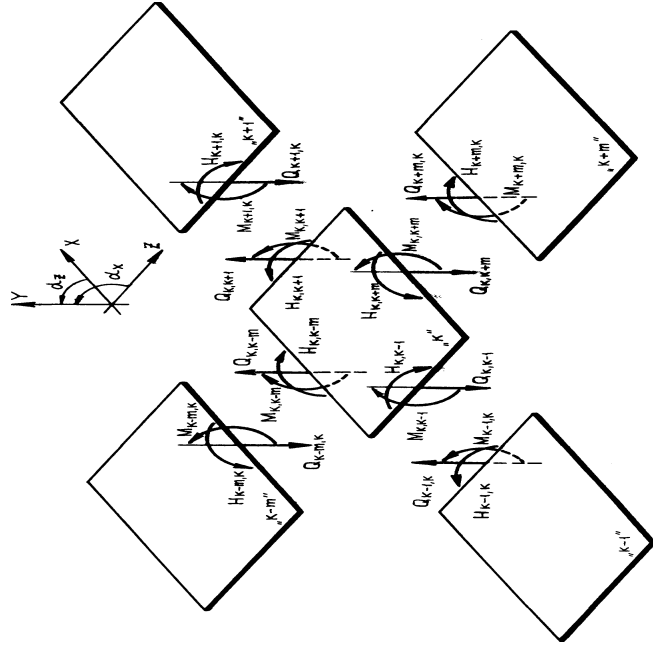


Рис. 5.2.4. Изгибаемая плита, внутренние силы МСД

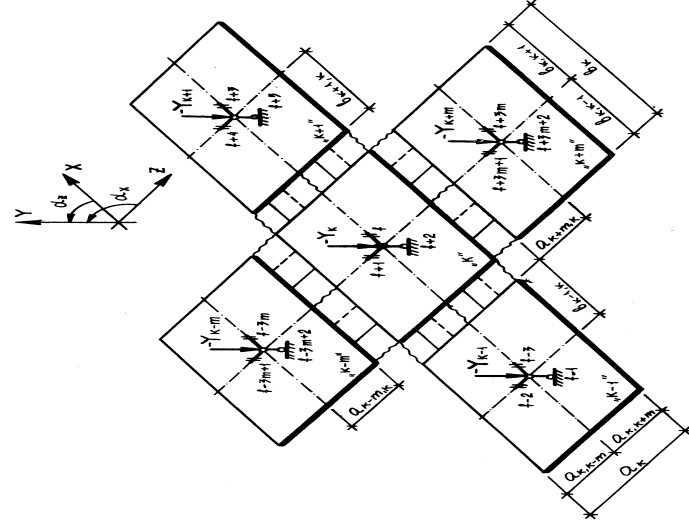


Рис. 5.2.3. Изгибаемая пластина, схема МСЛ

Здесь:  $E$  - модуль упругости материала  $k$ -го элемента;

$A$  - площадь поперечного сечения торца  $k$ -го элемента со стороны  $(k-m)$  - го элемента;

$J_{k,k-m}$  - момент инерции того же сечения относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости  $k$ -го элемента;

$G_{k,k-m}$  - модуль сдвига материала  $k$ -го элемента;

$\varepsilon_{k,k-m}$  - продольные деформации в направлении оси  $Z$ ;

$K_{k,k-m}; K_{k,k-m}$  - кривизна этой же оси;

$\gamma_{k,k-m}; \gamma_{k,k-m}$  - угол сдвига в  $k$ -ом элементе МСД со стороны  $(k-m)$  - го элемента МСД;

$\rho_{k,k-m}$  - кривизна кручения оси  $Z$ ;

$\alpha$  - коэффициент сдвига.

По аналогии с (5.2.5) записываются соотношения между внутренними усилиями и деформациями по всем остальным граням  $k$ -го элемента МСД.

Таким образом, вектор деформаций для  $k$ -го элемента будет иметь вид

$$\begin{aligned} \{\lambda\}_k = & \{\varepsilon_{k,k-m}; K_{k,k-m}; \gamma_{k,k-m}; K_{k,k-m}; \rho_{k,k-m}; \gamma_{k,k-m}; \\ & \varepsilon_{k,k-1}; K_{k,k-1}; \gamma_{k,k-1}; K_{k,k-1}; \rho_{k,k-1}; \gamma_{k,k-1}; \\ & \varepsilon_{k,k+1}; K_{k,k+1}; \gamma_{k,k+1}; K_{k,k+1}; \rho_{k,k+1}; \gamma_{k,k+1}; \\ & \varepsilon_{k,k+m}; K_{k,k+m}; \gamma_{k,k+m}; K_{k,k+m}; \rho_{k,k+m}; \gamma_{k,k+m}\}^T \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Суммируя соотношения (5.2.4, 5.2.5 и 5.2.7) можно составить матрицу жесткости сечения  $[K]$  для типового  $k$  - го элемента, которая показана в табл. 5.2.1.

Задавая единичные перемещения в направлении связей МСД и полагая деформации постоянными в пределах между гранями элемента МСД и узлами закрепления элемента МСД по методу перемещений, для грани между  $k$ -м и  $(k-m)$  - м элементами, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,k-m} &= 1/a_{k,k-m}; K_{k,k-m} = 1/a_{k,k-m}; \\ \gamma_{k,k-m} &= 1/a_{k,k-m}; K_{k,k-m} = 1/a_{k,k-m}; \\ \rho_{k,k-m} &= 1/a_{k,k-m}; \gamma_{k,k-m} = 1/a_{k,k-m}. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$



Тогда, используя (5.2.8) и (5.2.5) находим внутренние  
силы

192

Таблица 5.2.1.

Матрица элементной жесткости  $[\mathcal{E}]_k$  для железобетонной плиты

Элементы МСД	Внутренние силы	№	$k - m$						$k - 1$					
			$\omega_{k,k-m}$	$\varphi_{k,k-m}$	$u_{k,k-m}$	$\beta_{k,k-m}$	$\alpha_{k,k-m}$	$\nu_{k,k-m}$	$\omega_{k,k-1}$	$\varphi_{k,k-1}$	$u_{k,k-1}$	$\beta_{k,k-1}$	$\alpha_{k,k-1}$	$\nu_{k,k-1}$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k - m$	$N_{k,k-m}$	1	$\eta_{k,k-m}$											
	$M_{k,k-m}$	2		$\omega_{k,k-m}$										
	$Q_{k,k-m}$	3			$\varepsilon_{k,k-m}$									
	$M_{k,k-m}$	4				$\omega_{k,k-m}$								
	$H_{k,k-m}$	5					$\psi_{k,k-m}$							
	$Q_{k,k-m}$	6						$\varepsilon_{k,k-m}$						
$k - 1$	$N_{k,k-1}$	7							$\eta_{k,k-1}$					
	$M_{k,k-1}$	8								$\omega_{k,k-1}$				
	$Q_{k,k-1}$	9									$\varepsilon_{k,k-1}$			
	$M_{k,k-1}$	10										$\omega_{k,k-1}$		
	$H_{k,k-1}$	11											$\psi_{k,k-1}$	
	$Q_{k,k-1}$	12												$\varepsilon_{k,k-1}$

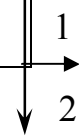


Таблица 5.2.1.(продолжение)

193

Матрица элементной жесткости  $L_k$  для железобетонной плиты

Элементы МСД	Внутренние силы	№	$k + 1$						$k + m$					
			$\omega_{k,k+1}$	$\varphi_{k,k+1}$	$u_{k,k+1}$	$\beta_{k,k+1}$	$\alpha_{k,k+1}$	$\nu_{k,k+1}$	$\omega_{k,k+m}$	$\varphi_{k,k+m}$	$u_{k,k+m}$	$\beta_{k,k+m}$	$\alpha_{k,k+m}$	$\nu_{k,k+m}$
			13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$k + 1$	$N_{k,k+1}$	13	$\eta_{k,k+1}$											
	$M_{k,k+1}$	14		$\omega_{k,k+1}$										
	$Q_{k,k+1}$	15			$\varepsilon_{k,k+1}$									
	$M_{k,k+1}$	16				$\omega_{k,k+1}$								
	$H_{k,k+1}$	17					$\psi_{k,k+1}$							
	$Q_{k,k+1}$	18						$\varepsilon_{k,k+1}$						
$k + m$	$N_{k,k+m}$	19							$\eta_{k,k+m}$					
	$M_{k,k+m}$	20								$\omega_{k,k+m}$				
	$Q_{k,k+m}$	21									$\varepsilon_{k,k+m}$			
	$M_{k,k+m}$	22										$\omega_{k,k+m}$		
	$H_{k,k+m}$	23											$\psi_{k,k+m}$	

	$Q_{k,k+m}$	<b>24</b>													$\mathcal{E}_{k,k+m}$
--	-------------	-----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------------

при единичных перемещениях по плоскостям сосредоточенных деформаций

$$\begin{aligned}
 N_{k,k-m} &= 1^*(EA)_{k,k-m} / a_{k,k-m}; & M_{k,k-m} &= 1^*(EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\
 Q_{k,k-m} &= 1^*(GA/x)_{k,k-m} / a_{k,k-m}; & M_{k,k-m} &= 1^*(EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\
 H_{k,k-m} &= 1^*(GJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m}; & Q_{k,k-m} &= 1^*(GA/x)_{k,k-m} / a_{k,k-m}
 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Аналогично записываются выражения по всем другим граням  $k$ -го элемента. Правые части (5.2.9) являются элементами матрицы внутренней жесткости для  $k$ -го элемента МСД. На основе (5.2.9) составим матрицу внутренней жесткости  $k$ -го элемента МСД, учитывая последовательное соединение собственных связей метода сосредоточенных деформаций, вызывавших единичные взаимные перемещения  $k$ -го элемента МСД относительно  $(k-m)$ -го элемента

$$\begin{aligned}
 N_{k,k-m} &= 1^*(((EA)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((EA)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} \\
 M_{k,k-m} &= 1^*(((EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((EJ)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} \\
 Q_{k,k-m} &= 1^*(((GA/x)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((GA/x)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} \\
 M_{k,k-m} &= 1^*(((EJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((EJ)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} \\
 H_{k,k-m} &= 1^*(((GJ)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((GJ)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1} \\
 Q_{k,k-m} &= 1^*(((GA/x)_{k,k-m} / a_{k,k-m})^{-1} + ((GA/x)_{k-m,k} / a_{k-m,k})^{-1})^{-1}
 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Таким же образом составляются соотношения по другим плоскостям сосредоточенных деформаций вокруг  $k$ -го элемента.

Необходимо отметить, что правые части (5.2.10) являются элементами МСД и можно представить в виде табл. 5.2.2. На основании (5.2.4) и (5.2.10) связь между внутренними силами и взаимными смещениями элементов можно записать в матричной форме

$$\{F\}_k = [K]_k * \{\Delta v\}_k \quad (5.2.11)$$

где:

$$\{F\}_k = \left\{ \begin{array}{l} N_{k,k-m}; M_{k,k-m}; Q_{k,k-m}; M_{k,k-m}; H_{k,k-m}; Q_{k,k-m}; \\ N_{k,k-1}; M_{k,k-1}; Q_{k,k-1}; M_{k,k-1}; H_{k,k-1}; Q_{k,k-1}; \\ N_{k,k+1}; M_{k,k+1}; Q_{k,k+1}; M_{k,k+1}; H_{k,k+1}; Q_{k,k+1}; \\ N_{k,k+m}; M_{k,k+m}; Q_{k,k+m}; M_{k,k+m}; H_{k,k+m}; Q_{k,k+m} \end{array} \right\}^T$$

$$\{\Delta v\}_k = \left\{ \begin{aligned} &\Delta\omega_{k,k-m}; \Delta\varphi_{k,k-m}; \Delta u_{k,k-m}; \Delta\beta_{k,k-m}; \Delta\alpha_{k,k-m}; \Delta v_{k,k-m}; \\ &\Delta\omega_{k,k-1}; \Delta\varphi_{k,k-1}; \Delta u_{k,k-1}; \Delta\beta_{k,k-1}; \Delta\alpha_{k,k-1}; \Delta v_{k,k-1}; \\ &\Delta\omega_{k,k+1}; \Delta\varphi_{k,k+1}; \Delta u_{k,k+1}; \Delta\beta_{k,k+1}; \Delta\alpha_{k,k+1}; \Delta v_{k,k+1}; \\ &\Delta\omega_{k,k+m}; \Delta\varphi_{k,k+m}; \Delta u_{k,k+m}; \Delta\beta_{k,k+m}; \Delta\alpha_{k,k+m}; \Delta v_{k,k+m} \end{aligned} \right\}^T$$

Таблица 5.2.2.

Элементы матрицы  $[K]_k$  для плиты

Эл. МСД	№	$\mathcal{E}_{j,j}$	Формулы
$k-m$	1	$\mathcal{E}_{1,1}$	$(\eta_{k,k-m}^{-1} + \eta_{k-m,k}^{-1})^{-1}$
	2	$\mathcal{E}_{2,2}$	$(\omega_{k,k-m}^{-1} + \omega_{k-m,k}^{-1})^{-1}$
	3	$\mathcal{E}_{3,3}$	$(\xi_{k,k-m}^{-1} + \xi_{k-m,k}^{-1})^{-1}$
	4	$\mathcal{E}_{4,4}$	$(\omega_{k,k-m}^{-1} + \omega_{k-m,k}^{-1})^{-1}$
	5	$\mathcal{E}_{5,5}$	$(\psi_{k,k-m}^{-1} + \psi_{k-m,k}^{-1})^{-1}$
	6	$\mathcal{E}_{6,6}$	$(\xi_{k,k-m}^{-1} + \xi_{k-m,k}^{-1})^{-1}$
$k-1$	7	$\mathcal{E}_{7,7}$	$(\eta_{k,k-1}^{-1} + \eta_{k-1,k}^{-1})^{-1}$
	8	$\mathcal{E}_{8,8}$	$(\omega_{k,k-1}^{-1} + \omega_{k-1,k}^{-1})^{-1}$
	9	$\mathcal{E}_{9,9}$	$(\xi_{k,k-1}^{-1} + \xi_{k-1,k}^{-1})^{-1}$
	10	$\mathcal{E}_{10,10}$	$(\omega_{k,k-1}^{-1} + \omega_{k-1,k}^{-1})^{-1}$
	11	$\mathcal{E}_{11,11}$	$(\psi_{k,k-1}^{-1} + \psi_{k-1,k}^{-1})^{-1}$
	12	$\mathcal{E}_{12,12}$	$(\xi_{k,k-1}^{-1} + \xi_{k-1,k}^{-1})^{-1}$
$k+1$	13	$\mathcal{E}_{13,13}$	$(\eta_{k,k+1}^{-1} + \eta_{k+1,k}^{-1})^{-1}$
	14	$\mathcal{E}_{14,14}$	$(\omega_{k,k+1}^{-1} + \omega_{k+1,k}^{-1})^{-1}$
	15	$\mathcal{E}_{15,15}$	$(\xi_{k,k+1}^{-1} + \xi_{k+1,k}^{-1})^{-1}$
	16	$\mathcal{E}_{16,16}$	$(\omega_{k,k+1}^{-1} + \omega_{k+1,k}^{-1})^{-1}$
	17	$\mathcal{E}_{17,17}$	$(\psi_{k,k+1}^{-1} + \psi_{k+1,k}^{-1})^{-1}$
	18	$\mathcal{E}_{18,18}$	$(\xi_{k,k+1}^{-1} + \xi_{k+1,k}^{-1})^{-1}$
$k+m$	19	$\mathcal{E}_{19,19}$	$(\eta_{k,k+m}^{-1} + \eta_{k+m,k}^{-1})^{-1}$
	20	$\mathcal{E}_{20,20}$	$(\omega_{k,k+m}^{-1} + \omega_{k+m,k}^{-1})^{-1}$
	21	$\mathcal{E}_{21,21}$	$(\xi_{k,k+m}^{-1} + \xi_{k+m,k}^{-1})^{-1}$
	22	$\mathcal{E}_{22,22}$	$(\omega_{k,k+m}^{-1} + \omega_{k+m,k}^{-1})^{-1}$
	23	$\mathcal{E}_{23,23}$	$(\psi_{k,k+m}^{-1} + \psi_{k+m,k}^{-1})^{-1}$
	24	$\mathcal{E}_{24,24}$	$(\xi_{k,k+m}^{-1} + \xi_{k+m,k}^{-1})^{-1}$

В свою очередь взаимные смещения элементов МСД по смежным граням  $k$ -го и  $(k-m)$ -го элементов выразятся

$$\Delta \omega_{k,k-m} = \omega_k - \omega_{k-m}; \quad \Delta \varphi_{k,k-m} = \varphi_k - \varphi_{k-m};$$

$$\Delta u_{k,k-m} = -u_k + u_{k-m} + \varphi_k * a_{k,k-m} + \varphi_{k-m} * a_{k-m,k};$$

**(5.2.12)**

$$\Delta \beta_{k,k-m} = \beta_k - \beta_{k-m}; \quad \Delta \alpha_{k,k-m} = \alpha_k - \alpha_{k-m};$$

$$\Delta u_{k,k-m} = -u_k + u_{k-m} + \beta_k * a_{k,k-m} + \beta_{k-m} * a_{k-m,k}.$$

Также определяются взаимные смещения других элементов по всем остальным граням  $k$ -го элемента.

Матрицу внутренней жесткости на основе формул (5.2.10.) запишем для всего  $k$ -го элемента, используя для сокращения блочную запись матриц

$$[K]_k = \begin{bmatrix} [\vartheta]_{k,k-m} & & & \\ & [\vartheta]_{k,k-1} & & \\ & & [\vartheta]_{k,k+1} & \\ & & & [\vartheta]_{k,k+m} \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

Из элементных матриц внутренней жесткости  $[K]_k$  собирается матрица внутренней жесткости всей системы  $[K]$ , состоящей из  $n$  элементов МСД. Матрица  $[K]_k$  подробно представлена в развернутом виде в таблице 5.2.3.

Теперь, перемножая матрицы  $[R]_k$ ,  $[K]_k$  и  $[A]_k^T$ , получим матрицу внешней жесткости  $[R]_k$  для  $k$ -го элемента. В данном случае, при диагональной матрице  $[K]_k$ , перемножение указанных матриц можно выполнить построчно. Используя матрицу  $[A]_k$  и матрицы типа  $[K]_k$ , запишем элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  для общего случая; элементы матрицы приведены в табл. 5.2.4 ÷ 5.2.9. Глобальная матрица  $[R]$  табл. 5.2.10 размером  $6 \cdot m \cdot n$  по общему числу связей метода перемещений будет иметь 3-х диагональную структуру с шириной ленты

$$L = (3n + 2) * 2,$$

где:  $n$  - число элементов МСД в коротком направлении рассчитываемой плитной конструкции.

Решив систему (5.2.1.) и определив перемещение всех элементов МСД, по формуле (5.2.2) можно определять внутренние силы.



Таблица 5.2.3.

Матрица элементной жесткости  $[K]_k$  для железобетонной плиты

Элементы МСД	Внутренние силы	№	$k - m$						$k - 1$						
			$i - 3m$	$i - 3m + 1$	$i - 3m + 2$	$f - 3m$	$f - 3m + 1$	$f - 3m + 2$	$i - 1$	$i - 2$	$i - 3$	$f - 2$	$f - 3$	$f - 1$	
			$i$	$i + 1$	$i + 2$	$f$	$f + 1$	$f + 2$	$i + 2$	$i + 1$	$i$	$f + 1$	$f$	$f + 2$	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$k - m$	$N_{k,k-m}$	1	$\mathfrak{A}_{1,1}$												
	$M_{k,k-m}$	2		$\mathfrak{A}_{2,2}$											
	$Q_{k,k-m}$	3			$\mathfrak{A}_{3,3}$										
	$M_{k,k-m}$	4				$\mathfrak{A}_{4,4}$									
	$H_{k,k-m}$	5					$\mathfrak{A}_{5,5}$								
	$Q_{k,k-m}$	6						$\mathfrak{A}_{6,6}$							
$k - 1$	$N_{k,k-1}$	7							$\mathfrak{A}_{7,7}$						
	$M_{k,k-1}$	8								$\mathfrak{A}_{8,8}$					
	$Q_{k,k-1}$	9									$\mathfrak{A}_{9,9}$				
	$M_{k,k-1}$	10										$\mathfrak{A}_{10,10}$			
	$H_{k,k-1}$	11											$\mathfrak{A}_{11,11}$		

	$Q_{k,k-1}$	<b>1</b> <b>2</b>												$\mathcal{E}_{12,12}$
--	-------------	----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------------

Структура матрицы  $[K]_k$  для железобетонной плиты

1	2	Элементы МСД	Внутренние силы	№	$k + 1$						$k + m$					
					$i + 5$	$i + 4$	$i + 3$	$f + 4$	$f + 3$	$f + 5$	$i - 3m$	$i - 3m + 1$	$i - 3m + 2$	$f - 3m$	$f - 3m + 1$	$f - 3m + 1$
					$i + 2$	$i + 1$	$i$	$f + 1$	$f$	$f + 2$	$i$	$i + 1$	$i + 2$	$f$	$f + 1$	$f + 2$
					<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$k + 1$	$N_{k,k+1}$	<b>13</b>	$\mathcal{E}_{13,13}$													
	$M_{k,k+1}$	<b>14</b>		$\mathcal{E}_{14,14}$												
	$Q_{k,k+1}$	<b>15</b>			$\mathcal{E}_{15,15}$											
	$M_{k,k+1}$	<b>16</b>				$\mathcal{E}_{16,16}$										
	$H_{k,k+1}$	<b>17</b>					$\mathcal{E}_{17,17}$									
	$Q_{k,k+1}$	<b>18</b>						$\mathcal{E}_{18,18}$								
$k + m$	$N_{k,k+m}$	<b>19</b>						$\mathcal{E}_{19,19}$								
	$M_{k,k+m}$	<b>20</b>							$\mathcal{E}_{20,20}$							
	$Q_{k,k+m}$	<b>21</b>								$\mathcal{E}_{21,21}$						
	$M_{k,k+m}$	<b>22</b>									$\mathcal{E}_{22,22}$					

	$H_{k,k+m}$	<b>23</b>											$\mathfrak{E}_{23,23}$	
	$Q_{k,k+m}$	<b>24</b>												$\mathfrak{E}_{24,24}$

Таблица 5.2.4.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

Эл.М СД	№	Связи	$R_{i,j}; \quad j=i-3m,\dots,f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	$\mathcal{E}_{1,1}$
	2	$i-3m+1$	0
	3	$i-3m+2$	0
	4	$f-3m$	$-HOS2 * \mathcal{E}_{1,1}$
	5	$f-3m+1$	0
	6	$f-3m+2$	0
$k-1$	7	$i-3$	$-\mathcal{E}_{1,1}$
	8	$i-2$	$e_{k-1,1} * \mathcal{E}_{9,9}$
	9	$i-1$	0
	10	$f-3$	0
	11	$f-2$	0
	12	$f-1$	0
$k$	13	$i$	$\mathcal{E}_{1,1} + \mathcal{E}_{9,9} + \mathcal{E}_{15,15} + \mathcal{E}_{19,19}$
	14	$i+1$	$e_{k,k-1} * \mathcal{E}_{9,9} - e_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,15}$
	15	$i+2$	0
	16	$f$	$HOS2 * \mathcal{E}_{1,1} + HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	17	$f+1$	0
	18	$f+2$	0
$k+1$	19	$i+3$	$-\mathcal{E}_{15,15}$
	20	$i+4$	$-e_{k+1,k} * \mathcal{E}_{15,15}$
	21	$i+5$	0
	22	$f+3$	0
	23	$f+4$	0
	24	$f+5$	0
$k+m$	25	$i+3m$	$-\mathcal{E}_{19,19}$
	26	$i+3m+1$	0
	27	$i+3m+2$	0
	28	$f+3m$	$-HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	29	$f+3m+1$	0
	30	$f+3m+2$	0

Таблица 5.2.5.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

Эл.М СД	№	Связи	$R_{i,j}; \quad j=i-3m,\dots,f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	0
	2	$i-3m+1$	$-\mathcal{E}_{2,2} + a_{k-m,k}^2 * \mathcal{E}_{3,3}$
	3	$i-3m+2$	$a_{k-m,k} * \mathcal{E}_{3,3}$
	4	$f-3m$	0
	5	$f-3m+1$	0
	6	$f-3m+2$	0
$k-1$	7	$i-3$	$-e_{k-1,k} * \mathcal{E}_{9,9}$
	8	$i-2$	$-\mathcal{E}_{8,8} + e_{k-1,k}^2 * \mathcal{E}_{9,9}$
	9	$i-1$	0
	10	$f-3$	0
	11	$f-2$	0
	12	$f-1$	0
$k$	13	$i$	$e_{k,k-1} * \mathcal{E}_{9,9} - e_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,15}$
	14	$i+1$	$\mathcal{E}_{2,2} + a_{k,k-m}^2 * \mathcal{E}_{3,3} + \mathcal{E}_{8,8} + e_{k,k-1}^2 * \mathcal{E}_{9,9} + \mathcal{E}_{14,14} + e_{k,k+1}^2 * \mathcal{E}_{15,15} + \mathcal{E}_{20,20} + a_{k,k+m}^2 * \mathcal{E}_{21,21}$
	15	$i+2$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,3} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,21}$
	16	$f$	0
	17	$f+1$	0
	18	$f+2$	0
$k+1$	19	$i+3$	$e_{k+1,k} * \mathcal{E}_{15,15}$
	20	$i+4$	$-\mathcal{E}_{14,14} + e_{k+1,k}^2 * \mathcal{E}_{15,15}$
	21	$i+5$	0
	22	$f+3$	0
	23	$f+4$	0
	24	$f+5$	0
$k+m$	25	$i+3m$	0
	26	$i+3m+1$	$-\mathcal{E}_{20,20} + a_{k+m,k}^2 * \mathcal{E}_{21,21}$
	27	$i+3m+2$	$-a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{21,21}$
	28	$f+3m$	0
	29	$f+3m+1$	0
	30	$f+3m+2$	0

Таблица 5.2.6.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл.М СД	№	СВЯЗИ	$R_{i+2,j}; \quad j=i-3m, \dots, f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	0
	2	$i-3m+1$	$-a_{k-m,k} * \mathcal{E}_{3,3}$
	3	$i-3m+2$	$-\mathcal{E}_{3,3}$
	4	$f-3m$	0
	5	$f-3m+1$	0
	6	$f-3m+2$	0
$k-1$	7	$i-3$	0
	8	$i-2$	0
	9	$i-1$	$-\mathcal{E}_{7,7}$
	10	$f-3$	0
	11	$f-2$	$-HOS1 * \mathcal{E}_{7,7}$
	12	$f-1$	0
$k$	13	$i$	0
	14	$i+1$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,3} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,21}$
	15	$i+2$	$\mathcal{E}_{3,3} + \mathcal{E}_{7,7} + \mathcal{E}_{13,13} + \mathcal{E}_{21,21}$
	16	$f$	0
	17	$f+1$	$HOS1 * \mathcal{E}_{7,7} + HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	18	$f+2$	0
$k+1$	19	$i+3$	0
	20	$i+4$	0
	21	$i+5$	$-\mathcal{E}_{13,13}$
	22	$f+3$	0
	23	$f+4$	$-HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	24	$f+5$	0
$k+m$	25	$i+3m$	0
	26	$i+3m+1$	$a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{21,21}$
	27	$i+3m+2$	$-\mathcal{E}_{21,21}$
	28	$f+3m$	0
	29	$f+3m+1$	0
	30	$f+3m+2$	0

Таблица 5.2.7.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл.М СД	№	СВЯЗИ	$R_{f+1,j}; \quad j=i-3m, \dots, f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	$-HOS * \mathcal{E}_{1,1}$
	2	$i-3m+1$	0
	3	$i-3m+2$	0
	4	$f-3m$	$-HOS2^2 * \mathcal{E}_{1,1} - \mathcal{E}_{4,4} + a^2_{k-m,k} * \mathcal{E}_{6,6}$
	5	$f-3m+1$	0
	6	$f-3m+2$	$A_{k-m,k} * \mathcal{E}_{6,6}$
$k-1$	7	$i-3$	0
	8	$i-2$	0
	9	$i-1$	0
	10	$f-3$	$-\mathcal{E}_{11,11}$
	11	$f-2$	0
	12	$f-1$	0
$k$	13	$i$	$HOS2 * \mathcal{E}_{1,1} + HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	14	$i+1$	0
	15	$i+2$	0
	16	$f$	$HOS2^2 * \mathcal{E}_{1,1} + \mathcal{E}_{4,4} + a^2_{k,k-m} * \mathcal{E}_{6,6} + \mathcal{E}_{11,11} + \mathcal{E}_{17,17} + HOS4^2 * \mathcal{E}_{19,19} + \mathcal{E}_{22,22} + a^2_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24}$
	17	$f+1$	0
	18	$f+2$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{6,6} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24}$
$k+1$	19	$i+3$	0
	20	$i+4$	0
	21	$i+5$	0
	22	$f+3$	$-\mathcal{E}_{17,17}$
	23	$f+4$	0
	24	$f+5$	0
$k+m$	25	$i+3m$	$-HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	26	$i+3m+1$	0
	27	$i+3m+2$	0
	28	$f+3m$	$-HOS4^2 * \mathcal{E}_{19,19} - \mathcal{E}_{22,22} + a^2_{k-m,k} * \mathcal{E}_{24,24}$
	29	$f+3m+1$	0
	30	$f+3m+2$	$-a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{24,24}$

Таблица 5.2.8.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл.М СД	№	СВЯЗИ	$R_{f+1,j}; \quad j=i-3m, \dots, f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	0
	2	$i-3m+1$	0
	3	$i-3m+2$	0
	4	$f-3m$	0
	5	$f-3m+1$	$-\mathcal{E}_{5,5}$
	6	$f-3m+2$	0
$k-1$	7	$i-3$	0
	8	$i-2$	0
	9	$i-1$	$-HOS1 * \mathcal{E}_{7,7}$
	10	$f-3$	0
	11	$f-2$	$-HOS1^2 * \mathcal{E}_{7,7} - \mathcal{E}_{10,10} + \mathfrak{e}_{k-1,k}^2 * \mathcal{E}_{12,12}$
	12	$f-1$	$\mathfrak{e}_{k-1,k} * \mathcal{E}_{12,12}$
$k$	13	$i$	0
	14	$i+1$	0
	15	$i+2$	$HOS1 * \mathcal{E}_{7,7} + HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	16	$f$	0
	17	$f+1$	$\mathcal{E}_{5,5} + HOS1^2 * \mathcal{E}_{7,7} + \mathcal{E}_{10,10} + \mathfrak{e}_{k,k-1}^2 * \mathcal{E}_{12,12} + HOS3^2 * \mathcal{E}_{13,13} + \mathcal{E}_{16,16} + \mathfrak{e}_{k,k+1}^2 * \mathcal{E}_{18,18} + \mathcal{E}_{23,23}$
	18	$f+2$	$-\mathfrak{e}_{k,k-1} * \mathcal{E}_{12,12} + \mathfrak{e}_{k,k+1} * \mathcal{E}_{18,18}$
$k+1$	19	$i+3$	0
	20	$i+4$	0
	21	$i+5$	$-HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	22	$f+3$	0
	23	$f+4$	$-HOS3^2 * \mathcal{E}_{13,13} - \mathcal{E}_{16,16} + \mathfrak{e}_{k+1,k}^2 * \mathcal{E}_{18,18}$
	24	$f+5$	$-\mathfrak{e}_{k+1,k} * \mathcal{E}_{18,18}$
$k+m$	25	$i+3m$	0
	26	$i+3m+1$	0
	27	$i+3m+2$	0
	28	$f+3m$	0
	29	$f+3m+1$	$-\mathcal{E}_{23,23}$
	30	$f+3m+2$	0

Таблица 5.2.9.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл.М СД	№	СВЯЗИ	$R_{f+2,j}; \quad j=i-3m, \dots, f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	0
	2	$i-3m+1$	0
	3	$i-3m+2$	0
	4	$f-3m$	$-a_{k-m,k} * \mathcal{E}_{6,6}$
	5	$f-3m+1$	0
	6	$f-3m+2$	$-\mathcal{E}_{6,6}$
$k-1$	7	$i-3$	0
	8	$i-2$	0
	9	$i-1$	0
	10	$f-3$	0
	11	$f-2$	$-\mathfrak{e}_{k-1,k} * \mathcal{E}_{12,12}$
	12	$f-1$	$-\mathcal{E}_{12,12}$
$k$	13	$i$	0
	14	$i+1$	0
	15	$i+2$	0
	16	$f$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{6,6} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24}$
	17	$f+1$	$-\mathfrak{e}_{k,k-1} * \mathcal{E}_{12,12} + \mathfrak{e}_{k,k+1} * \mathcal{E}_{18,18}$
	18	$f+2$	$\mathcal{E}_{6,6} + \mathcal{E}_{12,12} + \mathcal{E}_{18,18} + \mathcal{E}_{24,24}$
$k+1$	19	$i+3$	0
	20	$i+4$	0
	21	$i+5$	0
	22	$f+3$	0
	23	$f+4$	$-\mathfrak{e}_{k+1,k} * \mathcal{E}_{18,18}$
	24	$f+5$	$-\mathcal{E}_{18,18}$
$k+m$	25	$i+3m$	0
	26	$i+3m+1$	0
	27	$i+3m+2$	0
	28	$f+3m$	$a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{24,24}$
	29	$f+3m+1$	0
	30	$f+3m+2$	$-\mathcal{E}_{24,24}$

Таблица 5.2.10.

Структура матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  для плиты

Связи	$i$	$i+1$	$i+2$	$f$	$f+1$	$f+2$
$i-3m$	$R_{i,i-3m}$			$R_{f,i-3m}$		
$i-3m+1$		$R_{i+1,i-3m+1}$	$R_{i+2,i-3m+1}$			
$i-3m+2$		$R_{i+1,i-3m+2}$				
$f-3m$	$R_{i,f-3m}$			$R_{f,f-3m}$		$R_{f+2,f-3m}$
$f-3m+1$					$R_{f+1,f-3m+1}$	
$f-3m+2$				$R_{f,f-3m+2}$		$R_{f+2,f-3m+2}$
$i-3$	$R_{i,i-3}$	$R_{i+1,i-3}$				
$i-2$	$R_{i,i-2}$	$R_{i+1,i-2}$				
$i-1$			$R_{i+2,i-1}$		$R_{f+1,i-1}$	
$f-3$				$R_{f,f-3}$		
$f-2$			$R_{i+2,f-2}$		$R_{f+1,f-2}$	$R_{f+2,f-2}$
$f-1$					$R_{f+1,f-1}$	$R_{f+2,f-1}$
$i$	$R_{i,i}$	$R_{i+1,i}$		$R_{f,i}$		
$i+1$	$R_{i,i+1}$	$R_{i+1,i+1}$	$R_{i+2,i+1}$			
$i+2$		$R_{i+1,i+2}$	$R_{i+2,i+2}$		$R_{f+1,f+2}$	
$f$	$R_{i,f}$			$R_{f,f}$		$R_{f+2,f}$
$f+1$			$R_{i+2,f+1}$		$R_{f+1,f+1}$	$R_{f+2,f+1}$
$f+2$				$R_{f,f+2}$	$R_{f+1,f+2}$	$R_{f+2,f+2}$
$i+3$	$R_{i,i+3}$	$R_{i+1,i+3}$				
$i+4$	$R_{i,i+4}$	$R_{i+1,i+4}$				
$i+5$			$R_{i+2,i+5}$		$R_{f+1,i+5}$	
$f+3$				$R_{f,f+3}$		
$f+4$			$R_{i+2,f+4}$		$R_{f+1,f+4}$	$R_{f+2,f+4}$
$f+5$					$R_{f+1,f+5}$	$R_{f+2,f+5}$
$i+3m$	$R_{i,i+3m}$			$R_{f,i+3m}$		
$i+3m+1$		$R_{i+1,i+3m+1}$	$R_{i+2,i+3m+1}$			
$i+3m+2$		$R_{i+1,i+3m+2}$	$R_{i+2,i+3m+2}$			
$f+3m$	$R_{i,f+3m}$			$R_{f,f+3m}$		$R_{f+2,f+3m}$
$f+3m+1$					$R_{f+1,f+3m+1}$	
$f+3m+2$				$R_{f,f+3m+2}$		$R_{f+2,f+3m+2}$



### 5.3. Экспериментальные исследования по выявлению «эффекта распора» балочных плитах и фрагментах сборных железобетонных перекрытий на натуральных образцах

В данном исследовании рассматривалось изучение поведения железобетонной балочной плиты, находящейся в условиях сложного напряженно-деформированного состояния, обусловленного наличием распора.

В связи с этим была разработана методика экспериментальных исследований, предусматривающая испытание железобетонных свободно опертых сплошных балочных плит на действие вертикальных нагрузок, с закрепленными от горизонтальных смещений опорной части плит, а также для испытания сборных сплошных плоских плит в натуральную величину, свободно опертых по контуру.

Одной из задач экспериментальных исследований железобетонных балочных плит закрепленных от горизонтальных смещений являлось измерение величины распора. В связи с этим, для достижения поставленной задачи, были изготовлены жесткая рама и силомерное устройство. Для полной передачи горизонтальных усилий на силомерное устройство, закрепление их осуществлялось с помощью рамы, изготовленной из жестких швеллеров и стержневой арматуры. Для исключения подъема углов испытываемой плиты при загрузении были установлены специальные траверсы.

В результате экспериментальных исследований была измерена величина прогиба и распора в балочных плитах закрепленных от горизонтальных смещений на всех уровнях загрузки (рис.5.3.1), которая позволила проанализировать:

- измерение усилий распора т.е. количественно оценить эффект распора;
- влияние усилий распора на прочность, жесткость и трещиностойкость.

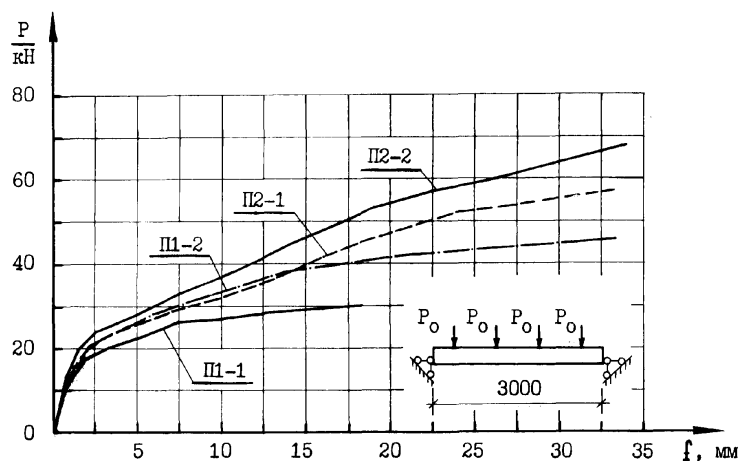


Рис. 5.3.1. Прогибы балочных плит в середине пролета

Кроме того, по замерам деформаций силомеров с помощью тарировочных кривых, определялась равнодействующая распора усилие  $N$ . По результатам

анализа тарировочных кривых установлено, что усилия распора действуют в пределах  $h/4$ , по высоте сечения балочных плит.

С повышением нагрузки происходит нарастание этих сил, т.е. усилий распора. Согласно картине трещинообразования в испытуемых конструкциях видно, что влияние усилий распора замечается на самых ранних ступенях ее загрузки, еще более существенно влияет распор на работу плит после появления трещин. После появления трещин силы распора препятствуют их распространению. На раскрытие трещин распор оказывает существенное влияние и настолько велико, что в плитах с учетом распора ширина раскрытия трещин меньше, по сравнению с плитами без распора на одних и тех же ступенях загрузки.

Сравнение графика прогибов показывает, что перемещения в плитах без учета распора больше  $1,75 \div 2,5$  раза, чем в плитах с учетом распора. Из этого следует что, распор существенно повышает жесткость конструкции.

Следовательно, по результатам экспериментальных исследований, можно сделать следующие выводы: чем меньше коэффициент армирования, тем выше влияние усилия распора на несущую способность конструкции. На основе вышеизложенного можно рекомендовать применение в конструкциях сплошного сечения плиты, опертые по контуру, с минимальными процентами армирования.

На заводе железобетонных конструкции в городе Новочебоксарске были проведены испытания железобетонных сборных плит перекрытий для многоэтажных монолитных зданий.

Основная цель испытания заключалась в оценке ее прочности, жесткости и трещиностойкости, а также совершенствования конструктивных решений и проверки технологичности изготовления сборных плоских плит перекрытий.

Сборные плоские плиты перекрытий, в отличие от выпускаемых на заводе плит, были изготовлены с изменением монтажных петель.

Плита перекрытия с толщиной 160 мм изготавливалась на заводе в горизонтальном положении, что при распалубке привело к преждевременному трещинообразованию в конструкциях.

В связи с этим, для предотвращения преждевременного образования трещин, нами предложено изменение проектного положения строповочных петель, а также изменение расположения монтажных петель на расстоянии 750 мм от края плиты в продольном и поперечном направлении. Плита перекрытия армировалась сеткой из стали А-III диаметром 6 мм (вместо стали Вр-1 диаметром 5 мм при том же шаге).

Для проведения испытания был изготовлен специальный стенд. Плита перекрытия опиралась шарнирно-подвижным и шарнирно-неподвижным опиранием по контуру, для предотвращения подъема углов при загрузке устанавливались специальные траверсы.

Загрузка плит перекрытий выполнялась тротуарными плитами весом 0,38 кН в 48 точках (площадках).

В процессе испытания замерялись прогибы плит перекрытий, ширина раскрытия трещин, относительные деформации бетонной поверхности и пролетной арматуры (рис. 5.3.2. и 5.3.3.).

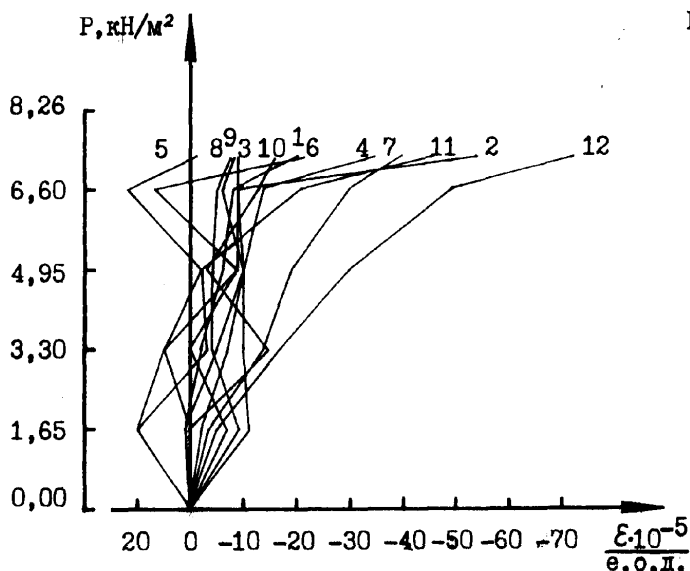


Рис. 5.3.2. Относительные деформации в растянутой арматуре

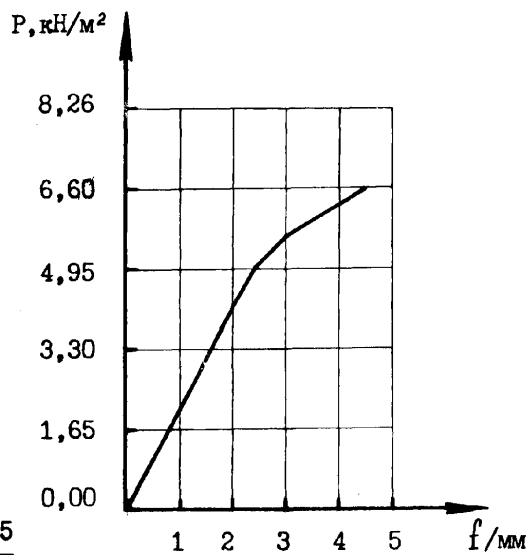


Рис. 5.3.3. Прогиб в середине пролета (без собственного веса)

По результатам испытаний плоских плит перекрытий установлено, что их фактическая прочность и жесткость намного превышают контрольные величины по прочности и жесткости. Указанное явление обусловлена наличием распорных сил действующих по их контуру. Учет эффекта распора в процессе проектирования позволит сократить расход рабочей арматуры.

#### 5.4. Метод сосредоточенных деформаций при расчете изгибаемых железобетонных плитных элементов и их систем с учетом нелинейной работы.

Расчетные положения сформулированные в пункте 5.2., относились к упруго работающим железобетонным плитным конструкциям и системам из них. В этом случае жесткостные характеристики элементов МСД (изгибная жесткость, сдвиговая жесткость и жесткость при кручении), как показано в п.5.2. определяются сравнительно просто.

В случае сборных и монолитных железобетонных плитных конструкций работающих и в условиях действия распорных усилий (рис. 5.4.1) осложнения вызываются тем, что сечения по плоскостям сосредоточенных деформаций являются комплексными (включают бетон, арматуру и реальные связи), кроме того известно, что (бетон и сталь), как правило, работают неупруго даже при относительно невысоких и непродолжительных внешних нагрузках.

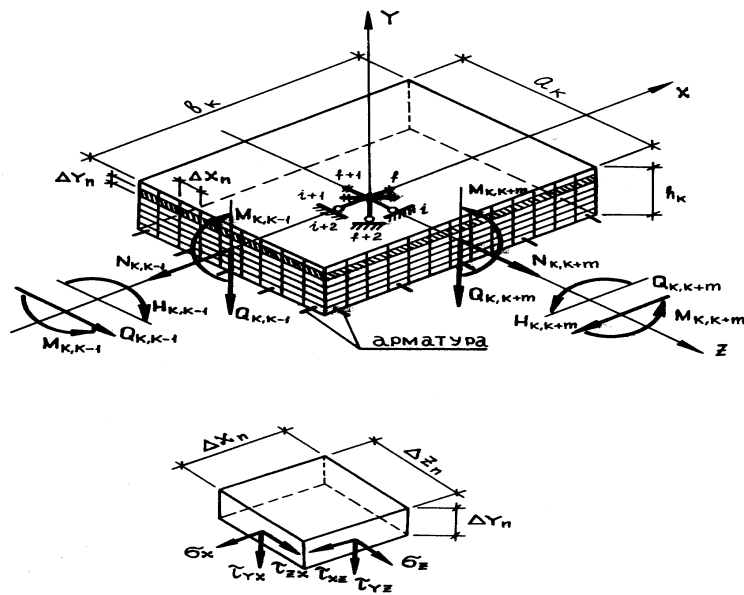


Рис.5.4.1. Расчетная схема по МСД для железобетонной плиты

Наряду с этим, необходимо считаться с тем, что с развитием неупругих деформаций по высоте (толщине) железобетонной плиты, плоскость (некоторая поверхность в деформированном состоянии), соединяющая точки с нулевыми деформациями, меняет свое положение, отклоняясь от нейтральной плоскости для упругого состояния.

Из этого следует то, что в общем случае железобетонная плита будет распорной системой, т.к. ее закрепление на опорах практически невозможно осуществить на уровне нейтральной плоскости (поверхности), меняющей свое положение в зависимости от уровня и длительности загрузки. Одним словом координатная плоскость  $XO$ , принимаемая произвольно расположенной по высоте (толщине) плиты, только для упругой стадии работы может совпадать с нейтральной плоскостью; очевидно, в большинстве случаев координатную плоскость  $XO$  удобно совмещать со срединной плоскостью или плоскостью, проходящей через центры сечений для упругой стадии работы.

Разумеется, положение координатной плоскости не должно влиять на результаты расчетов (перемещения, внутренние силы, деформации и т.д.).

Задача по расчету напряженно-деформированного состояния изгибаемой железобетонной плиты на основе метода сосредоточенных деформаций решается в следующем порядке, который во многих чертах по форме совпадает с разработанным для плосконапряженных железобетонных элементов и систем:

- устанавливается на основании экспериментальных данных связь между напряжениями и соответствующими деформациями в форме «одноосных» диаграмм с учетом напряженно-деформированного состояния (бетона и арматуры) в условиях изгиба бетонной плиты;
- принимаются определенные законы распределения деформаций в элементе МСД;

- составляются выражения, связывающие перемещения по граням элемента МСД с соответствующими деформациями;
- записываются соотношения между внутренними силами по всем плоскостям сосредоточенных деформаций и соответствующими перемещениями этих граней;
- формируются матрицы  $[Э]_k$  для k-го элемента МСД, элементами которых являются внутренние силы по граням при единичных перемещениях этих граней;
- составляется элементная матрица жесткости  $[K]_k$ , а затем матрица внутренней жесткости  $[K]$  для всей рассчитываемой системы;
- строится матрица равновесия  $[A]_k$  для k-го элемента МСД и всей системы  $[A]$ , а затем матрица внешней жесткости  $[R] = [A] * [K] * [A]^T$ ;
- формируются и решается система уравнений метода перемещений с числом неизвестных  $b * m * n$ , (где  $b$  - число степеней свободы каждого элемента МСД,  $m$  и  $n$  - число элементов МСД в одном и другом направлении рассчитываемой плитной системы);
- из решения системы алгебраических уравнений определяются перемещения элементов МСД (по три линейных и три угловых на каждый элемент), а затем сосредоточенные деформации по границам между элементами МСД;
- по сосредоточенным деформациям на основе диаграмм "напряжения-деформации" для бетона и арматуры находятся обобщенные секущие модули деформаций согласно [338] и по ним формируется матрицы внутренней жесткости  $[K]$  внешней жесткости  $[R]$  и вновь повторяется решение при заданном векторе внешних сил с проверкой сходимости итерационного процесса. Достижение стабилизации можно контролировать результатами смежных итераций всех элементов вектора деформаций или по какому-либо его отдельному составляющему (например, по прогибу). Это условие можно представить в виде

$$(\lambda_{i+1} - \lambda_i) / (\lambda_{i+1} + \lambda_i) \leq |\beta| \quad (5.4.1)$$

где:  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$  - элементы вектора деформаций смежных  $i$ -ой и  $(i+1)$ -ой итерациях;

$\beta$  - некоторое малое число;

- после стабилизации итерационного процесса по условию (5.4.1) окончательно определяются перемещения, взаимные смещения и внутренние усилия для всех элементов МСД, опорные реакции системы и т.д., которые выводятся на печать.

Для упрощения алгебраических выражений рассмотрим отдельно силы и перемещения, отвечающие изгибному напряженному состоянию и плоскому напряженному состоянию. Такое условное деление усилий и перемещений позволяет использовать формально решения, полученные для плоско-напряженных и изгибно-напряженных плит.

Отнесем к плоской задаче 209 следующие внутренние силы по

границы  $(k, k-m)$ , (рис. 5.2.2): продольные силы  $N_{k, k-m}$ , изгибающие моменты в плоскости плиты  $M_{k, k-m}$  и поперечные силы в плоскости плиты  $Q_{k, k-m}$ ; связи метода перемещений для  $k$ -го элемента МСД будем нумеровать, как и в плоской задаче, а именно  $i$  - связь, препятствующая линейному смещению элемента МСД в направлении оси  $Z$ ;  $(i+1)$  - связь, препятствующая повороту элемента МСД вокруг оси  $Y$ ;  $(i+2)$  - связь, препятствующая линейному смещению элемента МСД в направлении оси  $X$ , (рис. 5.2.1).

К изгибному напряженному состоянию относятся следующие внутренние силы по  $(k, k-m)$ -й грани (рис. 5.2.4): изгибающий момент, действующий в плоскости, перпендикулярной плите  $M_{k, k-m}$ ,  $N_{k, k-m}$  - крутящий момент и  $Q_{k, k-m}$  - поперечная сила. Связи метода перемещений для этого состояния:  $f$  - связь, препятствующая повороту  $k$ -го элемента МСД вокруг оси  $X$ ;  $(f+1)$  - то же, вокруг оси  $z$ ;  $(f+2)$  - связь, препятствующая линейному перемещению в направлении оси  $Y$ , (рис. 5.2.3).

Особенности расчета железобетонных плит с учетом нелинейной работы элементов, в отличие от упругой постановки задачи, заключаются в формировании матрицы жесткости, где появляются дополнительные побочные элементы. Эти элементы отражают взаимное влияние продольных сил, изгибающих и крутящих моментов, действующих по плоскостям сосредоточенных деформаций. В то же время следует сказать, что элементы матрицы нелинейны, что объясняется неупругими деформациями бетона и арматуры.

В любой точке плоско и изгибно-напряженного элемента соотношение между нормальными ( $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ ) и касательными ( $\tau_{x,z}$ ,  $\tau_{y,z}$ ,  $\tau_{z,x}$ ,  $\tau_{yx}$ ) напряжениями и соответствующими деформациями можно выразить (рис. 5.4.1)

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= D'_z (\varepsilon_z, \varepsilon_x, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) * \varepsilon_z \\
 \tau_{xz} &= D'_{xz} (\gamma_{xz}, \varepsilon_z, \varepsilon_x, \gamma_{yz}) * \gamma_{xz} \\
 \tau_{yz} &= D'_{yz} (\gamma_{yz}, \varepsilon_z, \varepsilon_x, \gamma_{yz}) * \gamma_{yz} \\
 \sigma_x &= D'_x (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}) * \varepsilon_x \\
 \tau_{zx} &= D'_{zx} (\gamma_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yx}) * \gamma_{zx} \\
 \tau_{yx} &= D'_{yx} (\gamma_{yx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{zx}) * \gamma_{yx}
 \end{aligned}
 \tag{5.4.2}$$

где:  $D'$  - секущие модули "одноосного" деформирования, являющиеся сложными функциями составляющих деформаций, входящих в круглых скобках.

Для арматуры зависимость " $\sigma_s - \varepsilon_s$ " принимается одноосной, без учета объемного напряженно-деформированного состояния

$$\sigma_s = E'_s * \varepsilon_s \quad (5.4.3.)$$

где:  $E'_s$  - секущий модуль деформаций арматуры.

Для вертикальных сечений  $k$ -го элемента на основании формулы, рассмотренной в п. 4.5. установим взаимосвязь между перемещениями и деформациями. Например, для  $k, k-m$  -й грани плиты будем иметь в точке с координатной  $x_{\varepsilon(k,k-m)}$  и  $y_{\varepsilon(k,k-m)}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} - \varphi_{k,k-m} * x_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m} - \beta_{k,k-m} * y_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m} \\ \gamma_{zx} &= u_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \alpha_{k,k-m} * y_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m} \\ \gamma_{yx} &= v_{k,k-m} / a_{k,k-m} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Используя формулы (5.4.4), запишем выражение для нормальных и касательных напряжений по  $k, k-m$  -й грани

$$\begin{aligned} \sigma_{z,\varepsilon(k,k-m)} &= E'_{\varepsilon(k,k-m)} * (\omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} - \varphi_{k,k-m} * x_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m} - \\ &- \beta_{k,k-m} * y_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m}) \\ \tau_{zx,\varepsilon(k,k-m)} &= G'_{\varepsilon(k,k-m)} * (u_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \alpha_{k,k-m} * y_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m}) \\ \tau_{zy,\varepsilon(k,k-m)} &= G'_{\varepsilon(k,k-m)} * (v_{k,k-m} / a_{k,k-m}) \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Здесь  $E'_{\varepsilon(k,k-m)}$  и  $G'_{\varepsilon(k,k-m)}$  - секущие модули деформаций и сдвига бетона;

где:  $E'_\varepsilon = \nu * E_\varepsilon$ ;  $\nu = e^{m \cdot (\varepsilon / \hat{\varepsilon})^{-m-1}}$ ;  $m = \ln(R_\varepsilon / E_\varepsilon \cdot \hat{\varepsilon})$ .

(рис. 5.4.1), являются переменными в пределах длины  $(k,k-m)$ -ой грани и зависят от соотношения и уровня деформаций по (5.4.4).

Таким же образом можно записать соотношения для арматурного стержня на грани  $(k, k-m)$  -й грани

$$\begin{aligned} \sigma_{z,s(k,k-m)} &= E'_{s(k,k-m)} * (\omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} - \varphi_{k,k-m} * x_{\varepsilon(k,k-m)} / a_{k,k-m} - \\ &- \beta_{k,k-m} * y_{s(k,k-m)} / a_{k,k-m}) \\ \tau_{zx,s(k,k-m)} &= G'_{s(k,k-m)} * (u_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \alpha_{k,k-m} * y_{s(k,k-m)} / a_{k,k-m}) \\ \tau_{zy,s(k,k-m)} &= G'_{s(k,k-m)} * (v_{k,k-m} / a_{k,k-m}) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

**Учитывая дискретную схему для  
(к,к-т) - ой грани, запишем выражения  
для равнодействующих для внутренних  
сил по этой грани**

$$\begin{aligned}
 N_{k,k-m} &= (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s) * \omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} - \\
 &- (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * x_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s * x_s) * \varphi_{k,k-m} / a_{k,k-m} - \\
 &- (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * y_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s * y_s) * \beta_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\
 M_{k,k-m} &= -(\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * x_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s * x_s) * \omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \\
 &+ (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * x_{\theta}^2 + \sum_s E'_{z,s} * A_s * x_s^2) * \varphi_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \\
 &+ (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * x_{\theta} * y_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s * x_s * y_s) * \beta_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\
 Q_{k,k-m} &= -(\sum_{\theta} G'_{xz,\theta} * A_{\theta} + \sum_s G'_{xz,s} * A_s) * u_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \\
 &+ (\sum_{\theta} G'_{xz,\theta} * A_{\theta} * y_{\theta} + \sum_s G'_{xz,s} * A_s * y_s) * \alpha_{k,k-m} / a_{k,k-m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{k,k-m} &= -(\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * Y_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s * Y_s) * \omega_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \\
 &+ (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * x_{\theta} * y_{\theta} * Y_{\theta} + \sum_s E'_{z,s} * A_s * x_s * y_s * Y_s) * \varphi_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \\
 &+ (\sum_{\theta} E'_{z,\theta} * A_{\theta} * y_{\theta}^2 + \sum_s E'_{z,s} * A_s * y_s^2) * \beta_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\
 H_{k,k-m} &= -(\sum_{\theta} G'_{xz,\theta} * A_{\theta} * y_{\theta} + \sum_s G'_{xz,s} * A_s * y_s) * u_{k,k-m} / a_{k,k-m} + \\
 &+ (\sum_{\theta} G'_{xz,\theta} * A_{\theta} * y_{\theta}^2 + \sum_s G'_{xz,s} * A_s * y_s^2) * \alpha_{k,k-m} / a_{k,k-m} \\
 Q_{k,k-m} &= -(\sum_{\theta} G'_{yz,\theta} * A_{\theta} + \sum_s G'_{yz,s} * A_s) * v_{k,k-m} / a_{k,k-m}
 \end{aligned}
 \tag{5.4.7}$$

**или**

$$\begin{aligned}
 N_{k,k-m} &= \eta_{k,k-m} * \omega_{k,k-m} - \lambda_{k,k-m} * \varphi_{k,k-m} - \lambda_{k,k-m} * \beta_{k,k-m} \\
 M_{k,k-m} &= -\lambda_{k,k-m} * \omega_{k,k-m} + \omega_{k,k-m} * \varphi_{k,k-m} - \varepsilon_{k,k-m} * \beta_{k,k-m} \\
 Q_{k,k-m} &= \xi_{k,k-m} * u_{k,k-m} + v_{k,k-m} * \alpha_{k,k-m} \\
 M_{k,k-m} &= -\lambda_{k,k-m} * \omega_{k,k-m} + \varepsilon_{k,k-m} * \varphi_{k,k-m} + \omega_{k,k-m} * \beta_{k,k-m} \\
 H_{k,k-m} &= v_{k,k-m} * u_{k,k-m} + \psi_{k,k-m} * \alpha_{k,k-m} \\
 Q_{k,k-m} &= \xi_{k,k-m} * u_{k,k-m}
 \end{aligned}
 \tag{5.4.8}$$



В формулах (5.4.8) сомножители перед перемещениями являются элементами матрицы жесткости сечения "к,к-т"

212  $[\mathcal{E}]_{k,k-m}$ . Составляющие этих матриц представляют собой усилие на грани "к,к-т" при единичном ее перемещении при принятых законах перемещений. Соотношение (5.4.8) можно представить в матричном виде, используя уравнения равновесия для нормального сечения

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ Q_x \\ M_x \\ H_z \\ Q_y \end{Bmatrix}_{k,k-m} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{1,1} & \mathcal{E}_{1,2} & & \mathcal{E}_{1,4} & & \\ \mathcal{E}_{2,1} & \mathcal{E}_{2,2} & & \mathcal{E}_{2,4} & & \\ & & \mathcal{E}_{3,3} & & \mathcal{E}_{3,5} & \\ \mathcal{E}_{4,1} & \mathcal{E}_{4,2} & & \mathcal{E}_{4,4} & & \\ & & \mathcal{E}_{5,5} & & \mathcal{E}_{5,5} & \\ & & & & & \mathcal{E}_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ k_y \\ \gamma_x \\ K_x \\ \rho_z \\ \gamma_y \end{Bmatrix}_{k,k-m} \quad (5.4.9)$$

или  $\{F\}_{k,k-m} = [\mathcal{E}]_{k,k-m} * \{\lambda\}_{k,k-m}$

где:  $\{F\}_{k,k-m}$  - вектор внутренних усилий в сечении (к, к-т);

$[\mathcal{E}]_{k,k-m}$  - матрица жесткости этого же сечения;

$\{\lambda\}_{k,k-m}$  - вектор соответствующих деформаций;

$(N_z, M_y, Q_x, M_x, H_z, Q_y)_{k,k-m}$  - внутренние усилия, действующие в (к, к-т) – м сечении;

$\mathcal{E}_{1,1}$  - осевая жесткость нормального сечения (к, к-т), зависящая от его геометрических параметров и уровня напряженно-деформированного состояния;

$\mathcal{E}_{1,2} = \mathcal{E}_{2,1}$  - изгибно-осевая жесткость, выражающая взаимное влияние изгибающего момента  $M_y$  и нормальной силы  $N_z$  и зависящая от геометрических параметров сечения, уровня напряженно-деформированного состояния и выбора положения и направления координатных осей;

$\mathcal{E}_{2,2}$  - изгибная жесткость (в направлении оси у), зависящая от геометрических характеристик сечения, уровня напряженно-деформированного состояния и выбора координатных осей;

$\mathcal{E}_{3,3}$  -сдвиговая жесткость сечения ( $k, k-m$ ), также зависящая от геометрических параметров сечения и уровня напряженно-деформированного состояния;

$\mathcal{E}_{1,4} = \mathcal{E}_{4,1}$  -изгибно-осевая жесткость, аналогичная вышеприведенной;

$\mathcal{E}_{3,5} = \mathcal{E}_{5,3}$  -крутильно-сдвиговая жесткость, выражающая взаимное влияние крутящего момента  $H_z$  и поперечной силы  $Q_x$  и

213

зависящая от геометрических параметров сечения, уровня напряженно-деформированного состояния;

$\mathcal{E}_{4,4}$  - изгибная жесткость (в направлении X), аналогичная вышеприведенной;

$\mathcal{E}_{5,5}$  - крутильная жесткость, зависящая от геометрических характеристик сечения, уровня напряженно-деформированного состояния;

$\mathcal{E}_{6,6}$  - сдвиговая жесткость, аналогичная вышеприведенной;

$\varepsilon_z$  - продольная деформация оси Z;

$K_x - K_y$  - кривизна этой же оси;

$\gamma_x - \gamma_y$  - усредненный сдвиг по сечению плиты;

$\rho_z$  - кривизна оси Z.

Аналогичные выражения для усилий можно записать и для других граней (табл. 5.4.1).

Таким образом, для сечений железобетонной плиты установлена взаимосвязь между внутренними силами и соответствующими деформациями, которая в общем виде запишется для  $k$ -го элемента

$$\{F\} = [\mathcal{E}] * \{\lambda\} \quad (5.4.10)$$

На основании вышеизложенного взаимосвязь между внутренними силами и перемещениями граней элементов МСД можно записать в виде

$$\{F\} = [K] * \{\lambda\} * \{L\} \quad (5.4.11)$$

где:  $[K]$ - элементная матрица жесткости;

$\{L\}$ - вектор расстояний от точек закреплений элементов связями метода перемещений до соответствующих граней.

После преобразования формулы (5.4.11.) окончательно имеем

$$\{F\} = [K] * \{v\} \quad (5.4.12)$$

Зная элементную матрицу жесткости  $[K]$ , можно построить матрицу внутренней жесткости комплексных связей  $[K]_k$ , элементы которой означают внутренние силы по плоскостям сосредоточенных деформаций при единичном смещении соседних элементов в направлении связей МСД.

Например, блочная матрица внутренней жесткости по плоскости сосредоточенных деформаций, разделяющей  $k$ -й и  $(k-m)$ -й элементы МСД,  $[K]_{k,k-m}$  имеет вид

$$[K]_{k,k-m} = \left[ [\mathcal{E}]_{k,k-m}^{-1} + [\mathcal{E}]_{k-m,k}^{-1} \right]^{-1} \quad (5.4.13)$$

Структура блок-матрицы  $214$  внутренней жесткости  $k$ -го элемента МСД в табл. 5.4.2 ÷ 5.4.5. В этих таблицах сверху указаны те связи метода перемещений, (в  $k$ -м элементе МСД и его окружающих), при взаимном единичном смещении которых развиваются усилия по граням смежных элементов, численно равные тем внутренним силам которые указаны в первом столбце слева; например, в табл. 5.4.2 элемент  $\mathcal{E}_{1,1}$  - нормальная сила  $N_{k,k-m}$  от взаимного единичного смещения  $(i-3m)$ -й и  $i$ -й связей из группы плоско-напряженного состояния; элемент  $\mathcal{E}_{3,5}$  - поперечная сила  $Q_{k,k-m}$ , возникающая при взаимном единичном смещении  $(f-3m+1)$ -й и  $(f+1)$ -й связей.

Локальная матрица равновесия  $[A]_k$  для типового  $k$ -го элемента состоит из коэффициентов при внутренних силах, которые действуют непосредственно на него. Для  $k$ -го элемента МСД такая матрица представлена в табл. 5.4.6. Как видно из рис. 5.4.1, эти силы позволяют записать шесть уравнения равновесия при общем количестве неизвестных равных двадцати четырех, что свидетельствует о недостаточности уравнений статики для раскрытия внутренних сил, т.е. внутренней статической неопределимости.

С этой целью выполним перемножение матриц  $[A]_k$ ,  $[K]_k$  и  $[A]_k^T$  и получим матрицу  $[R]_k$ ; ее элементы приведены в табл. 5.4.7 ÷ 5.4.13.

Далее рассмотрим порядок выполнения расчета сборных плит перекрытий в целом, с учетом особенности формирования нелинейной матрицы внутренней жесткости по плоскостям сосредоточенных деформаций.

Во-первых, составляется расчетная модель исходной конструктивной схемы; назначаются плоскости сосредоточенных деформаций; устанавливаются граничные условия; составляется схема нагрузок; определяются параметры системы уравнений метода перемещений.

Задаются геометрические и физические характеристики элементов МСД, т.е. классы бетона и арматуры, их размеры сечения, диаграммы деформирования для бетона и арматуры " $\sigma - \varepsilon$ " по [338].

В зависимости от формы поперечных сечений элементов МСД, и особенностей армирования принимается схема дискретизации по вертикальным и горизонтальным плоскостям сосредоточенных деформаций. При этом необходимо иметь виду, что в местах нахождения арматуры ширина бетонных полос принимается равной диаметру стержней, а соответствующая площадь исключается из бетонного сечения (рис. 5.4.1).

Во-вторых, в решении задачи является формирование коэффициентов уравнений равновесия  $[A]$ ; вектора узловых нагрузок  $[P]$ , матриц внутренней жесткости  $[K]_k$  элементов МСД и матриц внутренней  $[K]$  и внешней жесткости  $[R]$  всей системы для незагруженного состояния. Далее, формируется и решается система 215 линейных алгебраических уравнений метода перемещений типа

$$[v] = \{P\} * [R]^{-1} \quad (5.4.14)$$

Количество неизвестных в этом уравнении  $6 * m * n$ , где 6 - число степеней свободы каждого элемента МСД,  $m$  и  $n$  - число элементов МСД в одном и другом направлении рассчитываемой плитной системы.

В-третьих, по полученным перемещениям  $[v]$  элементов МСД определяются соответствующие деформации по всем плоскостям сосредоточенных деформаций. На основе зависимостей " $\sigma - \varepsilon$ " по вычисленным деформациям в бетоне  $\varepsilon_b$  и арматуре  $\varepsilon_s$  определяются соответствующие коэффициенты упругих деформации  $V_b$  и  $V_s$  во всех элементарных площадках  $A_b$  и  $A_s$  согласно [338]. По вновь определенным секущим модулям деформаций бетона  $E'_b$  и арматуры  $E'_s$  строится новая матрица внутренней жесткости  $[K]$  и внешней жесткости  $[R]$  системы. Решение повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто условие (5.4.1). Результат схождения итерационного процесса показывает на достигнутое равновесное состояние конструкции при данных внешних силах. Невыполнение условия (5.4.1), свидетельствует о недостаточной несущей способности системы и превращение ее в механизм, не способный удерживать в равновесии заданную нагрузку.

**Таким образом, проверка несущей способности железобетонной плиты перекрытия при заданных (известных) нагрузках и принятых размерах сечений и классах бетона и арматуры заканчивается.**

Наряду с этим может быть решена задача поиска вектора сил  $[R]$ , который воспринимается сечением перед наступлением предельного состояния. Для решения этой задачи должны быть известными и заданы: геометрические параметры нормального сечения и физико-механические характеристики материалов (бетон и арматуры) соответствующими " $\sigma - \varepsilon$ ".

По результатам предложенного алгоритма возможна оценка предельных состояний второй группы, т.е. предельные перемещения и трещиностойкость. Составляющие вектора перемещений  $[\nu]$ , полученные при соответствующих полных и длительных нагрузках, непосредственно могут сопоставляться с их нормируемыми значениями.

В изложенном методе расчета не является обязательным вычисление внутренних сил, либо несущая способность и предельные деформации оцениваются по перемещениям, являющимися функциями диаграмм бетона и арматуры. Однако, при желании, внутренние силы можно получить как попутный результат, не прибегая при этом к какой-либо перестройке расчетного алгоритма.

Таблица 5.4.1.

Матрица жесткости  $[\mathcal{E}]_k$  для железобетонной плиты

Элементы МСД	Внутренние силы	№	$k - m$						$k - 1$					
			$\omega_{k,k-m}$	$\varphi_{k,k-m}$	$u_{k,k-m}$	$\beta_{k,k-m}$	$\alpha_{k,k-m}$	$v_{k,k-m}$	$\omega_{k,k-1}$	$\varphi_{k,k-1}$	$u_{k,k-1}$	$\beta_{k,k-1}$	$\alpha_{k,k-1}$	$u_{k,k-1}$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k - m$	$N_{k,k-m}$	1	$\eta_{k,k-m}$	$\lambda_{k,k-m}$		$\lambda_{k,k-m}$								
	$M_{k,k-m}$	2	$\lambda_{k,k-m}$	$\omega_{k,k-m}$		$\varepsilon_{k,k-m}$								
	$Q_{k,k-m}$	3			$\xi_{k,k-m}$		$v_{k,k-m}$							
	$M_{k,k-m}$	4	$\lambda_{k,k-m}$	$\varepsilon_{k,k-m}$		$\omega_{k,k-m}$								
	$H_{k,k-m}$	5			$v_{k,k-m}$		$\psi_{k,k-m}$							
	$Q_{k,k-m}$	6						$\xi_{k,k-m}$						
$k - 1$	$N_{k,k-1}$	7						$\eta_{k,k-1}$	$\lambda_{k,k-1}$		$\lambda_{k,k-1}$			
	$M_{k,k-1}$	8						$\lambda_{k,k-1}$	$\omega_{k,k-1}$		$\varepsilon_{k,k-1}$			
	$Q_{k,k-1}$	9								$\xi_{k,k-1}$		$v_{k,k-1}$		
	$M_{k,k-1}$	10						$\lambda_{k,k-1}$	$\varepsilon_{k,k-1}$		$\omega_{k,k-1}$			
	$H_{k,k-1}$	11								$v_{k,k-1}$		$\psi_{k,k-1}$		
	$Q_{k,k-1}$	12												$\xi_{k,k-1}$

**Матрица жесткости  $[\mathcal{E}]_k$  для железобетонной плиты**

1	2	Элементы МСД	Внутренние силы	№	$k + 1$						$k + m$					
					$\omega_{k,k-m}$	$\varphi_{k,k-m}$	$u_{k,k-m}$	$\beta_{k,k-m}$	$\alpha_{k,k-m}$	$\nu_{k,k-m}$	$\omega_{k,k-1}$	$\varphi_{k,k-1}$	$u_{k,k-1}$	$\beta_{k,k-1}$	$\alpha_{k,k-1}$	$u_{k,k-1}$
					13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$k + 1$	$N_{k,k-m}$	13	$\eta_{k,k-m}$	$\lambda_{k,k-m}$		$\lambda_{k,k-m}$										
	$M_{k,k-m}$	14	$\lambda_{k,k-m}$	$\omega_{k,k-m}$		$\varepsilon_{k,k-m}$										
	$Q_{k,k-m}$	15			$\xi_{k,k-m}$		$\nu_{k,k-m}$									
	$M_{k,k-m}$	16	$\lambda_{k,k-m}$	$\varepsilon_{k,k-m}$		$\omega_{k,k-m}$										
	$H_{k,k-m}$	17			$\nu_{k,k-m}$		$\psi_{k,k-m}$									
	$Q_{k,k-m}$	18						$\xi_{k,k-m}$								
$k + m$	$N_{k,k-1}$	19							$\eta_{k,k-1}$	$\lambda_{k,k-1}$		$\lambda_{k,k-1}$				
	$M_{k,k-1}$	20							$\lambda_{k,k-1}$	$\omega_{k,k-1}$		$\varepsilon_{k,k-1}$				
	$Q_{k,k-1}$	21									$\xi_{k,k-1}$		$\nu_{k,k-1}$			
	$M_{k,k-1}$	22							$\lambda_{k,k-1}$	$\varepsilon_{k,k-1}$		$\omega_{k,k-1}$				
	$H_{k,k-1}$	23									$\nu_{k,k-1}$		$\psi_{k,k-1}$			

	$Q_{k,k-1}$	24													$\xi_{k,k-1}$
--	-------------	----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---------------



Таблица 5.4.2

Элементы матрицы  $[K]_k$

Элементы матрицы	Внутренние силы	№	$k-m$					
			$i-3m$		$i-3m+2$	$f-3m$	$f-3m+1$	$f-3m+2$
			$i$	$i+1$	$i+2$	$f$	$f+1$	$f+2$
			1	2	3	4	5	6
$[K]_{k,k-m}$	$N_{k,k-m}$	1	$\mathfrak{A}_{1,1}$	$\mathfrak{A}_{1,2}$		$\mathfrak{A}_{1,4}$		
	$M_{k,k-m}$	2	$\mathfrak{A}_{2,1}$	$\mathfrak{A}_{2,2}$		$\mathfrak{A}_{2,4}$		
	$Q_{k,k-m}$	3			$\mathfrak{A}_{3,3}$		$\mathfrak{A}_{3,5}$	
	$M_{k,k-m}$	4	$\mathfrak{A}_{4,1}$	$\mathfrak{A}_{4,2}$		$\mathfrak{A}_{4,4}$		
	$H_{k,k-m}$	5			$\mathfrak{A}_{5,3}$		$\mathfrak{A}_{5,5}$	
	$Q_{k,k-m}$	6						$\mathfrak{A}_{6,6}$

$$= \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k-m,k} & \lambda_{k-m,k} & & \lambda_{k-m,k} & & \\ \lambda_{k-m,k} & \omega_{k-m,k} & & \varepsilon_{k-m,k} & & \\ & & \xi_{k-m,k} & & \nu_{k-m,k} & \\ \lambda_{k-m,k} & \varepsilon_{k-m,k} & & \omega_{k-m,k} & & \\ & & \nu_{k-m,k} & & \psi_{k-m,k} & \\ & & & & & \xi_{k-m,k} \end{array} \right]^{-1} \\ + \end{array} \right.$$

$$+ \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k,k-m} & \lambda_{k,k-m} & & \lambda_{k,k-m} & & \\ \lambda_{k,k-m} & \omega_{k,k-m} & & \varepsilon_{k,k-m} & & \\ & & \xi_{k,k-m} & & \nu_{k,k-m} & \\ \lambda_{k,k-m} & \varepsilon_{k,k-m} & & \omega_{k,k-m} & & \\ & & \nu_{k,k-m} & & \psi_{k,k-m} & \\ & & & & & \xi_{k,k-m} \end{array} \right]^{-1} \\ \end{array} \right.$$

Таблица 5.4.3  
Элементы матрицы  $[K]_k$

Элементы матрицы	Внутренние силы	№	$k-1$					
			$i-1$	$i-2$	$i-3$	$f-2$	$f-3$	$f-1$
			$i+2$	$i+1$	$i$	$f+1$	$f$	$f+2$
			7	8	9	10	11	12
$[K]_{k,k-1}$	$N_{k,k-1}$	7	$\mathcal{E}_{7,7}$	$\mathcal{E}_{7,8}$		$\mathcal{E}_{7,10}$		
	$M_{k,k-1}$	8	$\mathcal{E}_{8,7}$	$\mathcal{E}_{8,8}$		$\mathcal{E}_{8,10}$		
	$Q_{k,k-1}$	9			$\mathcal{E}_{9,9}$		$\mathcal{E}_{9,11}$	
	$M_{k,k-1}$	10	$\mathcal{E}_{10,7}$	$\mathcal{E}_{10,8}$		$\mathcal{E}_{10,10}$		
	$H_{k,k-1}$	11			$\mathcal{E}_{11,9}$		$\mathcal{E}_{11,11}$	
	$Q_{k,k-1}$	12						$\mathcal{E}_{12,12}$

$$= \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k-1,k} & \lambda_{k-1,k} & & \lambda_{k-1,k} & & \\ \lambda_{k-1,k} & \omega_{k-1,k} & & \varepsilon_{k-1,k} & & \\ & & \xi_{k-1,k} & & \nu_{k-1,k} & \\ \lambda_{k-1,k} & \varepsilon_{k-1,k} & & \omega_{k-1,k} & & \\ & & \nu_{k-1,k} & & \psi_{k-1,k} & \\ & & & & & \xi_{k-1,k} \end{array} \right]^{-1} +$$

$$+ \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k,k-1} & \lambda_{k,k-1} & & \lambda_{k,k-1} & & \\ \lambda_{k,k-1} & \omega_{k,k-1} & & \varepsilon_{k,k-1} & & \\ & & \xi_{k,k-1} & & \nu_{k,k-1} & \\ \lambda_{k,k-1} & \varepsilon_{k,k-1} & & \omega_{k,k-1} & & \\ & & \nu_{k,k-1} & & \psi_{k,k-1} & \\ & & & & & \xi_{k,k-1} \end{array} \right]^{-1}$$

Таблица 5.4.4

Элементы матрицы  $[K]_k$

Элементы матрицы	Внутренние силы	№	$k+1$					
			$i+5$	$i+4$	$i+3$	$f+4$	$f+3$	$f+5$
			$i+2$	$i+1$	$i$	$f+1$	$f$	$f+2$
			13	14	15	16	17	18
$[K]_{k,k+1}$	$N_{k,k+1}$	13	$\mathcal{E}_{13,13}$	$\mathcal{E}_{13,14}$		$\mathcal{E}_{13,16}$		
	$M_{k,k+1}$	14	$\mathcal{E}_{14,14}$	$\mathcal{E}_{14,14}$		$\mathcal{E}_{14,16}$		
	$Q_{k,k+1}$	15			$\mathcal{E}_{15,15}$		$\mathcal{E}_{15,17}$	
	$M_{k,k+1}$	16	$\mathcal{E}_{16,16}$	$\mathcal{E}_{16,14}$		$\mathcal{E}_{10,10}$		
	$H_{k,k+1}$	17			$\mathcal{E}_{17,15}$		$\mathcal{E}_{17,17}$	
	$Q_{k,k+1}$	18						$\mathcal{E}_{18,18}$

$$= \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k+1,k} & \lambda_{k+1,k} & & \lambda_{k+1,k} & & \\ \lambda_{k+1,k} & \omega_{k+1,k} & & \varepsilon_{k+1,k} & & \\ & & \xi_{k-1,k} & & \nu_{k+1,k} & \\ \lambda_{k+1,k} & \varepsilon_{k+1,k} & & \omega_{k+1,k} & & \\ & & \nu_{k+1,k} & & \psi_{k+1,k} & \\ & & & & & \xi_{k+1,k} \end{array} \right]^{-1} \\ + \\ \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k,k+1} & \lambda_{k,k+1} & & \lambda_{k,k+1} & & \\ \lambda_{k,k-1} & \omega_{k,k-1} & & \varepsilon_{k,k+1} & & \\ & & \xi_{k,k+1} & & \nu_{k,k+1} & \\ \lambda_{k,k+1} & \varepsilon_{k,k+1} & & \omega_{k,k+1} & & \\ & & \nu_{k,k+1} & & \psi_{k,k+1} & \\ & & & & & \xi_{k,k+1} \end{array} \right]^{-1} \end{array} \right]^{-1}$$

Таблица 5.4.5

Элементы матрицы  $[K]_k$

Элементы матрицы	Внутренние силы	№	$k+m$					
			$i+3m$	$i+3m+1$	$i+3m+2$	$f+3m$	$f+3m+1$	$f+3m+2$
			$i$	$i+1$	$i+2$	$f$	$f+1$	$f+2$
			19	20	21	22	23	24
$[K]_{k,k+m}$	$N_{k,k+m}$	19	$\mathfrak{A}_{19,19}$	$\mathfrak{A}_{19,20}$		$\mathfrak{A}_{19,22}$		
	$M_{k,k+m}$	20	$\mathfrak{A}_{20,19}$	$\mathfrak{A}_{20,20}$		$\mathfrak{A}_{20,22}$		
	$Q_{k,k+m}$	21			$\mathfrak{A}_{21,21}$		$\mathfrak{A}_{21,23}$	
	$M_{k,k+m}$	22	$\mathfrak{A}_{22,19}$	$\mathfrak{A}_{22,20}$		$\mathfrak{A}_{22,22}$		
	$H_{k,k+m}$	23			$\mathfrak{A}_{23,21}$		$\mathfrak{A}_{23,23}$	
	$Q_{k,k+m}$	24						$\mathfrak{A}_{24,24}$

$$= \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k+m,k} & \lambda_{k+m,k} & & \lambda_{k+m,k} & & \\ \lambda_{k+m,k} & \omega_{k+m,k} & & \varepsilon_{k+m,k} & & \\ & & \xi_{k+m,k} & & \nu_{k+m,k} & \\ \lambda_{k+m,k} & \varepsilon_{k+m,k} & & \omega_{k+m,k} & & \\ & & \nu_{k+m,k} & & \psi_{k+m,k} & \\ & & & & & \xi_{k+m,k} \end{array} \right]^{-1} +$$

$$+ \left[ \begin{array}{cccccc} \eta_{k,k+m} & \lambda_{k,k+m} & & \lambda_{k,k+m} & & \\ \lambda_{k,k+m} & \omega_{k,k+m} & & \varepsilon_{k,k+m} & & \\ & & \xi_{k,k+m} & & \nu_{k,k+m} & \\ \lambda_{k,k+m} & \varepsilon_{k,k+m} & & \omega_{k,k+m} & & \\ & & \nu_{k,k+m} & & \psi_{k,k+m} & \\ & & & & & \xi_{k,k+m} \end{array} \right]^{-1} -1$$

Таблица 5.4.6

Матрица равновесия  $[A]_k$

Элементы	Уравнения	Связи метода	№	$k - m$						$k - 1$							
				$N_{k,k-m}$	$M_{k,k-m}$	$Q_{k,k-m}$	$M_{k,k-m}$	$H_{k,k-m}$	$Q_{k,k-m}$	$N_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$	$M_{k,k-1}$	$H_{k,k-1}$	$Q_{k,k-1}$		
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
$k - m$	$\Sigma Z$	$i - 3m$	1.	1													
	$\Sigma M_y$	$i - 3m + 1$	2.		1	$-a_{k-m,k}$											
	$\Sigma X$	$i - 3m + 2$	3.			-1											
	$\Sigma M_x$	$f - 3m$	4.	HOS2			1		$-a_{k-m,k}$								
	$\Sigma M_z$	$f - 3m + 1$	5.					1									
	$\Sigma Y$	$f - 3m + 2$	6.						-1								
$k - 1$	$\Sigma Z$	$i - 3$	7.								-1						
	$\Sigma M_y$	$i - 2$	8.							-1	$\theta_{k-1,k}$						
	$\Sigma X$	$i - 1$	9.							1							
	$\Sigma M_x$	$f - 3$	10.										1				
	$\Sigma M_z$	$f - 2$	11.							HOS1			1			$\theta_{k-1,k}$	
	$\Sigma Y$	$f - 1$	12.													1	
$k$	$\Sigma Z$	$i$	13.	-1							1						
	$\Sigma M_y$	$i + 1$	14.		-1	$-a_{k,k-m}$					1	$\theta_{k,k-1}$					
	$\Sigma X$	$i + 2$	15.			1				-1							
	$\Sigma M_x$	$f$	16.	-HOS2			-1		$-a_{k,k-m}$						-1		
	$\Sigma M_z$	$f + 1$	17.					-1		-HOS1			-1			$\theta_{k,k-1}$	
	$\Sigma Y$	$f + 2$	18.						1							-1	
$k + 1$	$\Sigma Z$	$i + 3$	19.														
	$\Sigma M_y$	$i + 4$	20.														
	$\Sigma X$	$i + 5$	21.														
	$\Sigma M_x$	$f + 3$	22.														
	$\Sigma M_z$	$f + 4$	23.														
	$\Sigma Y$	$f + 5$	24.														
$k + m$	$\Sigma Z$	$i - 3m$	25.														
	$\Sigma M_y$	$i - 3m + 1$	26.														
	$\Sigma X$	$i - 3m + 2$	27.														
	$\Sigma M_x$	$f - 3m$	28.														
	$\Sigma M_z$	$f - 3m + 1$	29.														
	$\Sigma Y$	$f - 3m + 2$	30.														

1

2

Таблица 5.4.6 (продолжение)

Матрица равновесия  $[A]_k$

1	Элементы	Уравнения равновесия	Связи метода перемещений	№	$k + 1$						$k + m$													
					$N_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}$	$Q_{k,k+1}$	$M_{k,k+1}$	$H_{k,k+1}$	$Q_{k,k+1}$	$N_{k,k+m}$	$M_{k,k+m}$	$Q_{k,k+m}$	$M_{k,k+m}$	$H_{k,k+m}$	$Q_{k,k+m}$								
					13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24								
$k - m$	$\Sigma Z$	$i - 3m$	1.																					
	$\Sigma M_y$	$i - 3m + 1$	2.																					
	$\Sigma X$	$i - 3m + 2$	3.																					
	$\Sigma M_x$	$f - 3m$	4.																					
	$\Sigma M_z$	$f - 3m + 1$	5.																					
	$\Sigma Y$	$f - 3m + 2$	6.																					
$k - 1$	$\Sigma Z$	$i - 3$	7.																					
	$\Sigma M_y$	$i - 2$	8.																					
	$\Sigma X$	$i - 1$	9.																					
	$\Sigma M_x$	$f - 3$	10.																					
	$\Sigma M_z$	$f - 2$	11.																					
	$\Sigma Y$	$f - 1$	12.																					
$k$	$\Sigma Z$	$i$	13.			-1					1													
	$\Sigma M_y$	$i + 1$	14.		-1	$\theta_{k,k+1}$						1		$-a_{k,k+m}$										
	$\Sigma X$	$i + 2$	15.	1										-1										
	$\Sigma M_x$	$f$	16.						1		HOS4				1									$-a_{k,k+m}$
	$\Sigma M_z$	$f + 1$	17.	HOS 3				1		$\theta_{k,k+1}$											1			
	$\Sigma Y$	$f + 2$	18.							1														-1
$k + 1$	$\Sigma Z$	$i + 3$	19.			1																		
	$\Sigma M_y$	$i + 4$	20.		1	$\theta_{k+1,k}$																		
	$\Sigma X$	$i + 5$	21.	-1																				
	$\Sigma M_x$	$f + 3$	22.						-1															
	$\Sigma M_z$	$f + 4$	23.	- HOS 3				-1		$\theta_{k+1,k}$														
	$\Sigma Y$	$f + 5$	24.							-1														
$k + m$	$\Sigma Z$	$i + 3m$	25.								-1													
	$\Sigma M_y$	$i + 3m + 1$	26.									-1		$-a_{k+m,k}$										
	$\Sigma X$	$i + 3m + 2$	27.											1										
	$\Sigma M_x$	$f + 3m$	28.								-HOS4				-1									$-a_{k+m,k}$
	$\Sigma M_z$	$f + 3m + 1$	29.																		-1			
	$\Sigma Y$	$f + 3m + 2$	30.																					1

Таблица 5.4.7.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл. МСД	№	СВЯЗИ	$R_{i,j}; \quad j = i - 3m, \dots, f + 3m + 2$
$k - m$	1	$i - 3m$	$-\mathcal{E}_{1,1}$
	2	$i - 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{2,1}$
	3	$i - 3m + 2$	0
	4	$f - 3m$	$-\mathcal{E}_{4,1} - HOS2 * \mathcal{E}_{1,1}$
	5	$f - 3m + 1$	0
	6	$f - 3m + 2$	0
$k - 1$	7	$i - 3$	$-\mathcal{E}_{9,9}$
	8	$i - 2$	$\epsilon_{k-1,l} * \mathcal{E}_{9,9}$
	9	$i - 1$	0
	10	$f - 3$	$\mathcal{E}_{11,9}$
	11	$f - 2$	0
	12	$f - 1$	0
$k$	13	$i$	$\mathcal{E}_{1,1} + \mathcal{E}_{9,9} + \mathcal{E}_{15,15} + \mathcal{E}_{19,19}$
	14	$i + 1$	$\mathcal{E}_{2,1} + \epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{9,9} - \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,15} + \mathcal{E}_{20,19}$
	15	$i + 2$	0
	16	$f$	$\mathcal{E}_{4,1} - \mathcal{E}_{11,9} - \mathcal{E}_{17,15} + \mathcal{E}_{22,19} + HOS2 * \mathcal{E}_{1,1} + HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	17	$f + 1$	0
	18	$f + 2$	0
$k + 1$	19	$i + 3$	$-\mathcal{E}_{15,15}$
	20	$i + 4$	$-\epsilon_{k+1,k} * \mathcal{E}_{15,15}$
	21	$i + 5$	0
	22	$f + 3$	$\mathcal{E}_{17,15}$
	23	$f + 4$	0
	24	$f + 5$	0
$k + m$	25	$i + 3m$	$-\mathcal{E}_{19,19}$
	26	$i + 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{20,19}$
	27	$i + 3m + 2$	0
	28	$f + 3m$	$-\mathcal{E}_{22,19} - HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	29	$f + 3m + 1$	0
	30	$f + 3m + 2$	0

Таблица 5.4.8.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл. МСД	№	СВЯЗИ	$R_{i+1,j}; j = i - 3m, \dots, f + 3m + 2$
$k - m$	1	$i - 3m$	$-\mathcal{E}_{1,2}$
	2	$i - 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{2,2} + a_{k-m,k} * a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,3}$
	3	$i - 3m + 2$	$a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,3}$
	4	$f - 3m$	$-\mathcal{E}_{4,2} - HOS2 * \mathcal{E}_{1,2}$
	5	$f - 3m + 1$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{5,3}$
	6	$f - 3m + 2$	0
$k - 1$	7	$i - 3$	$-\epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{9,9}$
	8	$i - 2$	$-\mathcal{E}_{8,8} + \epsilon_{k-1,k} * \epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{9,9}$
	9	$i - 1$	$\mathcal{E}_{7,8}$
	10	$f - 3$	$\epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{11,9}$
	11	$f - 2$	$\mathcal{E}_{10,8} + HOS1 * \mathcal{E}_{7,8}$
	12	$f - 1$	0
$k$	13	$i$	$\mathcal{E}_{1,2} + \epsilon_{k,k-m} * \mathcal{E}_{9,9} - \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,15} + \mathcal{E}_{19,20}$
	14	$i + 1$	$\mathcal{E}_{2,2} + a_{k,k-m}^2 * \mathcal{E}_{3,3} + \mathcal{E}_{8,8} + \epsilon_{k,k-1}^2 * \mathcal{E}_{9,9} + \mathcal{E}_{14,14} + \epsilon_{k,k+1}^2 * \mathcal{E}_{15,15} +$ $+ \mathcal{E}_{20,20} + a_{k,k+m}^2 * \mathcal{E}_{21,21}$
	15	$i + 2$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,3} - \mathcal{E}_{7,8} - \mathcal{E}_{13,14} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,21}$
	16	$f$	$\mathcal{E}_{4,2} - \epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{11,9} + \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{17,15} + \mathcal{E}_{22,20} + HOS2 * \mathcal{E}_{1,2} + HOS4 * \mathcal{E}_{19,20}$
	17	$f + 1$	$a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{5,3} - \mathcal{E}_{10,8} - \mathcal{E}_{16,14} - a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{23,21} - HOS1 * \mathcal{E}_{7,8} - HOS3 * \mathcal{E}_{13,14}$
	18	$f + 2$	0
$k + 1$	19	$i + 3$	$\epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,15}$
	20	$i + 4$	$-\mathcal{E}_{14,14} + \epsilon_{k+1,k} * \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,15}$
	21	$i + 5$	$\mathcal{E}_{13,14}$
	22	$f + 3$	$-\epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{17,15}$
	23	$f + 4$	$\mathcal{E}_{16,14} + HOS3 * \mathcal{E}_{13,14}$
	24	$f + 5$	0
$k + m$	25	$i + 3m$	$-\mathcal{E}_{19,20}$
	26	$i + 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{20,20} + a_{k,k+m} * a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{21,21}$
	27	$i + 3m + 2$	$-a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,21}$
	28	$f + 3m$	$-\mathcal{E}_{22,20} - HOS4 * \mathcal{E}_{19,20}$
	29	$f + 3m + 1$	$a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{23,21}$
	30	$f + 3m + 2$	0



Таблица 5.4.9.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл. МСД	№	СВЯЗИ	$R_{i+2,j}; \quad j = i - 3m, \dots, f + 3m + 2$
$k - m$	1	$i - 3m$	0
	2	$i - 3m + 1$	$-a_{k-m,k} * \mathcal{E}_{3,3}$
	3	$i - 3m + 2$	$-\mathcal{E}_{3,3}$
	4	$f - 3m$	0
	5	$f - 3m + 1$	$\mathcal{E}_{5,3}$
	6	$f - 3m + 2$	0
$k - 1$	7	$i - 3$	0
	8	$i - 2$	$\mathcal{E}_{8,7}$
	9	$i - 1$	$-\mathcal{E}_{7,7}$
	10	$f - 3$	0
	11	$f - 2$	$-\mathcal{E}_{10,7} - HOS1 * \mathcal{E}_{7,7}$
	12	$f - 1$	0
$k$	13	$i$	0
	14	$i + 1$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,3} - \mathcal{E}_{8,7} - \mathcal{E}_{14,13} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,21}$
	15	$i + 2$	$\mathcal{E}_{3,3} + \mathcal{E}_{7,7} + \mathcal{E}_{13,13} + \mathcal{E}_{21,21}$
	16	$f$	0
	17	$f + 1$	$-\mathcal{E}_{5,3} + \mathcal{E}_{10,7} + \mathcal{E}_{16,13} - \mathcal{E}_{23,21} + HOS1 * \mathcal{E}_{7,7} + HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	18	$f + 2$	0
$k + 1$	19	$i + 3$	0
	20	$i + 4$	$\mathcal{E}_{14,13}$
	21	$i + 5$	$-\mathcal{E}_{13,13}$
	22	$f + 3$	0
	23	$f + 4$	$-\mathcal{E}_{16,13} - HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	24	$f + 5$	0
$k + m$	25	$i + 3m$	0
	26	$i + 3m + 1$	$a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,21}$
	27	$i + 3m + 2$	$-\mathcal{E}_{21,21}$
	28	$f + 3m$	0
	29	$f + 3m + 1$	$\mathcal{E}_{23,21}$
	30	$f + 3m + 2$	0

Таблица 5.4.10.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$

Эл. МСД	№	СВЯЗИ	$R_{f,j}; \quad j = i - 3m, \dots, f + 3m + 2$
$k - m$	1	$i - 3m$	$-\mathcal{E}_{1,4} - HOS2 * \mathcal{E}_{1,1}$
	2	$i - 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{2,4} - HOS2 * \mathcal{E}_{2,1}$
	3	$i - 3m + 2$	0
	4	$f - 3m$	$-\mathcal{E}_{4,4} + a_{k-m,k} * a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{6,6} - HOS2^2 * \mathcal{E}_{1,1} - 2 * HOS2 * \mathcal{E}_{1,4}$
	5	$f - 3m + 1$	0
	6	$f - 3m + 2$	$a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{6,6}$
$k - 1$	7	$i - 3$	$-\mathcal{E}_{9,11}$
	8	$i - 2$	$-\epsilon_{k-1,i} * \mathcal{E}_{9,11}$
	9	$i - 1$	0
	10	$f - 3$	$-\mathcal{E}_{11,11}$
	11	$f - 2$	0
	12	$f - 1$	0
$k$	13	$i$	$\mathcal{E}_{1,4} - \mathcal{E}_{9,11} - \mathcal{E}_{15,17} + \mathcal{E}_{19,12} + HOS2 * \mathcal{E}_{1,1} + HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	14	$i + 1$	$\mathcal{E}_{2,4} - \epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{9,11} + \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{15,17} + \mathcal{E}_{20,22} + HOS2 * \mathcal{E}_{2,1} + HOS4 * \mathcal{E}_{20,19}$
	15	$i + 2$	0
	16	$f$	$\mathcal{E}_{4,4} + a_{k,k-m}^2 * \mathcal{E}_{6,6} + \mathcal{E}_{11,11} + \mathcal{E}_{17,17} + \mathcal{E}_{22,22} + a_{k,k+m}^2 * \mathcal{E}_{24,24} +$ $+ HOS2^2 * \mathcal{E}_{1,1} + 2 * HOS2 * \mathcal{E}_{1,4} + HOS4^2 * \mathcal{E}_{19,19} + 2 * HOS4 * \mathcal{E}_{22,19}$
	17	$f + 1$	0
	18	$f + 2$	$-a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{6,6} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24}$
$k + 1$	19	$i + 3$	$\mathcal{E}_{15,17}$
	20	$i + 4$	$\epsilon_{k+1,k} * \mathcal{E}_{15,17}$
	21	$i + 5$	0
	22	$f + 3$	$-\mathcal{E}_{17,17}$
	23	$f + 4$	0
	24	$f + 5$	0
$k + m$	25	$i + 3m$	$-\mathcal{E}_{19,22} - HOS4 * \mathcal{E}_{19,19}$
	26	$i + 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{20,22} - HOS4 * \mathcal{E}_{20,19}$
	27	$i + 3m + 2$	0
	28	$f + 3m$	$-\mathcal{E}_{22,22} + a_{k+m,k} * a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24} - HOS4 * \mathcal{E}_{19,19} - 2 * HOS4 * \mathcal{E}_{22,19}$
	29	$f + 3m + 1$	0
	30	$f + 3m + 2$	$-a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24}$

Таблица 5.4.11.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл. МСД	№	СВЯЗИ	$R_{f+1,j}; \quad j = i - 3m, \dots, f + 3m + 2$
$k - m$	1	$i - 3m$	0
	2	$i - 3m + 1$	$a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{3,6}$
	3	$i - 3m + 2$	$\mathcal{E}_{3,5}$
	4	$f - 3m$	0
	5	$f - 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{5,5}$
	6	$f - 3m + 2$	0
$k - 1$	7	$i - 3$	0
	8	$i - 2$	$\mathcal{E}_{8,10} + HOS1 * \mathcal{E}_{8,7}$
	9	$i - 1$	$-\mathcal{E}_{7,10} - HOS1 * \mathcal{E}_{7,7}$
	10	$f - 3$	0
	11	$f - 2$	$-\mathcal{E}_{10,10} - HOS1^2 * \mathcal{E}_{7,7} - 2 * HOS1 * \mathcal{E}_{10,7} + \epsilon_{k-1,k}^2 * \mathcal{E}_{12,12}$
	12	$f - 1$	$\epsilon_{k-1,k} * \mathcal{E}_{12,12}$
$k$	13	$i$	0
	14	$i + 1$	$a_{k,k-m} * \mathcal{E}_{3,5} - \mathcal{E}_{8,10} - \mathcal{E}_{14,16} - a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{21,23} - HOS1 * \mathcal{E}_{8,7} - HOS3 * \mathcal{E}_{14,13}$
	15	$i + 2$	$-\mathcal{E}_{3,5} + \mathcal{E}_{7,10} + \mathcal{E}_{13,16} - \mathcal{E}_{21,23} + HOS1 * \mathcal{E}_{7,7} + HOS3 * \mathcal{E}_{13,13}$
	16	$f$	0
	17	$f + 1$	$\mathcal{E}_{5,5} + \mathcal{E}_{10,10} + \epsilon_{k,k-1}^2 * \mathcal{E}_{12,12} + \mathcal{E}_{16,16} + \epsilon_{k,k+1}^2 * \mathcal{E}_{18,18} + \mathcal{E}_{23,23} + HOS1^2 * \mathcal{E}_{7,7} + 2 * HOS1 * \mathcal{E}_{7,10} + HOS3^2 * \mathcal{E}_{13,13} + 2 * HOS3 * \mathcal{E}_{16,13}$
	18	$f + 2$	$-\epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{12,12} + \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{18,18}$
$k + 1$	19	$i + 3$	0
	20	$i + 4$	$\mathcal{E}_{14,16} + HOS3 * \mathcal{E}_{14,13}$
	21	$i + 5$	$-\mathcal{E}_{13,16} - HOS3 * \mathcal{E}_{13,16}$
	22	$f + 3$	0
	23	$f + 4$	$-\mathcal{E}_{16,16} + \epsilon_{k+1,k} * \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{18,18} - HOS3^2 * \mathcal{E}_{13,13} - 2 * HOS3 * \mathcal{E}_{16,13}$
	24	$f + 5$	$-\epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{18,18}$
$k + m$	25	$i + 3m$	0
	26	$i + 3m + 1$	$-a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{21,23}$
	27	$i + 3m + 2$	$\mathcal{E}_{21,23}$
	28	$f + 3m$	0
	29	$f + 3m + 1$	$-\mathcal{E}_{23,23}$
	30	$f + 3m + 2$	0

Таблица 5.4.12.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$ 

Эл. МСД	№	СВЯЗИ	$R_{f+2,j}; \quad j = i-3m, \dots, f+3m+2$
$k-m$	1	$i-3m$	0
	2	$i-3m+1$	0
	3	$i-3m+2$	0
	4	$f-3m$	$-a_{k-m,k} * \mathcal{E}_{6,6}$
	5	$f-3m+1$	0
	6	$f-3m+2$	$-\mathcal{E}_{6,6}$
$k-1$	7	$i-3$	0
	8	$i-2$	0
	9	$i-1$	0
	10	$f-3$	0
	11	$f-2$	$-\epsilon_{k-1,k} * \mathcal{E}_{12,12}$
	12	$f-1$	$-\mathcal{E}_{12,12}$
$k$	13	$i$	0
	14	$i+1$	0
	15	$i+2$	0
	16	$f$	$-\mathcal{E}_{6,6} * a_{k,k-m} + a_{k,k+m} * \mathcal{E}_{24,24}$
	17	$f+1$	$-\epsilon_{k,k-1} * \mathcal{E}_{12,12} + \epsilon_{k,k+1} * \mathcal{E}_{18,18}$
	18	$f+2$	$\mathcal{E}_{6,6} + \mathcal{E}_{12,12} + \mathcal{E}_{18,18} + \mathcal{E}_{24,24}$
$k+1$	19	$i+3$	0
	20	$i+4$	0
	21	$i+5$	0
	22	$f+3$	0
	23	$f+4$	$\epsilon_{k+1,k} * \mathcal{E}_{18,18}$
	24	$f+5$	$-\mathcal{E}_{18,18}$
$k+m$	25	$i+3m$	0
	26	$i+3m+1$	0
	27	$i+3m+2$	0
	28	$f+3m$	$a_{k+m,k} * \mathcal{E}_{24,24}$
	29	$f+3m+1$	0
	30	$f+3m+2$	$-\mathcal{E}_{24,24}$

Таблица 5.4.13.

Элементы матрицы внешней жесткости  $[R]_k$  для плиты

СВЯЗИ	$i$	$i+1$	$i+2$	$f$	$f+1$	$f+2$
$i-3m$	$R_{i,i-3m}$	$R_{i+1,i-3m}$		$R_{f,i-3m}$		
$i-3m+1$	$R_{i,i-3m+1}$	$R_{i+1,i-3m+1}$	$R_{i+2,i-3m+1}$	$R_{f,i-3m+1}$	$R_{f+1,i-3m+1}$	
$i-3m+2$		$R_{i+1,i-3m+2}$	$R_{i+2,i-3m+2}$		$R_{f+1,i-3m+2}$	
$f-3m$	$R_{i,f-3m}$	$R_{i+1,f-3m}$		$R_{f,f-3m}$		$R_{f+2,f-3m}$
$f-3m+1$		$R_{i+1,f-3m+1}$	$R_{i+2,f-3m+1}$		$R_{i+1,f-3m+1}$	
$f-3m+2$				$R_{f,f-3m+2}$		$R_{f+2,f-3m+2}$
$i-3$	$R_{i,i-3}$	$R_{i+1,i-3}$		$R_{f,i-3}$		
$i-2$	$R_{i,i-2}$	$R_{i+1,i-2}$	$R_{i+2,i-2}$	$R_{f,i-2}$	$R_{f+1,i-2}$	
$i-1$		$R_{i+1,i-1}$	$R_{i+2,i-1}$		$R_{f+1,i-1}$	
$f-3$	$R_{i,f-3}$	$R_{i+1,f-3}$		$R_{f,f-3}$		
$f-2$		$R_{i+1,f-2}$	$R_{i+2,f-2}$		$R_{f+1,f-2}$	$R_{f+2,f-2}$
$f-1$					$R_{f+1,f-1}$	$R_{f+2,f-1}$
$i$	$R_{i,i}$	$R_{i+1,i}$		$R_{f,i}$		
$i+1$	$R_{i,i+1}$	$R_{i+1,i+1}$	$R_{i+2,i+1}$	$R_{f,i+1}$	$R_{f+1,i+1}$	
$i+2$		$R_{i+1,i+2}$	$R_{i+2,i+2}$		$R_{f+1,i+2}$	
$f$	$R_{i,f}$	$R_{i+1,f}$		$R_{f,f}$		$R_{f+2,f}$
$f+1$		$R_{i+1,f+1}$	$R_{i+2,f+1}$		$R_{f+1,f+1}$	$R_{f+2,f+1}$
$f+2$				$R_{f,f+2}$	$R_{f+1,f+2}$	$R_{f+2,f+2}$
$i+3$	$R_{i,i+3}$	$R_{i+1,i+3}$		$R_{f,i+3}$		
$i+4$	$R_{i,i+4}$	$R_{i+1,i+4}$	$R_{i+2,i+4}$	$R_{f,i+4}$	$R_{f+1,i+4}$	
$i+5$		$R_{i+1,i+5}$	$R_{i+2,i+5}$		$R_{f+1,i+5}$	
$f+3$	$R_{i,f+3}$	$R_{i+1,f+3}$		$R_{f,f+3}$		
$f+4$		$R_{i+1,f+4}$	$R_{i+2,f+4}$		$R_{f+1,f+4}$	$R_{f+2,f+4}$
$f+5$					$R_{f+1,f+5}$	$R_{f+2,f+5}$
$i+3m$	$R_{i,i+3m}$	$R_{i+1,i+3m}$		$R_{f,i+3m}$		
$i+3m+1$	$R_{i,i+3m+1}$	$R_{i+1,i+3m+1}$	$R_{i+2,i+3m+1}$	$R_{f,i+3m+1}$	$R_{f+1,i+3m+1}$	
$i+3m+2$		$R_{i+1,i+3m+2}$	$R_{i+2,i+3m+2}$		$R_{f+1,i+3m+2}$	
$f+3m$	$R_{i,f+3m}$	$R_{i+1,f+3m}$		$R_{f,f+3m}$		$R_{f+2,f+3m}$
$f+3m+1$		$R_{i+1,f+3m+1}$	$R_{i+2,f+3m+1}$		$R_{i+1,f+3m+1}$	
$f+3m+2$				$R_{f,f+3m+2}$		$R_{f+2,f+3m+2}$

### 5.5. Расчет балочных плит и плит перекрытий опертых по контуру МСД. Сопоставление их результатов с данными эксперимента.

Для определения несущей способности, перемещений и трещиностойкости плит перекрытий, опертых по контуру, учитывающей особенности их работы в составе несущих элементов монолитного многоэтажного здания, разработана программа для расчета на ЭВМ, позволяющая рассчитывать плиты перекрытий, опертых по контуру, при любых граничных условиях.

Основные особенности разработанной расчетной методики заключаются в том, что наряду с упруго-пластическими свойствами железобетона, они позволяют учесть влияние на работу плит перекрытий усилий от распора (т.е. эффект распора) по высоте сечения плиты перекрытий. Алгоритм программы построен по следующей схеме (5.5.1.).

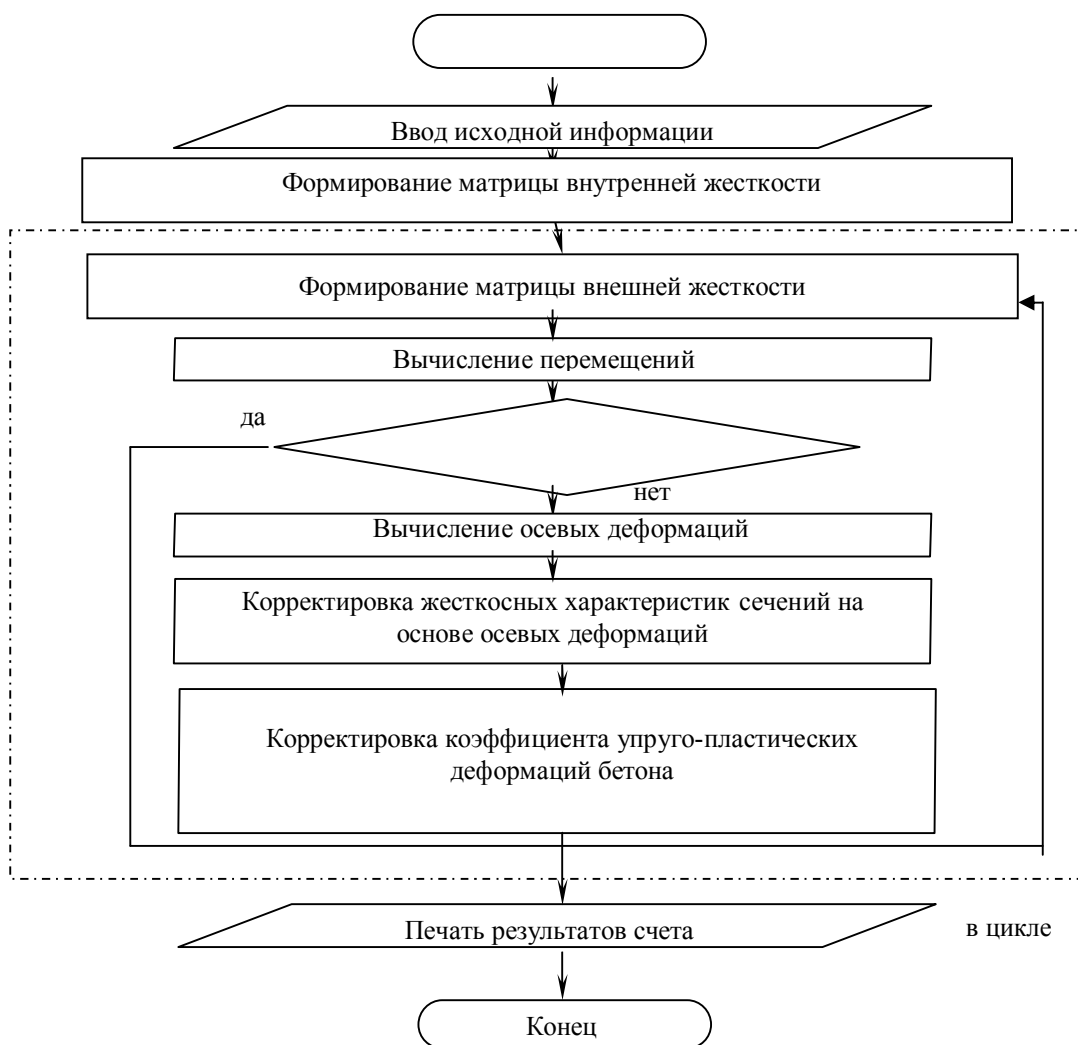


Рис. 5.5.1. Блок-схема программы "DIRAR"

Для того чтобы произвести расчет с учетом распора, необходимо определить точку приложения усилия распора по высоте сечения плиты (эксцентриситете), с этой целью были сделаны численные эксперименты.

Отыскание эксцентриситета  $e$  отражено на рис. 5.5.2. ÷ 5.5.3. Отсюда следует, что  $R_{min}$  получаем при  $e = -h/4$ . Например, расчетное значение  $R_{MSD}=64,0$  кН, вычисленное при  $e = -h/4$ , отличается от опытного с учетом

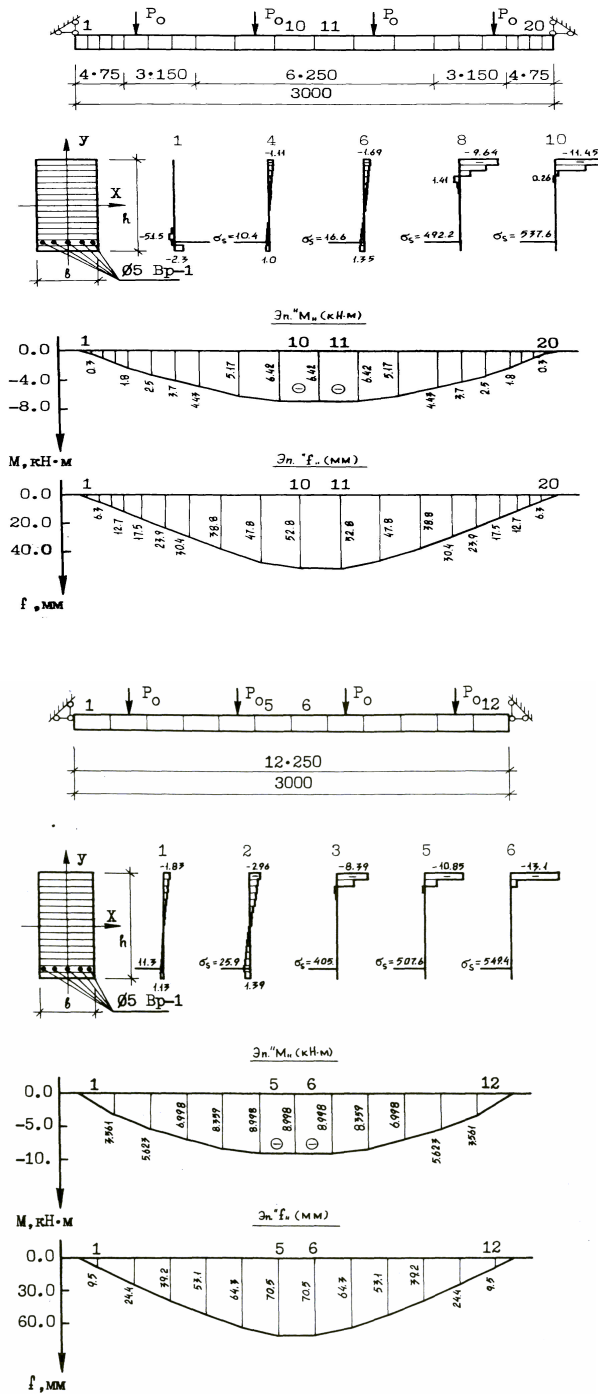


Рис.5.5.2. Эпюры напряжений, моментов и прогибов балочных плит П1-2 ( $e=h/2$  и  $P_0=5.0$  кН)

Рис.5.5.3. Эпюры напряжений, моментов и прогибов балочных плит П1-2 ( $e=h/4$  и  $P_0=5.5$  кН)

собственного веса и загрузочных устройств, равных  $P_{оп}=68,0$  кН, на 6,0%; также был произведен расчет балочных плит при различных схемах опирания, т.е. граничных условиях.

Как показано на рис. 5.5.4. и 5.5.5., при нагрузке  $P_0 = 5,0$  кН на каждую точку получены эпюры напряжений, моментов и прогибов, они между собой хорошо согласуются, расхождения составляют  $0,1 \div 0,2$  %. Поэтому для расчета плит перекрытий, опертых по контуру с учетом вышесказанного можно принять 1/4 часть плиты с граничными условиями по осям симметрии, при этом сокращается в 4 раза количество элементов МСД.

В нашем случае была выбрана схема разбивки плиты 6x6 и 7x8 элементов в направлениях X и Z. Для оценки точности и достоверности предлагаемой расчетной методики по программе "DIRAR" были выполнены расчеты по 3 балочным плитам и 2 натурным плитам перекрытий, опертых по контуру, испытанных автором [146, 151 и 156] и при его участии, а также по 2 натурным плитам перекрытий, опертых по контуру, испытанных другими исследователями [134].

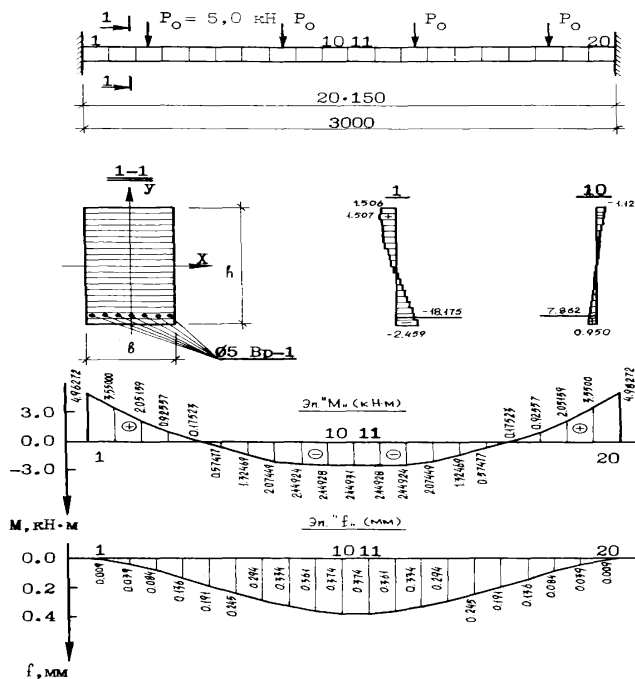


Рис.5.5.4. Напряженно-деформированное состояние балочных плит с жесткой заделкой



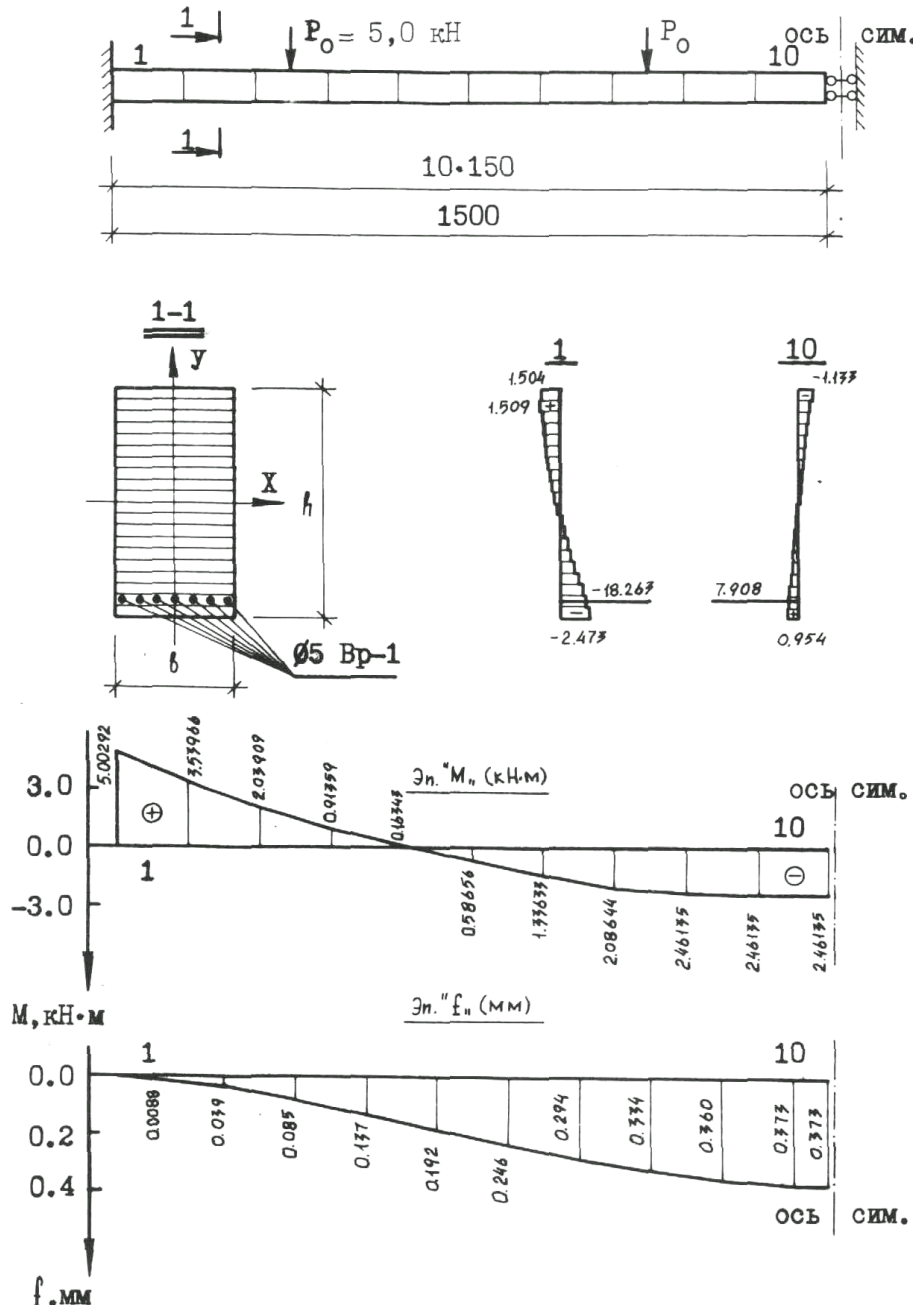


Рис.5.5.5. Напряженно-деформированное состояние балочных плит с использованием оси симметрии

Задаваемое приращение внешних нагрузок соответствовало ступеням загрузки экспериментальных образцов. В качестве результатов расчета железобетонных плит перекрытий получены перемещения  $(\omega_k, \varphi_k, u_k, \beta_k, \alpha_k, v_k)$  внутренние усилия  $(N_k, M_k, Q_k, M_k, H_k, Q_k)$  для

каждого элемента МСД и деформации элементарных полосок, на которые разбивается сечение по высоте и ширине.

**Из графика видно, что в прогибах (рис. 5.5.7 и 5.5.8) балочных плит в середине пролета получено хорошее соответствие опытных данных с расчетными. Это соответствие составляет  $5,0 \div 23,6$  %. Также произведено сопоставление изгибающих моментов в сечениях балочных плит и плит перекрытий, опертых по контуру, найденных по правилам строительной механики, справочнику по проектированию и МСД; сопоставлялись величины усилий распора, полученных при испытании и в результате расчета на ЭВМ (рис. 5.5.8 и 5.5.9).**

Расчет балочных плит и плит перекрытий, опертых по контуру, с учетом распора осуществлялся в 2 этапа. На первом этапе в расчет вводились только упругие характеристики материалов. Полученные прогибы по МСД сравнивались с результатом эксперимента и результатом расчета по теории упругости [343]. При нагрузке на точку  $P_0 = 2,0$  кН, которая соответствовала упругой стадии работы балочных плит с учетом распора, прогиб по МСД получился  $f_{МСД} = 0,271$  мм, а по теории упругости  $f_{СМ} = 0,294$  мм. При этом надо отметить, что схемы нагружения имели различие: по МСД расчет велся на действие четырех сосредоточенных сил, а по теории упругости принималось равномерно распределенное нагружение конструкции. С учетом сказанного необходимо отметить хорошее совпадение полученных прогибов, расхождение составляет 7,8 %. Для данного уровня нагружения опытный прогиб равен  $f_{ОП} = 0,28$  мм, это по отношению  $f_{МСД}$  составляет 3,3 %, а по отношению  $f_{СМ} - 5,0$ %. Расчет по МСД произведен при мелком шаге разбивки - на 12 и 14 элементов; в прогибах балочных плит без распора  $f_{МСД} = 0,7363$  мм и  $f_{СМ} = 0,7346$ , расхождение составляет 0,23 %.

В плитах перекрытий, опертых по контуру без распора при нагрузке  $q = 5,0$  кН/м<sup>2</sup> прогиб по равен  $f_{МСД} = 0,678$  мм, а по теории упругости  $f_{СМ} = 0,712$  мм, расхождение составляет 4,8%. Для данного уровня нагружения опытный прогиб равен  $f_{ОП} = 0,618$  мм по отношению  $f_{МСД}$  8,8%.

На втором этапе расчета учитывалась нелинейная работа балочных плит и плит перекрытий, опертых по контуру. Учет неупругой работы конструкции сказывается на следующей же ступени нагружения на точку. Например: изломы на графике (рис. 5.5.7 и 5.5.8) при  $P=20$ кН и  $P=40$ кН явно показывают на область пластических деформаций плит.

Проанализируем результаты нелинейного расчета плиты П-2 при жестком опирании по программе "DIRAR". Наибольшая нагрузка, достигнутая в процессе постепенного наращивания, в процессе расчета на ЭВМ по программе "DIRAR" оказалась равной  $Q = 26,12$  кН/м<sup>2</sup>, что отличается от опытной

$Q = 25,76 \text{ кН/м}^2$  на 1,4 %, а также вычисленной по методу предельного равновесия  $Q = 24,11 \text{ кН/м}^2$  на 8,4 %.

236

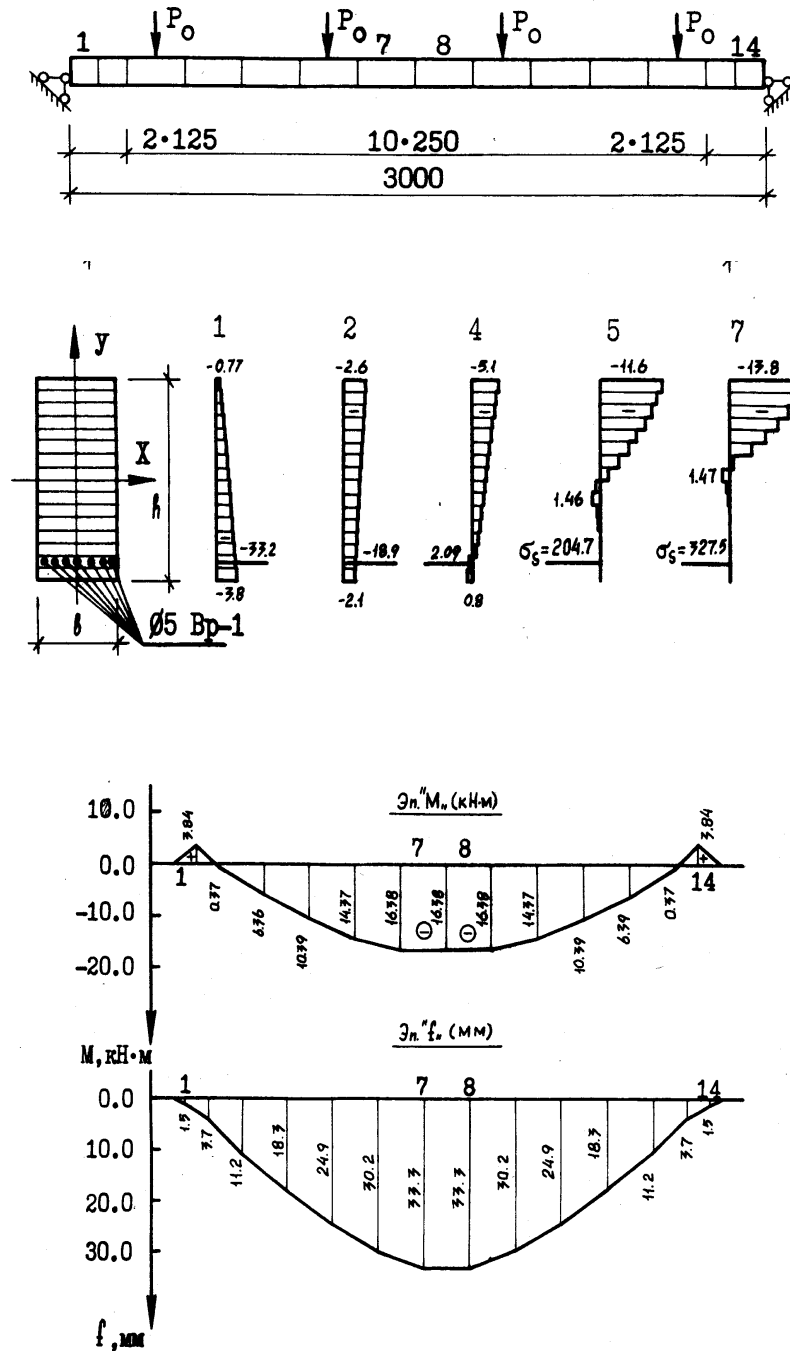


Рис. 5.5.6. Эпюры напряжений, моментов и прогибов балочных плит П2-1 и П2-2 ( $e = -h/4$  и  $P_0 = 16.0 \text{ кН}$ )

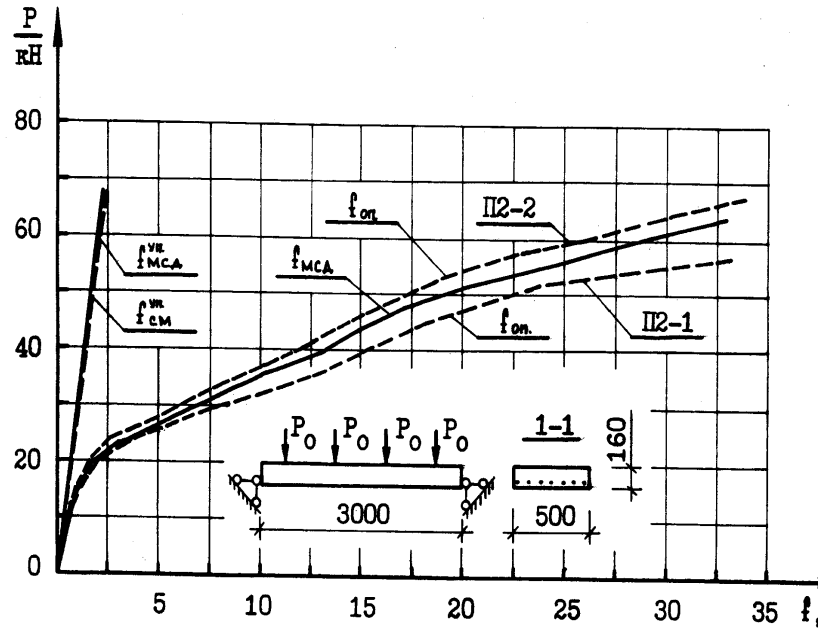


Рис. 5.5.7. Прогибы в середине пролета балочных плит

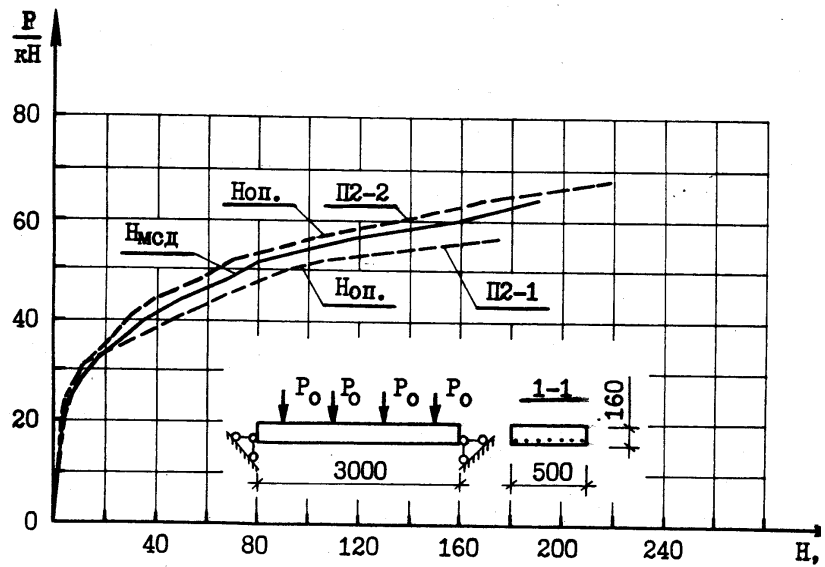


Рис. 5.5.8. Изменение усилий распора балочных плит

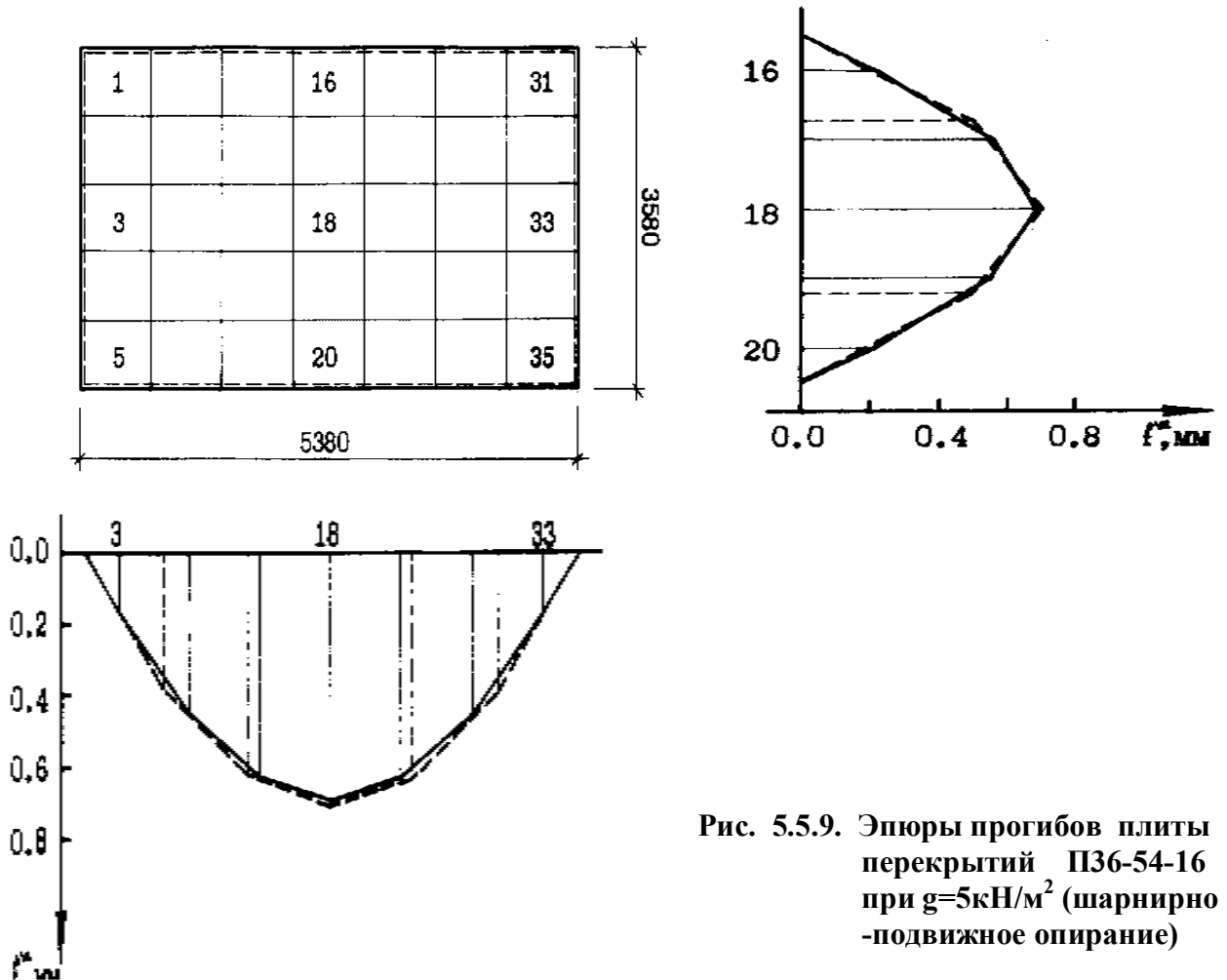


Рис. 5.5.9. Эпюры прогибов плиты перекрытий ПЗ6-54-16 при  $g=5\text{кН/м}^2$  (шарнирно-подвижное опирание)

Из этого можно сделать вывод, что методика нелинейного расчета плит перекрытий, опертых по контуру, при кратковременных нагрузках дает хорошие результаты по несущей способности.

Из рис. 5.5.9 видно, что прогибы плиты П-2 в середине пролета удовлетворительно совпадают с опытными. В то же время, вычисленные перемещения больше опытных, что свидетельствует о некотором "запасе" при оценке жесткости конструкций расчетным методом.

Таким образом, расчеты по программе "DIRAR" натуральных железобетонных плит перекрытий, опертых по контуру, показали, что при обеспечении реальных условий опирания плит в зданиях с монолитными стенами, учет распора увеличивает несущую способность в  $3,5 \div 4$  раза, жесткость в  $3 \div 3,5$  раза и трещиностойкость в  $3 \div 3,5$  раза.

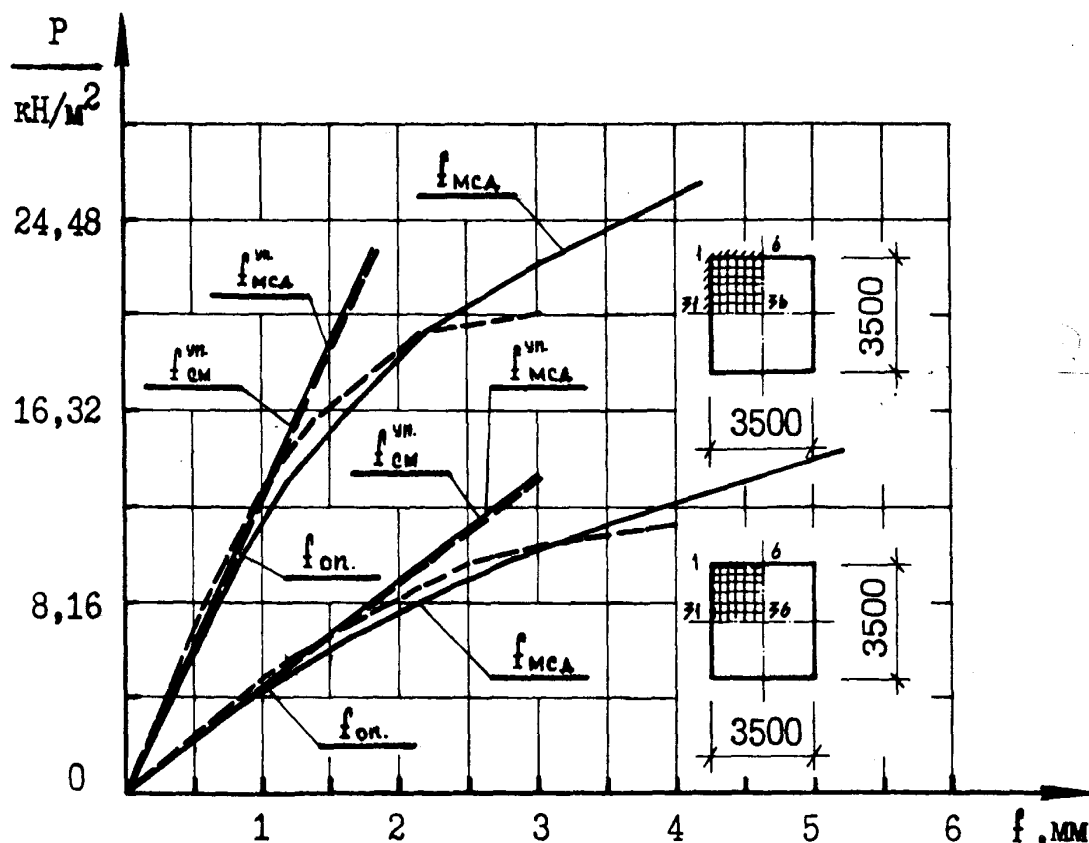
Расчет на трещиностойкость балочных плит произведен по СНиПу и сопоставлен с результатом расчета по МСД. По результатам расчета по МСД

трещинообразованию соответствовала нагрузка, при которой растягивающие напряжения в середине пролета достигали предельных значений.

Трещины по МСД получились при  $P_{обр.}^T = 14,0$  кН, а по СНИПу при  $P_{обр.}^T = 14,12$  кН, при этом расхождения составляет 0,85 %. Расчет по ширине раскрытия трещин производился по следующей формуле

$$a_{crc} = \delta \varphi_1 \eta \frac{\sigma_s^*}{E_s} 20(3,5 - 100\mu)^3 \sqrt{d} \quad (5.5.1)$$

где:  $\sigma_s^*$  - принималась из машинного расчета и вычислялось по формуле СНИП, [326].



стадии (рис. 5.5.11 а.). Из графика видно, что результаты расчета по СНИП и МСД хорошо согласуются между собой, расхождение составляет  $0,29 \div 2,13\%$ . Изменение ширины раскрытия трещин при неупругой стадии (рис. 5.5.11.б), свидетельствует о хорошей сходимости, при этом расхождение составляет  $2,56 \div 6,59\%$ .

Результаты расчета по двум предыдущим этапам теоретического исследования показали правильность разработанной методики и обеспечили наглядность в дальнейшем теоретическом изучении конструкции.

В программе была предусмотрена оценка напряженно - деформированного состояния во всех сечениях конструкции. Согласно принятой дискретизации сечения для 240 каждой элементарной бетонной полоски и арматурных стержней впечатываются относительные деформации  $\varepsilon_e(\varepsilon_s)$  и нормальные напряжения  $\sigma_e(\sigma_s)$  для всех уровней загрузки.

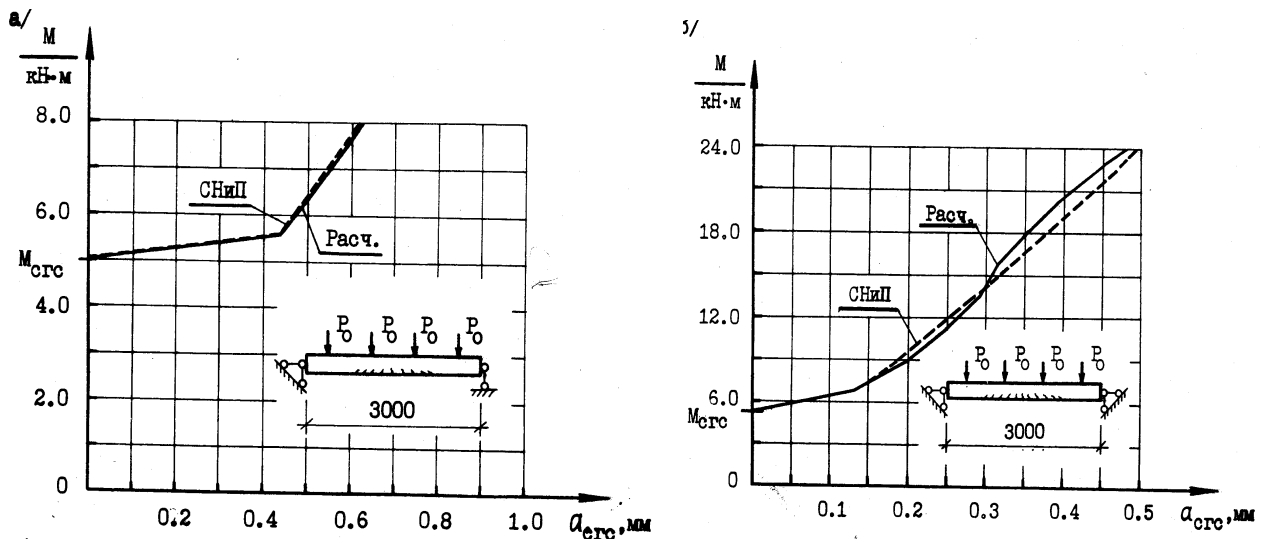


Рис. 5.5.11. Изменение раскрытия трещин в середине пролета балочных плит

## 5.6. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

1. Расчетная модель железобетонных плит перекрытий, пространственно работающих в несущих системах многоэтажных зданий, может быть рассмотрена в виде МСД в условиях изгибного и плосконапряженного состояния.

2. Разработанная методика расчета позволяет использовать в расчетах реальные диаграммы деформирования материалов (бетона и арматуры) с учетом уровня и длительности загрузки. Учитывает физическую и геометрическую нелинейность, неравномерность развития нормальных и касательных напряжений по высоте сечения элементов обусловленные в стесненными условиями опирания, т.е. наличием эффектом распора.

3. Предложенный алгоритм расчета предоставляет возможность оценить напряженно-деформированное состояние плит перекрытий, как пространственно работающих конструкций, в упругой и нелинейной стадии при любых уровнях и длительностях нагружения.

4. Для сплошных железобетонных плит перекрытий опертых по контуру в монолитных многоэтажных зданиях проектировании, необходимо принимать распределение напряжений от усилия распора а пределах  $h/4$  по высоте сечений.

5. Анализ теоретических и экспериментальных исследований сборных железобетонных плит перекрытий, опертых по контуру в монолитных многоэтажных зданиях показывает, что эти конструкции обладают значительными резервами по несущей способности, жесткости и трещиностойкости.



## 6.1. Экспериментально-теоретическое исследование предельных состояний плит перекрытий при вертикальном воздействии

### 6.1.1. Конструктивные особенности фрагмента перекрытия

Экспериментальные исследования проводили на фрагменте перекрытия, смонтированного из типовых элементов многоэтажных каркасных зданий серии 1.020 и представляющего отдельную ячейку размером 6х6 м в лаборатории строительных конструкции кафедры ЖБК КГУСТА [339] (рис. 6.1.1).

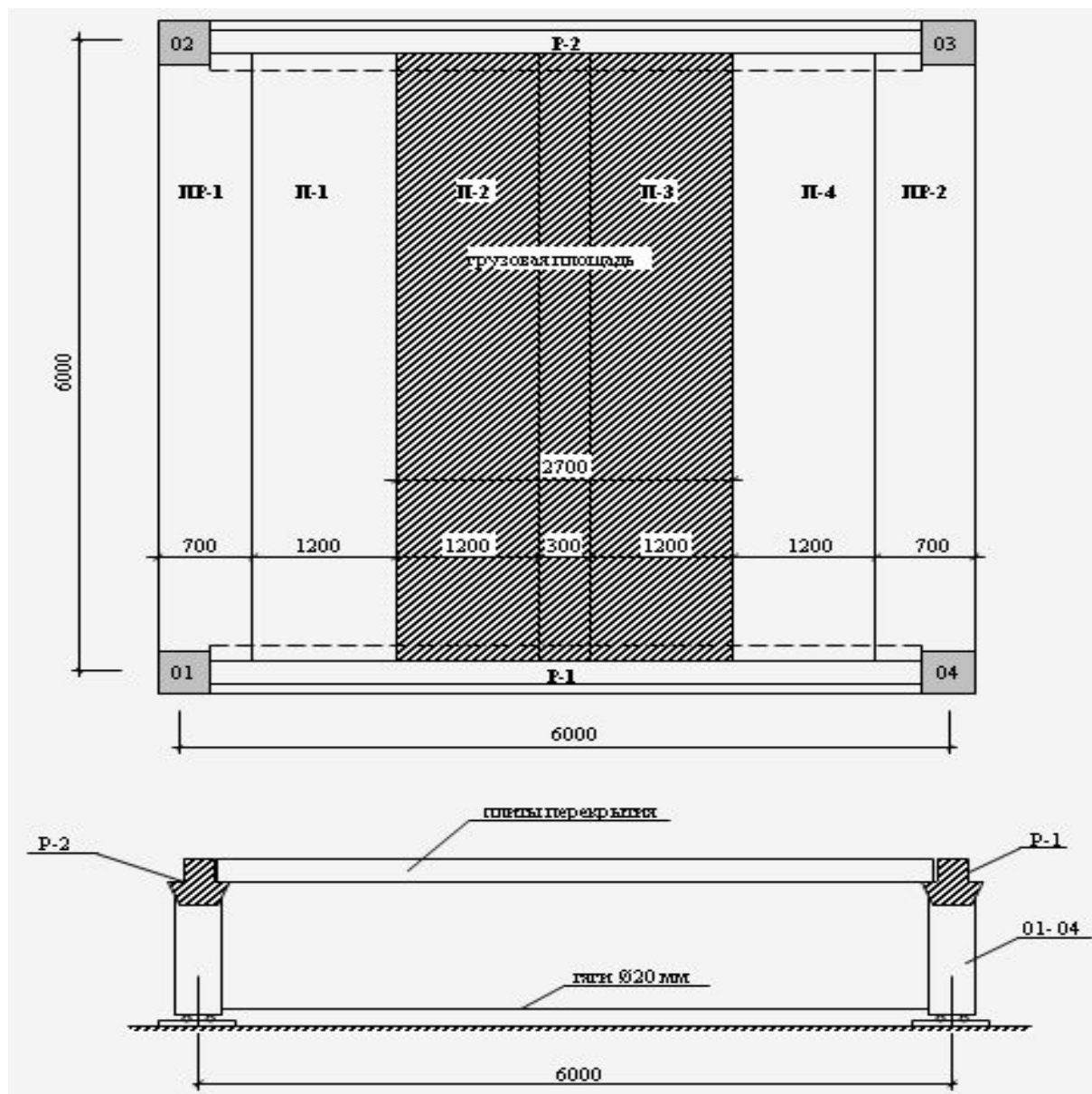


Рис. 6.1.1. Фрагмент сборного железобетонного перекрытия

Колонны размером 40х40х160 см свободно опирались на стальные катки, уложенные поверх стальной пластины толщиной 20 мм. По осям А и В укладывали ригели типа таврового сечения с нижней полкой. Ригели изготавливались из бетона класса В-25, по осям 1 и 2 расположили плиты-

распорки из бетона класса В-25. Стыки колонн с ригелями и плитами-распорками выполнялись в соответствии с рабочими чертежами серии 1.020. Фрагмент перекрытия заполняли предварительно напряженными плитами перекрытия под нормативную нагрузку  $8,0 \text{ кН/м}^2$  из бетона В-25. Швы между плитами перекрытия и ригеля закладывали песчаным раствором на напрягающем цементе НЦ-10. Для повышения пространственной жесткости каркаса колонны на уровне пола объединяли связями из стержневой арматуры  $\text{Ø}20 \text{ А-IV}$ . Плиты перекрытия изготавливали в одну рабочую смену. Одновременно бетонировались кубы и призмы размерами  $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$  и  $10 \times 10 \times 40 \text{ см}$  для определения прочностных и деформативных характеристик бетона элементов фрагмента.

### **6.1.2. Исследование физико-механических свойств раствора на напрягающем цементе НЦ-10**

Напрягающий цемент ТУ 21-20-48-82 является быстросхватывающим вяжущим, приготовление раствора производится в предварительной гидратации для замедления сроков схватывания раствора. Состав НЦ и песка по массе берется 1:1 для получения наибольшего самоупрочнения. Процесс предварительной частичной гидратации заключается в выдерживании НЦ в течение 5-7 мин в контакте с увлажненным (20-25 % воды затворения) песком, затем доливают остальную часть воды (75-80 %) и перемешивают до приготовления раствора.

Величину свободного расширения, показатели прочности и самоупрочнения раствора определяют на образцах, изготовленных из того же замеса раствора, которым заделывается шов между плитами. Для изготовления образцов-призм используют формы по ГОСТ 310.4-84 размерами призм  $4 \times 4 \times 16 \text{ см}$ .

Механическую прочность образцов-призм определяют на изгиб, а затем половинки призм испытывают на сжатие по ГОСТ в день испытания плит перекрытий. На каждый срок испытания – по 3 образца-призмы. Призмы до момента испытания твердеют в формах в «связанном» состоянии, то есть при упругом ограничении деформации расширения (если свободное расширение стандартных форм не превышает 1 %). В течение первых суток после затворения образцы-призмы находятся во воздушно-влажных условиях при температуре  $20 \pm 2 \text{ }^\circ\text{C}$ , затем образцы в формах хранятся в воде до момента испытания. При испытании на изгиб нагружение должно производиться в режиме чистого изгиба. Средняя скорость нарастания нагрузок  $0,05 \pm 0,01 \text{ кН/с}$ .

Предел прочности определяют как среднее арифметическое значение двух наибольших результатов испытания трех образцов-призм. Затем сразу половинки призм испытывают на сжатие. Средняя скорость нарастания нагрузки  $2,0 \pm 5 \text{ МПа/с}$ . Предел прочности при сжатии вычисляют как частное от деления величины разрушающей нагрузки (кгс) на рабочую площадь пластинки ( $\text{см}^2$ ), т.е. на  $6,25 \times 4,0 = 25 \text{ см}^2$  и вычисляют как среднее арифметическое

значение четырех наибольших результатов испытания шести половинок призм. Линейное расширение раствора определяют по ТУ 21-20-48-82.

При изготовлении образцов-призм размерами 4x4x16 см в форму закладываются (по торцам призм) пластинки, в центре пластинки имеется трехгранное керновое углубление, служащее опорной точкой при замере удлинения образца. Образцы призм после затвердения выдерживают в течение суток в воздушно-влажностных условиях при температуре  $20\pm 2$  °С, затем образцы освобождают от форм, нумеруют, измеряют (этот замер принимают за первоначальное значение отсчета) и погружают в воду с температурой  $20\pm 2$  °С. Отсчет линейного расширения снимают с периодом в сутки. Измерение производится в вертикальном положении с помощью жесткого штатива, имеющего индикатор часового типа с ценой деления 0,01 мм. Перед замером производят проверку штатива с помощью стального эталона. Линейное расширение определяют как среднеарифметическую величину замера 3-х образцов.

### **6.1.3. Исследование физико-механических характеристик**

#### **МЕЖПЛИТНЫХ ШВОВ**

Цементно-песчаный раствор для замоноличивания межплитных швов на напрягающем цементе НЦ-10 изготавливали в два замеса. Отношение цемента и песка по массе 1:1, 70 кг цемента и 70 кг песка в одном замесе, водоцементное отношение В/Ц=0,30. Раствор укладывали в два слоя и после каждого слоя вибрировали. Через сутки поверхность шва засыпалась мелкими опилками толщиной 50-60 мм, которые укрывались мешковиной и каждые 3-4 часа увлажнялись водой. Измерение деформаций швов от самонапряжения раствора осуществлялось индикаторами часового типа с ценой деления 0,01 и 0,001 мм, установленными на базе 10 см, с шагом 140 см. Отсчеты снимались в первые двое суток через каждые 2 часа, а затем через каждые 12 часов. На седьмые сутки показания стабилизировались и величина относительных горизонтальных перемещений в среднем составила 0,008-0,010 мм.

Через сутки после изготовления 3 образца призм устанавливали в штатив для определения величин линейного расширения. Штативы помещали в сосуд с водой, где они выдерживались до стабилизации деформаций, относительная величина которых на седьмые сутки составила 0,12 мм. Остальные шесть образцов-призм хранились в формах в «связанном» состоянии со дня испытания в тех же условиях, что и замоноличенный шов. В день испытания фрагмента перекрытия образцы-призмы испытывались на изгиб и сжатие.

### **6.1.4. Испытание фрагмента сборного железобетонного перекрытия на вертикальное воздействие**

Поэтапное нагружение фрагмента сборного железобетонного перекрытия производили бетонными блоками весом 370-400 кг (рис. 6.1.2).



Рис. 6.1.2 Загружение фрагмента бетонными блоками по средним плитам

Для замера прогибов и осадки опор элементов фрагмента перекрытия в 72 характерных точках установили мерные линейки. Прогиб каждого элемента фиксировали с помощью нивелирам НО-2 с ценой деления микроскопа 0,05мм.

Деформации ригеля Р-1 и Р-2 из плоскости изгиба фиксировали тремя прогибомерами Максимова Пр1-Пр6, установленными по высоте каждого ригеля в середине пролета. Для замера деформации поперечных межплитных швов устанавливали индикаторы часового типа ценой деления 0,01 и 0,001 мм на базе 10 см с шагом 140 см вдоль шва, на противоположных гранях высоты сечения плиты. Схема расстановки приборов по низу и по верху фрагмента перекрытия приведена на рис.6.1.3 и 6.1.4.

### 6.1.5. Сопоставительный анализ результатов испытания с данными расчетов по МСД

Теоретические исследования предельного состояния фрагмента междуэтажного перекрытия при вертикальной воздействию осуществлялись дискретным методом, за основу принята дискретная расчетная модель в форме метода сосредоточенных деформаций, методика расчета которой изложена в п.5.2.

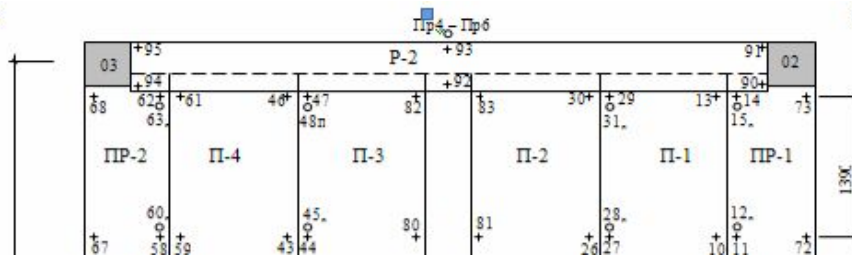


Рис. 6.1.3. Схема расстановки приборов по низу фрагмента перекрытия

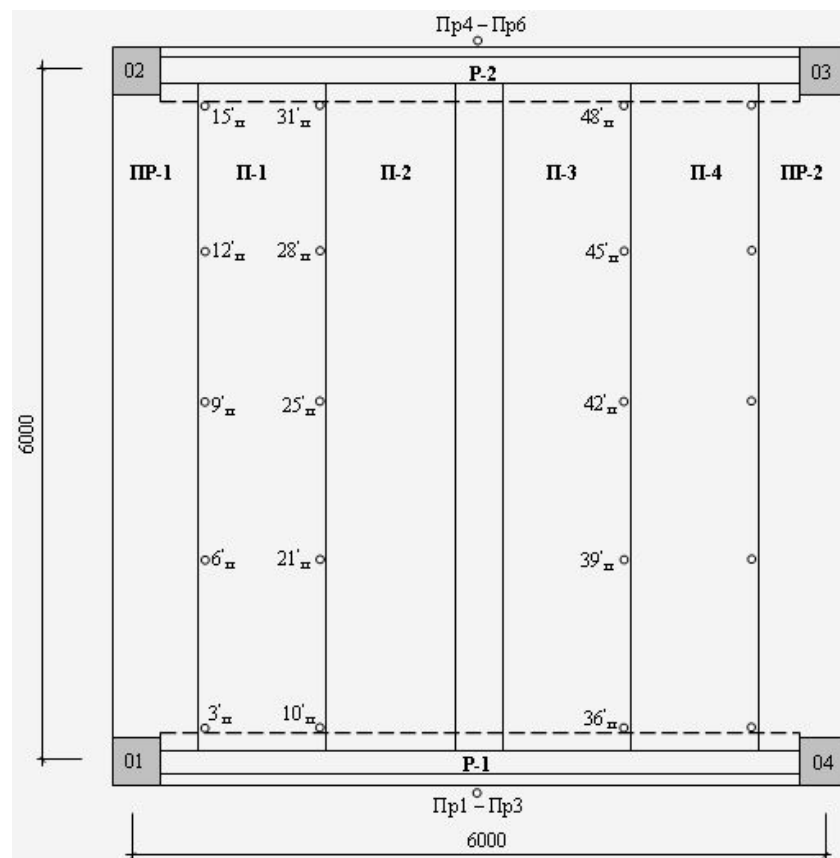


Рис. 6.1.4. Схема расстановки приборов по верху фрагмента перекрытия

Расчетная методика была реализована по программе «DIRAR» [149].

Результаты испытания фрагмента перекрытия на вертикальное воздействие и результаты теоретических расчетов по МСД приведены в таблице 6.1.1, рис. 6.1.5, 6.1.7 и 6.1.8.

Таблица 6.1.1

Этапы загрузки	Нагрузки на этапах в долях от разрушения, кГс/см <sup>2</sup>	Прогиб, мм				Трещины, мм			
		Экспериментальный		Теоретический (МСД)		Экспериментальный		Теоретический (МСД)	
		Ригель (т. 86 и 87, 92 и 93)	Плита (т. 78 и 79)	Ригель	Плита	Ригель (92 и 93)	Плита (т. 78 и 79)	Ригель	Плита
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
от0 до5	664/0,33	1,25	0,65	1,201	0,624	0,02	-	0,018	-
6	738/0,36	2,00	1,47	1,948	1,411	0,05	0,02	0,047	0,019
7	837/0,41	2,75	2,10	2,651	2,016	0,08	0,05	0,076	0,049
8	1087/0,53	3,40	2,65	3,364	2,317	0,10	0,08	0,098	0,078
9	1188/0,58	4,10	4,55	4,032	4,277	0,12	0,10	0,106	0,095
10	1376/0,66	4,80	6,85	4,674	6,371	0,20	0,18	0,180	0,179
11	1619/0,79	6,80	11,90	6,804	10,710	0,28	0,25	0,275	0,248
12	1880/0,92	8,30	14,35	8,075	12,915	0,30	0,60	0,324	0,597
13	2035/1,0	13,75	19,16	13,120	17,244	0,35	1,10	0,367	1,096

Из таблицы 6.1.1 видно, что прогибы по методу сосредоточенных деформаций хорошо подтверждаются с экспериментальными данными. При анализе разница в результатах не превышает 4- 13% (рис.6.1.5).

Данные эксперимента показали, что прогиб в середине перекрытия в точках 78 и 79 увеличивался пропорционально величине поэтапного приращения нагрузки (табл. 6.1.1). Максимальное значение прогиба на тринадцатом этапе составило 19,16 мм. В момент образования трещин на шестом этапе величина прогиба в плитах П-1 и П-2 равнялась 1,47 мм. Если величина прогиба с 1 по 9 этап увеличивалась на каждом этапе на 5 % от максимального прогиба, то с 10 по 13 этап составляла в среднем на 20 %.

В середине пролета ригеля в точках 86 и 87 (92 и 93) максимальная величина прогиба в среднем составила на тринадцатом этапе 13,75 мм. Прогиб на каждом этапе соответственно составлял с 1 по 10 этап 5 %, с 10 по 12 этап - 15 % и на последнем тринадцатом этапе - 66 %.

Разница прогиба между точками 86 и 87 (92 и 93) на тринадцатом этапе составила 0,55-0,65 мм.

Величина прогиба в середине пролета ригеля на начальных этапах меньше, чем прогиб в середине перекрытия в точках 78 и 79, если на третьем этапе эта величина составила 72 %, то к седьмому этапу уменьшилась до 22 %. На последующих этапах прогиб плит перекрытий в точках 78 и 79 увеличивается на 10 % на девятом этапе, на 43 % - на двенадцатом этапе. При этом прогиб середины пролета ригеля увеличивается интенсивно.

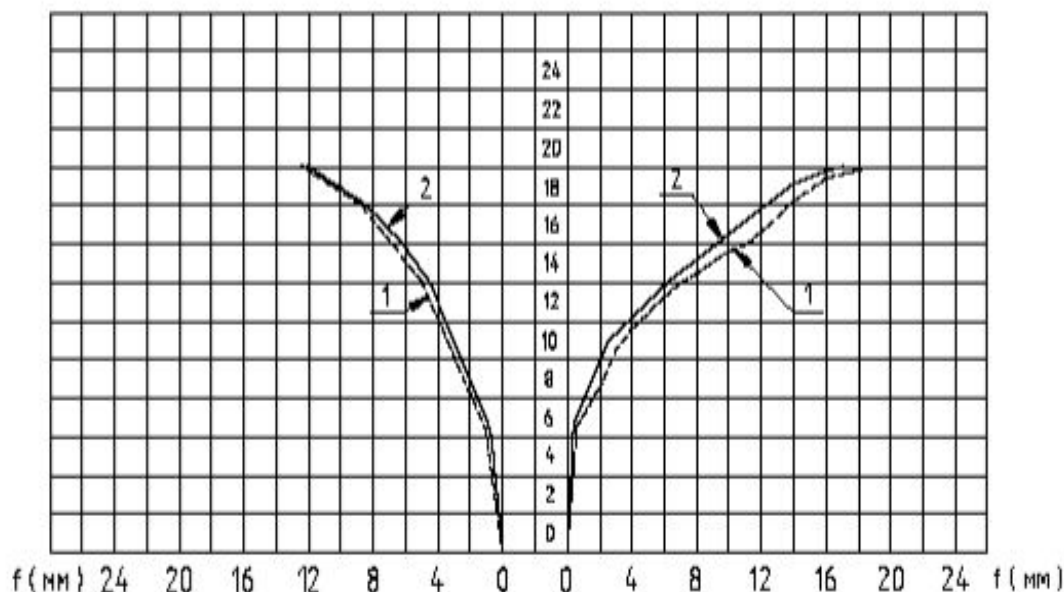


Рис.6.1.5 График зависимости «N-f». 1-эксперимент; 2 – теория (МСД)

Максимальная ширина раскрытия трещин ригеля на тринадцатом этапе составила 0,35 мм. С момента образования трещин на пятом этапе эта величина на каждом последующем этапе увеличивалась в среднем на 0,010-0,025 мм, т.е. на 5-7 % от максимальной величины, и на девятом этапе соответственно составила 0,12 мм (34 %). На десятом этапе ширина раскрытия трещин резко увеличилась и составила 0,20 мм (57 %), в дальнейшем на этапах увеличивалась на 0,03-0,05 мм (9-14 %). Ширина раскрытия трещин с наружной стороны ригеля образовалась только на седьмом этапе, и на всех этапах эта величина на 0,02-0,05 мм была меньше, чем с внутренней стороны.

На шестом этапе загрузки образовались трещины по всей длине в швах между ригелем и плитами перекрытия, на последующих этапах увеличивалась пропорционально этапам загрузки и на тринадцатом этапе составила 2,05-3,15 мм.

Трещины в плитах перекрытия образовались на шестом этапе, максимальная ширина раскрытия трещин на тринадцатом этапе составила 1,10-1,15 мм. Ширина раскрытия трещин на каждом этапе до девятого этапа возрастала на 2-2,5 % от максимальной, на десятом и одиннадцатом этапах - на 6-7 %, и на двенадцатом и тринадцатом этапе составила 32-46 %. Если трещины в плитах П-1, П-2, П-3, П-4 образовались в середине пролета и не доходили до краев плит на 20-25 см, то в плитах-распорках такие же трещины образовались на расстоянии 120-130 см от середины пролета, расстояние между трещинами составило 20-25 см.

Одновременно с образованием трещин на одиннадцатом этапе в швах между плитами П-1 (П-4) и распоркой Пр-1 (Пр-2) образовались диагональные трещины в плитах П-1 и П-4. Трещины распространились от середины пролета

и не доходили до опор на 50-60 см. На последующих этапах нормальные поперечные трещины в середине пролета в плитах П-2 и П-3 и диагональные трещины в плитах П-1 и П-4 увеличились и на тринадцатом этапе достигли максимального значения. Остальные трещины, образованные ранее, с одиннадцатого этапа не увеличивались. Картина образования и распространения трещин по низу фрагмента перекрытия приведена на рис.

6.1.6, а также график зависимости "N -  $\alpha_{\text{срс}}$ " ригеля рис.6.1.7 и график зависимости "N -  $\alpha_{\text{срс}}$ " плиты рис.6.1.8.

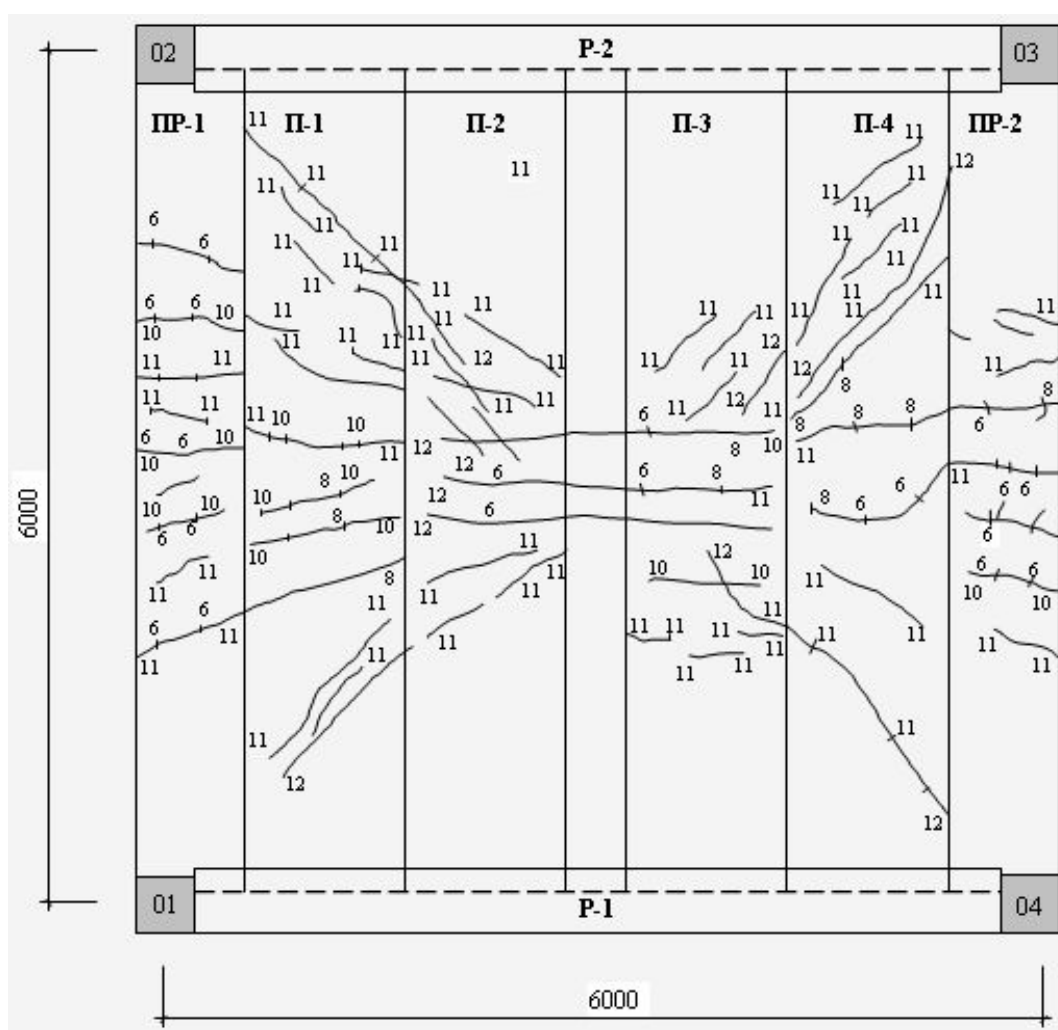


Рис. 6.1.6. Картина распространения трещин в плитах перекрытия по низу фрагмента



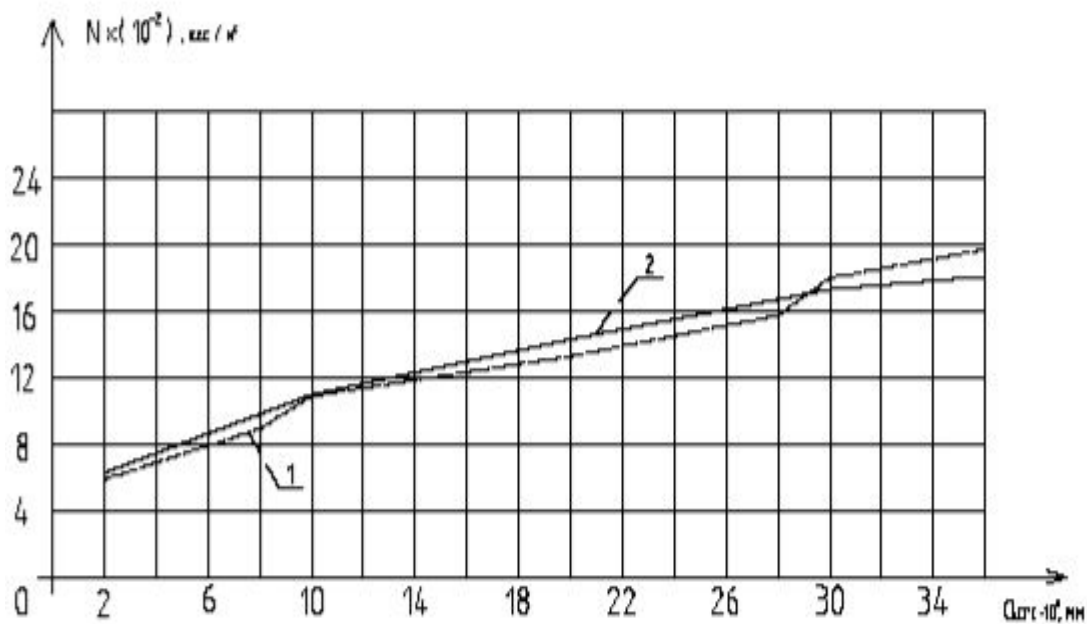


Рис.6.1.7. График зависимости "N -  $Q_{ср}$ " (ригель)  
1-эксперимент; 2-теория (МСД)

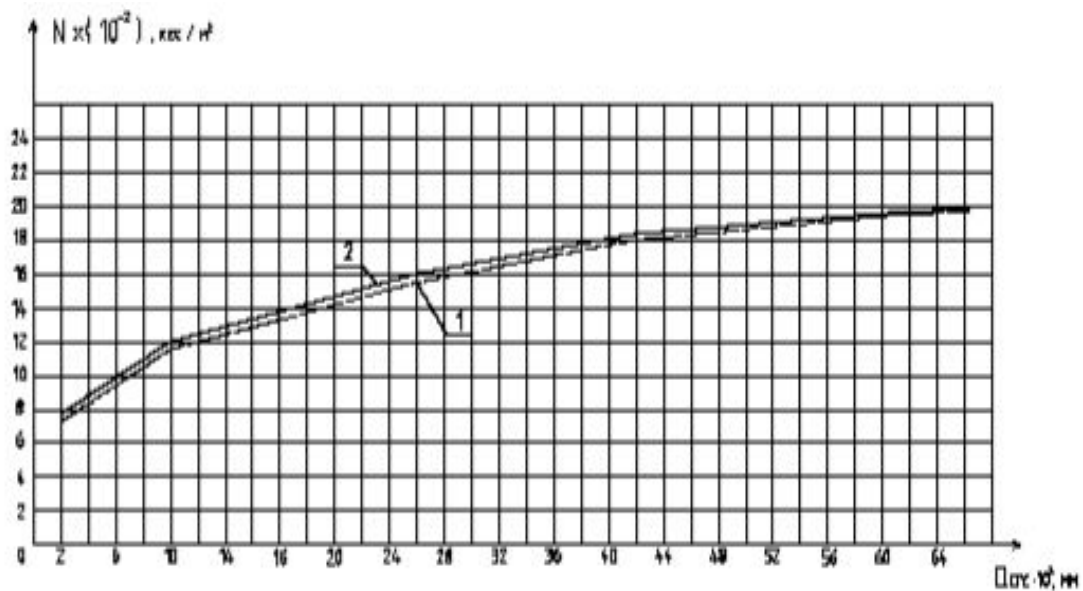


Рис.6.1.8. График зависимости "N -  $Q_{ср}$ " (плита)  
1-эксперимент; 2-теория (МСД)

## **6.2. Экспериментально-теоретические исследования предельных состояний фрагмента сборного железобетонного перекрытия при горизонтальных воздействиях**

### **6.2.1. Испытания фрагмента перекрытия на диагонально-сжимающую нагрузку**

В лаборатории строительных конструкции кафедры ЖБК КГУСТА были проведены экспериментальные исследования фрагмента перекрытия размером 6х6 м на диагонально-сжимающую нагрузку (перекос). Конструктивные особенности фрагмента перекрытия были аналогичны приведенным в п. 6.1.1. Испытание фрагмента перекрытия на диагонально-сжимающую нагрузку (перекос) проводилось в четыре этапа. С точки зрения поставленной задачи наибольший практический интерес представляют результаты четвертого этапа эксперимента. Схема испытания фрагмента перекрытия размером 6х6 м. приведена на рис. 6.2.1.



**Рис. 6.2.1. Схема испытания фрагмента перекрытия размером 6х6 м. на диагонально-сжимающую нагрузку.**

Четвертый этап эксперимента предусматривал испытание фрагмента сборного железобетонного перекрытия в ее рабочем состоянии, то есть с замоноличенными межплитными шпоночными швами и швами между торцами плит настила и ригелем цементным раствором марки 100 (В 7.5).

Для определения физико-механических характеристик цементного раствора, одновременно с замоноличиванием швов, были изготовлены шесть кубиков размерами 10х10х10 см и шесть призм размерами 10х10х40 см. Кубы и

призмы выдерживались в тех же условиях, что и цементно-песчаный раствор замоноличивания. Перед началом эксперимента кубы и призмы (по три из шести) были испытаны, остальные испытывались после завершения эксперимента.

Для проведения четвертого этапа эксперимента фрагмент перекрытия был оснащен индикаторами часового типа, установленными вдоль шпоночных швов для фиксации их деформаций обжатия и сдвига.

Для замера деформаций выгиба ригелей из плоскости в третях их пролета были установлены прогибомеры Максимова.

Для получения действительных величин деформаций диагоналей фрагмента перекрытия помимо прогибомеров, установленных по диагонали над фрагментом, были установлены прогибомеры по диагоналям под фрагментом перекрытия.

Внешняя диагонально-сжимающая нагрузка создавалась при помощи 200-тонного гидродомкрата, передача которой на колонну фрагмента осуществлялась посредством металлической прокладки.

В результате проведения эксперимента получен ряд данных, определяющих жесткостные характеристики элементов фрагмента сборного железобетонного перекрытия (межплитных швов, узловых соединений и т.д.) на различных этапах испытания.

Основной характеристикой фрагмента перекрытия, необходимого для его расчета по МСД является жесткость (податливость) их элементов и реальных швов.

Жесткость элементов фрагмента перекрытия и их реальных швов на различных этапах эксперимента характеризуется зависимостью между укорочением (удлинением)  $f$  диагоналей фрагмента от внешней диагонально-сжимающей силы  $N$ .

По четвертому этапу эксперимента было проведено V циклов загрузки и разгрузки. Максимальные значения внешней диагональной нагрузки в I, II, III и IV циклах загрузки соответственно составляли 8, 10, 34 и 95 тонн.

Показания диагональных прогибомеров П-1, П-15, П-4, П-16, характеризующие деформацию перекоса фрагмента по V циклу IV этапа, показаны на рис. 6.2.2.

В момент разрушения фрагмента перекрытия максимальная ширина раскрытия трещин между контурной обвязкой и заполнением составила около 10 мм.

Разрушение фрагмента перекрытия произошло в результате среза ригеля, при величине диагонально-сжимающей нагрузки  $N=149$  т.

По показаниям диагональных прогибомеров П-1, П-15 и П-4, П-16 по V циклу испытания приведенных на рис. 6.2.2 видно, что зависимости между нагрузкой и деформациями диагоналей заполнения фрагмента перекрытия до значения нагрузки  $N=100$  т линейные, а затем наблюдается резкое отклонение кривых от оси ординат, разрушающая нагрузка для перекрытия составила  $N=149$  т.

Теоретические исследования напряженно-деформированного состояния фрагмента сборного железобетонного перекрытия, при действии диагонально-сжимающей нагрузки, были осуществлены с помощью метода сосредоточенных деформаций. Алгоритм, блок-схема расчетной программы "MSD" приведены в главе IV настоящей работы. Суть расчета сводилась к описанию зависимости « $N-f$ » на всех уровнях загрузения вплоть до разрушения по V этапу эксперимента.

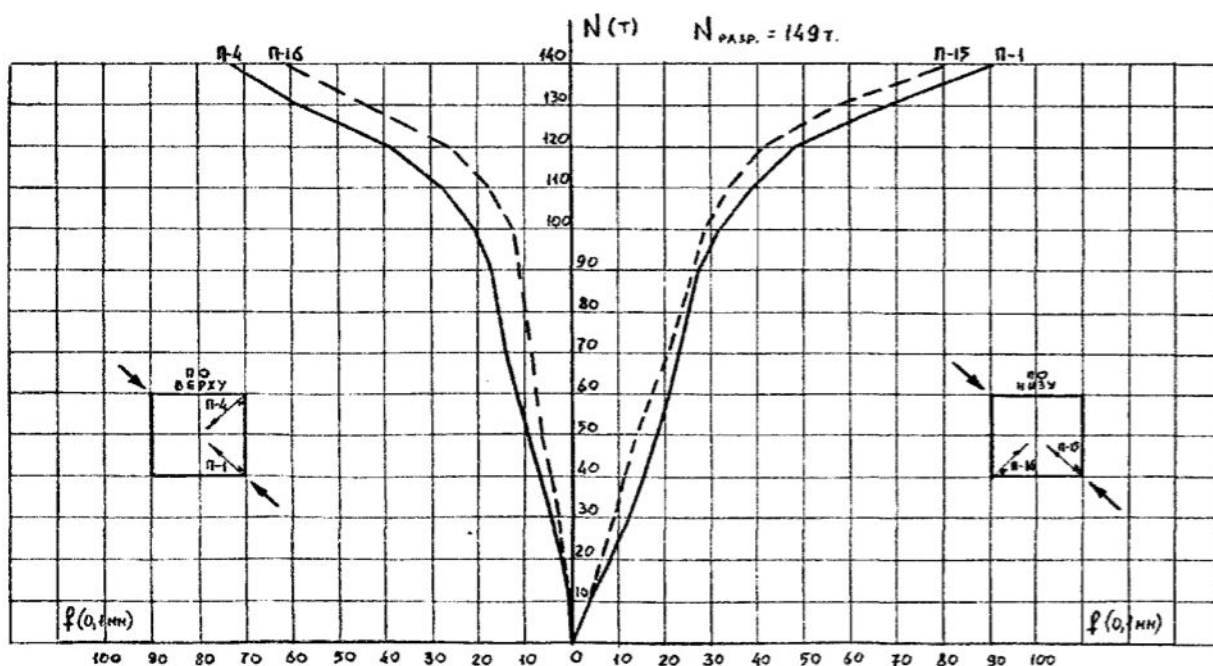


Рис.6.2.2. Зависимость « $N-f$ » по V циклу IV этапа эксперимента.

Результаты расчета методом сосредоточенных деформаций и эксперимента представлены в виде зависимости « $N-f$ » (сжатие, растяжение) диагоналей от внешней нагрузки (рис.6.2.3).

Из графика видно, что до величины  $N$ - 1040 кН – зависимость « $N-f$ » – линейная, начиная с 1040 кН до разрушения  $N$  – 1490 – кН – нелинейная.

В работе [336] предложен практический прием определения коэффициента жесткости связей сдвига в пределах линейной зависимости « $N-f$ ».

Характерной особенностью напряженно-деформированного состояния фрагмента сборного железобетонного перекрытия, при действии диагонально-сжимающей нагрузки, является то, что он находится в условиях двухосного напряженного состояния.

Физическая нелинейность при этом обуславливается изменением (уменьшением) величины секущего модуля упругости шпоночного соединения, бетона плит перекрытий и модуля упругости арматуры по мере возрастания нагрузки (уровня главных напряжений).

Методика учета изменения величины секущего модуля упругости бетона и арматуры в зависимости от уровня главных напряжений приведена в работах [338, 340, 341, 342].

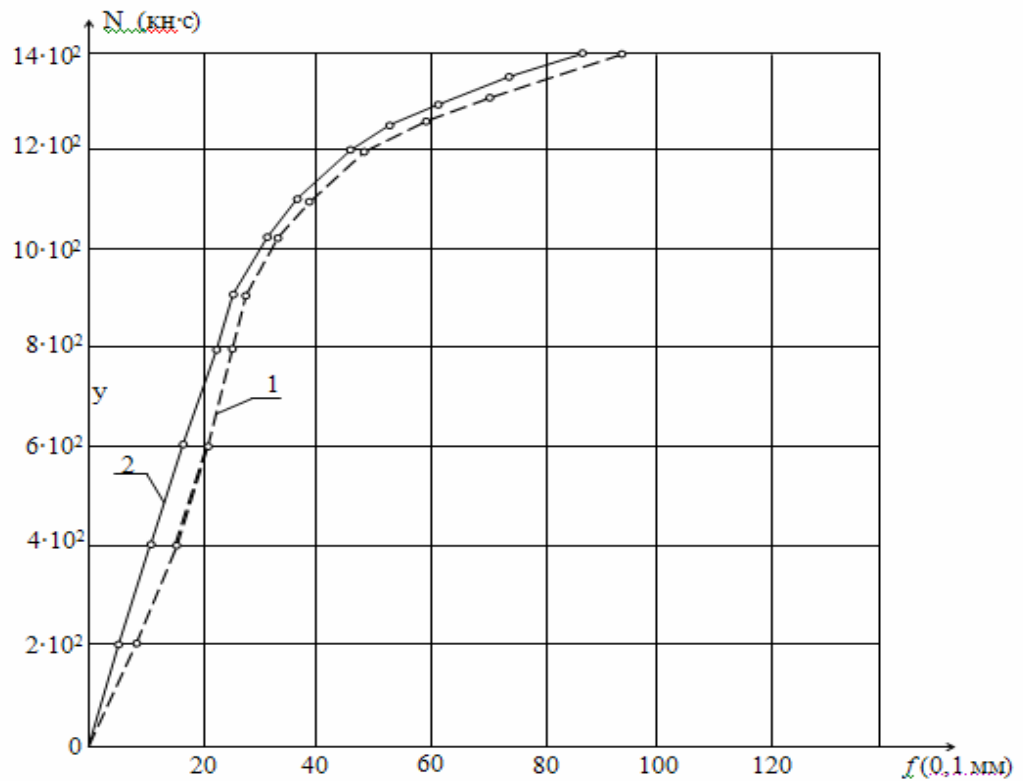


Рис. 6.2.3. График зависимости «N-f». 1-эксперимент; 2 – теория (МСД)

В основу расчета заложены диаграммы деформирования бетона и арматуры в условиях двусосного напряженного состояния в аналитической форме, нормальные сечения представлены в дискретной форме. Статическая неопределенность раскрывается на основе МСД.

Из матричных равенств:

$$\{P\} = [A]\{F\}; \{F\} = [C]\{\lambda\} = [A]^m \{\omega\}$$

получаем

$$\{P\} = [A][C][A]^m \{\omega\} = \{R\}\{\omega\} \quad (6.2.1)$$

здесь -  $\{R\}$  – матрица внешней жесткости;  $\{P\}$  – вектор нагрузок;  $\{\omega\}$  – вектор перемещений;  $\{\lambda\}$  – вектор сосредоточенных деформаций;  $\{F\}$  – вектор внутренних усилий.

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (6.2.1) метода перемещений находим искомые перемещения

$$\{\omega\} = \{P\}[R]^{-1} \quad (6.2.2)$$

Затем записываются соотношения между внутренними усилиями по граням элемента и перемещениями по этим же граням, например для грани «*im*»

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix}_{im} = \begin{bmatrix} C_{11} & O & C_{13} \\ O & C_{22} & O \\ C_{31} & O & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_o \\ \Delta \\ K \end{Bmatrix}_{im} \quad (6.2.3)$$

или сокращенно

$$\{F\} = [C]_{li} \{\lambda\}_{im}$$

где

$$C_{11} = \sum_{j=1}^n D'_{bx,j} A_{b,j} + \sum_{h=1}^m A_{sx,h} (E'_{sx,h} - E'_{bx,h}); \quad (6.2.4)$$

$$C_{13} = \sum_{j=1}^n D'_{bx,j} A_{b,j} + \sum_{h=1}^m A_{sx,h} (E'_{sx,k} - E'_{bx,k}) \gamma_{sk}; \quad (6.2.5)$$

$$C_{22} = \sum_{j=1}^n G'_{bx,j} A_{b,j} + \sum_{h=1}^m A_{sx,h} (G'_{s,k} - G'_{b,h}); \quad (6.2.6)$$

$$C_{33} = \sum_{j=1}^n D'_{bx,j} A_{b,j} \gamma_{bi}^2 + \sum_{h=1}^m A_{sx,h} (E'_{sx,k} - E'_{bx,k}) \gamma_{sk}^2; \quad (6.2.7)$$

В формуле (6.2.4-6.2.7)

$D'_{bxj}$ ,  $G'_{bxj}$  – секущие модули деформаций бетона при сжатии, растяжении и сдвиге направлении оси  $x$ ;

$A_{kl}$  – площадь элементарной бетонной полоски с координатой в сечении «*im*»;

$E_{sxb}$ ,  $D'_{sx,k}$  – секущие модули деформации и сдвига продольной арматуры, определяемые на основе одноосной диаграммы « $\sigma_s$ - $E_s$ » по соотношению  $E'_{x,k} = \gamma_s E_{sx}$ , где  $\gamma_s$  – коэффициент упругих деформаций арматуры, определяемый по [336];  $E_{s,x}$  – начальный модуль упругости арматуры;  $A_{s,x k}$  – площадь продольной арматуры с координатой  $\gamma_{s k}$  – в сечении «*im*». Для остальных граней соотношения записываются аналогично.

Деформированное состояние плоского элемента характеризуется тремя компонентами относительных деформаций  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $j_{xy}$  ( $E_x$ ,  $E_y$  – удлинения,  $j_{xy}$  – угол сдвига). Распределение относительных деформаций по граням  $i$ -го элемента определяется по формуле (6.2.8), например, для грани «*im*».

$$E_x = \{\lambda\}_{im} \{Z_i\} \quad (6.2.8)$$

где  $\{\lambda\}_{im} = (E_o \Delta K)_{im} \{Z_i\} + (1, 0, \gamma_{bi})$ .

Величины главных напряжений  $\sigma_{b1}$ ,  $\sigma_{b2}$ , определяются из известной зависимости.

$$\sigma_{bi,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (6.2.9)$$

где величины  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  могут быть определены из функции напряжений, приведенной в работе [336].

Эпюры распределения нормальных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , касательных  $\tau_{xy}$  и главных напряжений  $\sigma_{b1}$ ,  $\sigma_{b2}$  показаны на рис. 6.2.4 и 6.2.5.

Величины главных относительных деформаций определяются по формуле (6.2.9), заменяя  $\sigma$  на  $E$ ,  $\tau$  – на  $0,5j$  (индексы при этом остаются без изменений).

Связи между напряжениями ( $\sigma_{bn}$ ,  $\sigma_{bl}$ ,  $\tau_{bn,l}$ ) и относительными деформациями ( $E_{bn}$ ,  $E_{bl}$ ,  $j_{nl}$ ) бетона до появления трещин записываются в осях ортотропии  $n, l$  (рис. 6.2.4 и рис. 6.2.5) т.е.

$$\sigma_{bn} = \sigma_{b1}, \sigma_{bl} = \sigma_{b2}, \tau_{bn} = \tau_{bl..2} = 0.$$

или сокращенно

$$\{E\}_n = E^l_b [D_b]_n \cdot \{\sigma_b\}_n = [D^l_b]_n \cdot \{\sigma_b\}_n \quad (6.2.10)$$

В выражении (6.2.10)

$\gamma_{b1}$ ,  $\gamma_{b2}$ ,  $\gamma_{b1,2}$  – коэффициенты изменения секущих модулей деформаций бетона;

$\gamma_{b1} E_b$ ,  $\gamma_{b2} E_b$  – секущие модули бетона по напряжениям  $n$  и  $l$ ;

$\gamma_{b1,2} E_b$  – модуль взаимного влияния;

$\mu_{b1,2}$  – коэффициент поперечной деформации.

В алгоритме нелинейного расчета коэффициенты изменения секущих модулей  $\gamma_{bI}$  ( $I = 1, 2$ ) определяются в зависимости от уровня главных напряжений и схем исчерпания прочности бетонных элементов по работе [338], далее вычисляются секущие модули. Затем производится перерасчет модулей упругости бетона на главных площадях при переходе к исходным осям  $x, y$ , т.е. определяются  $[D_{b,x}]_x$  по формуле:

$$[D_{bx}]_x = [\alpha] [D^l_b]_n \cdot ([\alpha]^r)^{-1} + [E^l_x]_x \quad (6.2.11)$$

где  $[\alpha]$  – матрица преобразования;

$[E_x]$  – матрица секущих модулей продольных деформаций арматуры причем для арматуры диаграмма деформирования « $N-f$ » принимается одноосной.

По вновь определенным секущим модулям деформаций бетона  $E$  и арматуры  $E^l_x$  строится «новая» матрица внутренней жесткости сечения  $[C]$ , внешней жесткости  $[R]$  системы и решается система уравнения (6.2.11).

Дальнейшее решение перечисляет все указанные пункты до тех пор, пока за установленное число итераций не будет достигнута стабилизация

напряженно-деформированного состояния в сечениях и элементах фрагмента перекрытия с требуемой точностью.

По предложенному алгоритму выполнен расчет фрагмента сборного железобетонного перекрытия на диагонально-сжимающую нагрузку методом сосредоточенных деформаций. Разбивка фрагмента перекрытия на элементы выполняется аналогично плоским системам. На рис.6.2.3. показаны деформации сжатой диагонали: эксперимент (1) и теория (2) на разных уровнях загрузки. Как видно из графика, зависимость « $N-f$ » по данным опыта и расчета МСД за пределом пропорциональности хорошо согласуются между собой.

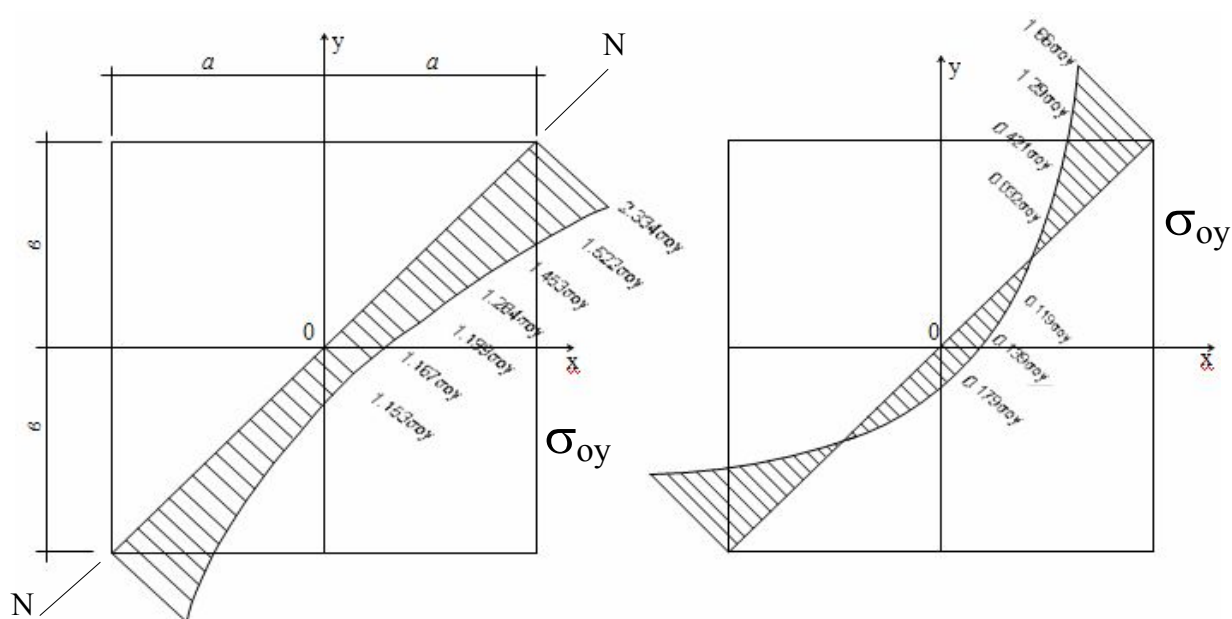


Рис. 6.2.4. Эпюры распределения главных напряжений

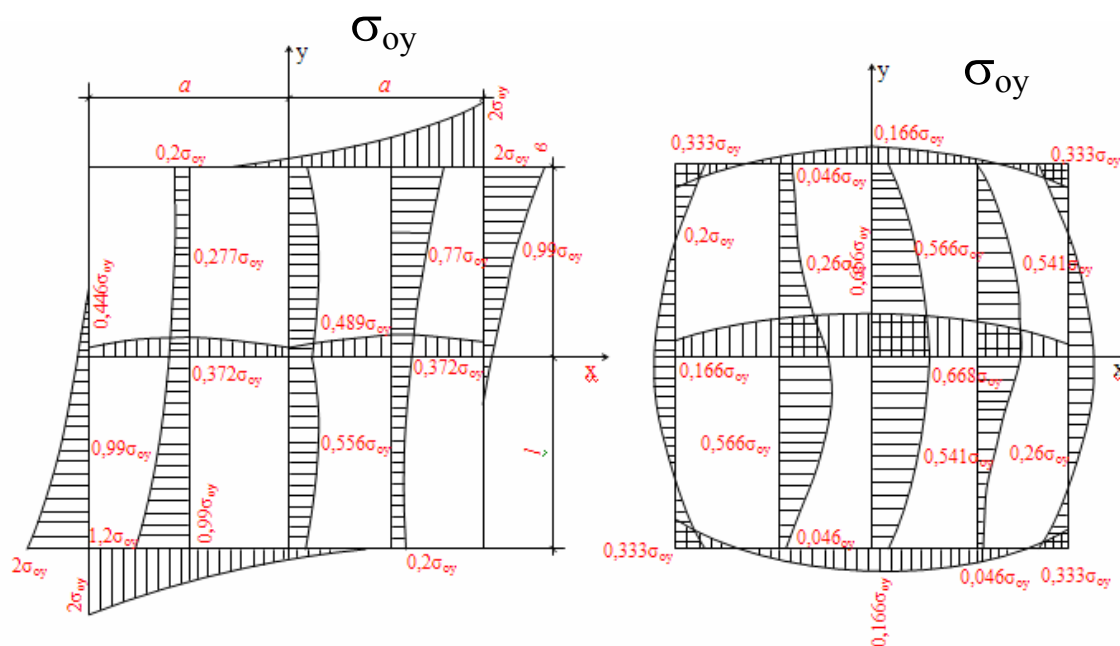


Рис. 6.2.5. Эпюры нормальных ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ) и касательных ( $\tau_{xy}$ ) напряжений



## 6.2. 2. Испытание фрагмента перекрытия по балочной схеме

Испытание фрагмента сборного железобетонного перекрытия размером 9x12 м производилось на действие сосредоточенной нагрузки в середине пролета. Фрагмент перекрытия был целиком смонтирован из натуральных элементов заводского производства и состоял из двух ячеек размером 6x6 м и двух ячеек размером 3x6 м (рис. 6.2.6 а).

Передача горизонтальной нагрузки осуществлялась посредством 200 тонного гидродомкрата, снабженного манометром и ручной насосной станцией. Прогиб середины фрагмента фиксировался с помощью индикаторов в двух точках: в середине верхнего пояса и в середине нижнего пояса диска перекрытия.

График зависимости «N-f» для прогиба середины фрагмента показан на рис. 6.2.6 б. Схема испытания фрагмента перекрытия дана на рис. 6.2.6 а.

Используя зависимости «N-f» для прогиба точек середины фрагмента и «N-f» для сжатой диагонали одной из ячеек фрагмента, можно установить соотношение между условными характеристиками  $G_{\phi}$  и  $E_{\phi}$  сечения данного диска.

На рис. 6.2.6 б, приведен график зависимости «N-f» для сжатой диагонали ячейки перекрытия, из которого следует, что зависимость «N-f» до величины  $N=100$  т линейная.

Теоретические исследования предельных состояний фрагмента междуэтажного перекрытия как горизонтальной диафрагмы жесткости производились дискретным методом. За основу теоретических исследований принята дискретная расчетная модель в форме метода сосредоточенных деформаций [104].

Идея расчетной модели в виде методов сосредоточенных деформаций с учетом реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры состоит в следующем. Плоская система, в данном случае сборное железобетонное перекрытие (рис.6.2.7 а) рассматривается как набор отдельных сборных элементов (колонн, ригелей, панелей), соединенных между собой связями различного типа.

Для каждого  $i$ -го - элемента МСД имеем непрерывное поле жесткостных характеристик:

$$\begin{aligned} C_{1i}(x), x \in [a_{i1}; 0]; \\ C_{2i}(x), x \in [0; a_{i2}]; \\ C_{3i}(y), y \in [b_{i3}; 0]; \\ C_{4i}(y), y \in [0; b_{i4}]. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Чтобы определить среднюю жесткость для всего участка, например, для грани  $a_{ik}$ , воспользуемся средним взвешенным:

$$C_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{i1} / c_{1i} + b_{i3} / c_{3i} + a_{k2} / c_{2k}} \quad (6.2.13)$$

Формула (6.2.13) является универсальной по определению средних жесткостных характеристик сечений в МСД.

Равнодействующие внутренних усилий по грани «*ik*» можно записать

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{31} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & 0 \\ C_{31} & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \Delta \\ K \end{Bmatrix} \quad (6.2.14)$$

или  $\{F\}_{ik} = [C]_{ik} \cdot \{A\}_{ib}$  (6.2.15)

где  $C_{12} = \sum_{j=1}^n D'_{b5} A_{bj} + \sum_{j=1}^m A_{sxx} (E'_{sxx} - E_{hx,k})$ , (6.2.16)

$$C_{22} = \sum_{j=1}^n G'_{b5} A_{bj} + \sum_{j=1}^m A_{sxx} (G'_{sxx} - G_{hx,k}), \quad (6.2.17)$$

$$C_{31} = C_{13} \sum_{j=1}^n D'_{bxj} A_{bj} Y_{bj} + \sum_{j=1}^m A_{sxx} (E'_{sxx} - E_{hx,k}) Y_{xk}, \quad (6.2.18)$$

$$C_{33} = \sum_{j=1}^n D'_{bxj} A_{bj} Y_{bj}^2 + \sum_{k=1}^m A_{sxx} (E'_{sxx} - E_{hx,k}) Y_{xk}^2, \quad (6.2.19)$$

В формулах 6.2.15 - 6.2.19 приняты обозначения  $\{F\}$  - вектор внутренних усилий «*ik*» в сечении «*ik*»;  $[C_{ij}]$  - матрица жесткости этого сечения;  $\{A\}_{ik}$  - вектор соответствующих деформаций, **N, Q, M** - внутренние усилия, действующие в «*ik*»-в сечении;  $C_{11}$  - осевая жесткость нормального сечения «*ik*»;  $C_{13}=C_{31}$  - изгибно-осевая жесткость, выражающая взаимное влияние изгибающего момента  $M_{ik}$  и нормальной продольной силы  $N_{ik}$ ;  $C_{33}$  - изгибная жесткость (в направлении оси *X*);  $C_{22}$  - сдвиговая жесткость сечения «*ik*»;  $\varepsilon_b$  - предельная деформация бетона по оси *X*;  $K$  - кривизна этой же оси;  $\Delta$  - усредненный сдвиг по сечению на уровне этой же оси;

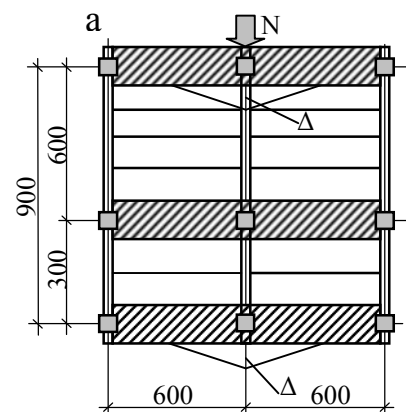
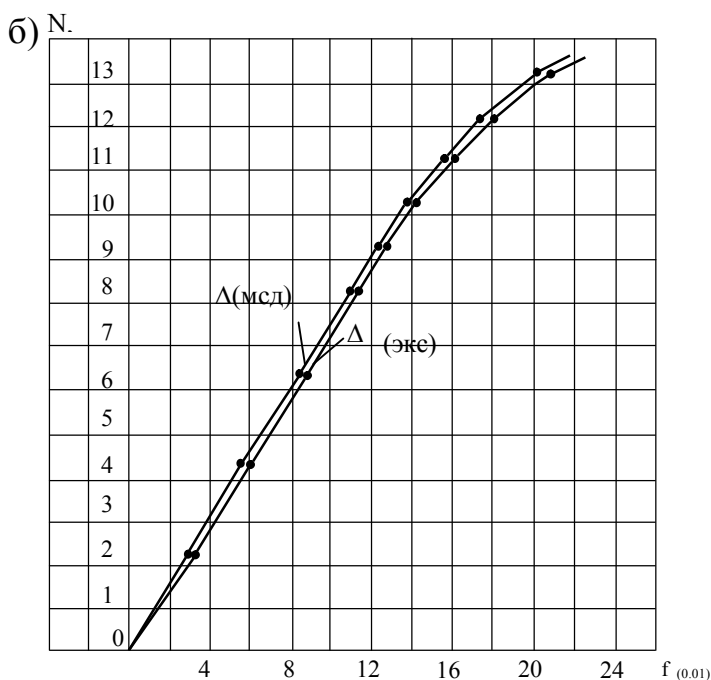


Рис. 6.2.6. Испытание сборного перекрытия размером 9x12 м. а) Схема испытания б) График зависимости N-Δ(экс), N-Δ (мсд)

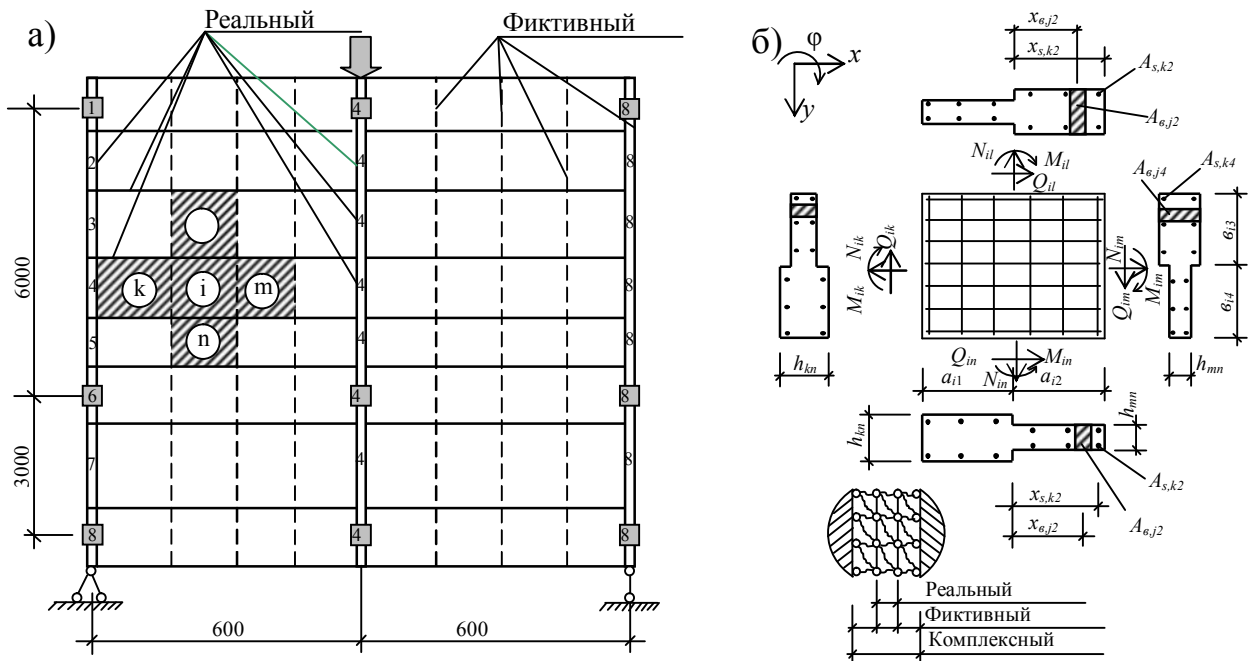


Рис.6.2.7. Расчетная схема сборного перекрытия: а) разбивка на элементы; б) Модель МСД для железобетона при плоском напряженном состоянии

$D''_{hxj}$ ;  $G'_{h,i}$  - секущие модули деформаций и сдвига бетона в направлении оси  $X$ , определяемые далее в случае напряженного состояния методом трансформаций исходных зависимостей « $\sigma_m - \varepsilon_m$ » и критериев прочности по [190];  $A_{bj}$  – площадь элементарной бетонной полоски с координатой  $Y_{bj}$  в сечении « $ik$ »,  $E'G$ , где  $Y$  – коэффициент упругих деформаций арматуры;  $E$  – начальный модуль упругости арматуры;  $A$  - площадь продольной арматуры с координатой  $Y$  в сечении « $ik$ » зависит от характера армирования элементов сборного перекрытия.

Аналогичные выражения для усилий можно записать и для грани « $im$ » « $in$ », « $it$ » по матричной форме записи (6.2.14).

Дальнейшее совершенствование методов расчета железобетонных конструкций связано с прямым учетом в расчетах реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры.

Достоинством предложенных в работе [190] зависимостей является возможность определения относительного значения секущего модуля бетона как в зависимости от уровня главных напряжений, так и от уровня главных относительных деформаций бетона.

Связи между напряжениями и относительными деформациями бетона до появления трещин записываются в осях ортотропии.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ j_{1,2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_b} \begin{bmatrix} 1/\gamma_{b1} Y & \mu_{b1,2}/\gamma_{b1,2} & 0 \\ -\mu_{b1,2}/\gamma_{b1,2} & 1/\gamma_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_{b3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{h1} \\ \delta_{h2} \\ \tau_{1,2} \end{Bmatrix} \quad (6.2.20)$$

или  $\{\varepsilon_b\}_n = [D'_b]_n \{\delta_h\}_n \quad (6.2.21)$

где  $[D'_b]_n$  – матрица секущих модулей деформирования бетона в направлении главных площадок;  $\nu_{b1}, \nu_{b2}, \nu_{b1,2}$  – коэффициенты изменения секущего модуля деформаций бетона  $E_b, V_{b1}, E_b, V_{b2}$  – секущие модули по направлениям  $p, 1$ ;  $\nu_{b,2}E_b$  – модуль взаимного влияния;  $\mu_{b1,2}$  – коэффициент поперечной деформации;  $V_{b3}$  – коэффициент изменения секущего модуля сдвига ( $\nu_{bc}E_b$  – секущий модуль сдвига), где

$$\frac{1}{\nu_{b3}} = \frac{1}{\nu_{b1}} + \frac{1}{\nu_{b2}} + \frac{3\mu_{b1,2}}{\nu_{b1,2}} \quad (6.2.22)$$

В алгоритме нелинейного расчета коэффициенты изменения секущего модуля  $\nu_{ei}$  ( $i = 1, 2$ ) определены в зависимости от уровня напряжений и принимаются  $\nu_{ei} = \nu_{ei} \pm (\nu_{ei} - \hat{\nu}_{bi}) \sqrt{1 - e_{li} \eta_{\sigma_i}}$ . (6.2.23)

Здесь верхний знак (плюс) соответствует восходящей ветви диаграммы, нижний (минус) – нисходящей ветви. Эта последовательность знаков сохраняется и в дальнейшем:  $\eta_{\sigma_i} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i}$  – уровень напряжений ( $0 \leq \mu_i \leq 1$ );  $\hat{\nu}_{bi}$  – значение  $\nu_{bi}$  в вершине диаграммы;  $e_{li} = 2 - 2,05 \hat{\nu}_{bi}$ ;  $e_{li+} e_{2i} = Iv = I$  на восходящей ветви;  $\nu_{bi} = 2,05 \hat{\nu}_{bi}$  – на нисходящей ветви. Изложенная расчетная методика может быть реализована по программе «МСД» для ЭВМ любого класса. Результаты расчетов прогиба перекрытия сведены в табл.6.2.1.

Из табл.6.2.1 видно, что прогибы по дискретному методу сосредоточенных деформаций хорошо подтверждаются с экспериментальными прогибами [336] (рис.6.2.6 б). Разница в результатах не превышает 3... 11 %.

Таблица 6.2.1

Нагрузка в кН	Упругая работа						Нелинейная работа			Коэффициент изменения секущего модуля
	220	440	640	840	940	1040	1140	1240	1340	
Эксперимент, прогиб										
1	0,42	0,7	0,95	1,18	1,3	1,5	1,7	1,83	2,3	
2	0,22	0,5	0,75	1,0	1,15	1,3	1,5	1,81	2,2	
$f_3$ мм (ср.)	0,32	0,6	0,85	1,09	1,23	1,4	1,6	1,8	2,25	
Теоретический прогиб по дискретному методу МСД										
$f_{мсл}$ мм (ср.)	0,2222	0,5791	0,8443	1,1127	1,2452	1,3795	1,54	1,6739	1,992	
8	0,3454	0,6929	1,008	1,3727	1,4802	1,6414	3,08	3,3658	3,6292	$V_{nl}=0,5814$
7	0,3037	0,6175	0,8836	1,1598	1,2978	1,4359	2,3335	2,538	2,7427	$V_{nl}=0,649$
6	0,259	0,6615	0,8168	1,072	1,1996	1,3272	1,6241	1,7666	1,9091	$V_{nl}=0,825$
5	0,2433	0,5287	0,765	1,009	1,1295	1,2496	1,4406	1,5700	1,6937	$V_{nl}=0,874$
4	0,2372	0,5057	0,7656	0,9654	1,0803	1,1953	1,3034	1,3642	1,4907	$V_{nl}=0,966$
3	0,2364	0,4929	0,7164	0,9403	1,0523	1,1642	1,3034	1,3842	1,4907	$V_{nl}=0,966$
2	0,2364	0,4794	0,6973	0,9153	1,024	1,1332	1,2682	1,3794	1,4907	$V_{nl}=0,966$
1	0,2364	0,4654	0,6978	0,9026	1,0902	1,1177	1,2682	1,3794	1,4907	$V_{nl}=0,966$
$\frac{f_3 - f_{мсл}}{f_3}$	3,38	3,48	0,79	-1,83	-1,24	1,46	3,75	7,01	11,47	

### 6.3. Теоретические исследования предельных состояний элементов фрагмента перекрытия при горизонтальном воздействии

Междуэтажные перекрытия современных жилых и общественных каркасно-панельных зданий, обычно монтируются из элементов унифицированного каркаса и имеют общие конструктивные особенности [336].

Оценку напряженно-деформированного состояния указанного междуэтажного перекрытия, как горизонтального диска, можно осуществить, используя дискретно-континуальную или дискретную расчетные модели. Обе указанные расчетные модели имеют известные пределы их рационального применения. Так, например, при решении сложных задач (устойчивость и нелинейное деформирование несущих систем многоэтажных зданий) целесообразнее использовать дискретно-континуальную модель, при исследовании особенностей напряженно-деформированного состояния особых зон междуэтажного перекрытия (узлы, стыки, шпоночные соединения и т.д.) предпочтительнее дискретная расчетная модель как обеспечивающая более высокую точность оценки напряженно-деформированного состояния.

Вместе с тем при определенных условиях обе расчетные модели могут дать значения прогибов в середине пролета, близкие к эксперименту, т.е. максимально точно отразить напряженно-деформированное состояние физического прототипа. Продемонстрируем это на конкретном примере диска перекрытия в виде балки-стенки размером 9 x 12 м с сосредоточенной силой в середине пролета.

В конструктивном отношении сборное железобетонное перекрытие, составленное из элементов унифицированного каркаса или по серии 1.020, представляет собой многопоясную составную балку или ферму, где поясами являются плиты распорки, соединенные между собой сваркой закладных деталей, поперечными связями - ригели перекрытия, а связями сдвига-заполнения ячейки перекрытия, соединенные на шпонках (рис.6.3.1).

В данном случае дискретным считается расположение поясов составной балки, а континуальным - поперечные связи и связи сдвига. Напряженно-деформированное состояние горизонтального диска перекрытия в виде составной балки может быть описано по теории проф. Ржаницына А.Р. [301]. При действии сосредоточенной силы в середине пролета, согласно [301], величины  $T$  и  $\tau$  будут равны:

$$T = \frac{N \cdot v}{\gamma \cdot \Sigma EI} \cdot \left[ \frac{Z}{2} - \frac{sh\lambda \cdot \frac{Z}{2} \cdot sh\lambda Z}{\lambda \cdot sh\lambda Z} \right]; \quad (6.3.1)$$

$$\tau = \frac{T \cdot v}{\gamma \cdot \Sigma EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{sh\lambda \cdot \frac{Z}{2} \cdot ch\lambda Z}{sh\lambda Z} \right]; \quad (6.3.2)$$

Уравнение упругой линии:

$$Y = \frac{N(3 \cdot 1^2 \cdot Z - Z^3)}{12E_0I_0} + \frac{N(\operatorname{sh}\lambda Z - \lambda Z \operatorname{sh}\lambda I)}{2\lambda^3 \cdot ch\lambda I} \cdot \left( \frac{1}{EI_0} - \frac{1}{\Sigma EI} \right) \quad (6.3.3)$$

Прогиб в середине пролета при  $Z = 1$ :

$$Y_{\max} = \frac{N \cdot I^3}{6E_0I_0} + \frac{N(1 - \lambda I)}{2\lambda^3} \cdot \operatorname{tg}\lambda I \left( \frac{1}{E_0I_0} - \frac{1}{\Sigma EI} \right) \quad (6.3.4)$$

Численные значения коэффициента жесткости шва при сдвиге  $\varepsilon$ , как правило, устанавливается экспериментальным путем. Так, например, в работе [336] величины  $\varepsilon$  была определена посредством испытания ячейки перекрытия размером 6 x 6 м на диагонально сжимающую нагрузку и численно составила  $\varepsilon = 49$  МПа.

Результаты вычислений прогибов середины диска перекрытия, как составной балки, приведены в табл. 6.3.1

Таблица 6.3.1

Прогибы середины перекрытия

Прогибы в мм	Нагрузки в кН					
	220	440	640	840	940	1040
$f_0$	0,32	0,60	0,85	1,09	1,23	1,40
$f_{дем.}$	0,302	0,604	0,877	1,15	1,29	1,42
$f_{мед}$	0,2922	0,5791	0,8443	1,1127	1,2452	1,3795
по точкам:						
41	0,3453	0,6929	1,008	1,3727	1,4802	1,6414
42	0,3037	0,6175	0,8836	1,1598	1,2978	1,4359
43	0,2590	0,6615	0,8168	1,072	1,1998	1,3272
44	0,2433	0,5287	0,769	1,009	1,1295	1,2496
45	0,2372	0,5057	0,7656	0,9654	1,0803	1,1953
46	0,2364	0,4229	0,7164	0,9403	1,0523	1,1642
47	0,2364	0,4794	0,6973	0,9153	1,0242	1,1333
48	0,2364	0,4654	0,6878	0,9026	1,0902	1,1177
Разница в % $\frac{f_0 - f_{дем.}}{f_0}$	5,96	-0,66	-3,07	-5,22	-4,65	-1,42
Разница в % $\frac{f_0 - f_{мед}}{f_0}$	9	-3,48	-0,79	-1,83	-1,24	-1,46

где  $f_0$  – экспериментальный прогиб по [336];  $f_{дем}$  – прогиб как составной балки  $f_{мед}$  – прогиб по методу сосредоточенных деформаций.

Универсальные дискретные расчетные модели, нашедшие широкое применение в проектной практике (метод конечных элементов, метод сосредоточенных деформаций и т.д.), обеспечивают, как правило, высокую точность оценки напряженно-деформированного состояния.

Воспользуемся дискретной расчетной моделью в виде метода сосредоточенных деформаций имеющих по отношению к МКЭ в некоторых случаях ряд преимуществ [104, 301].

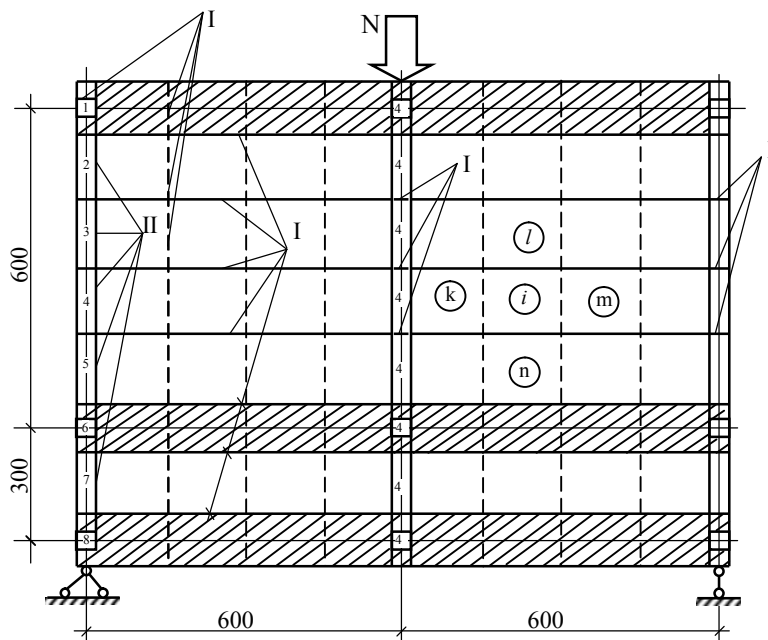


Рис. 6.3.1 Фрагмент перекрытия собранного из типовых элементов многоэтажных каркасных зданий серии 1.020

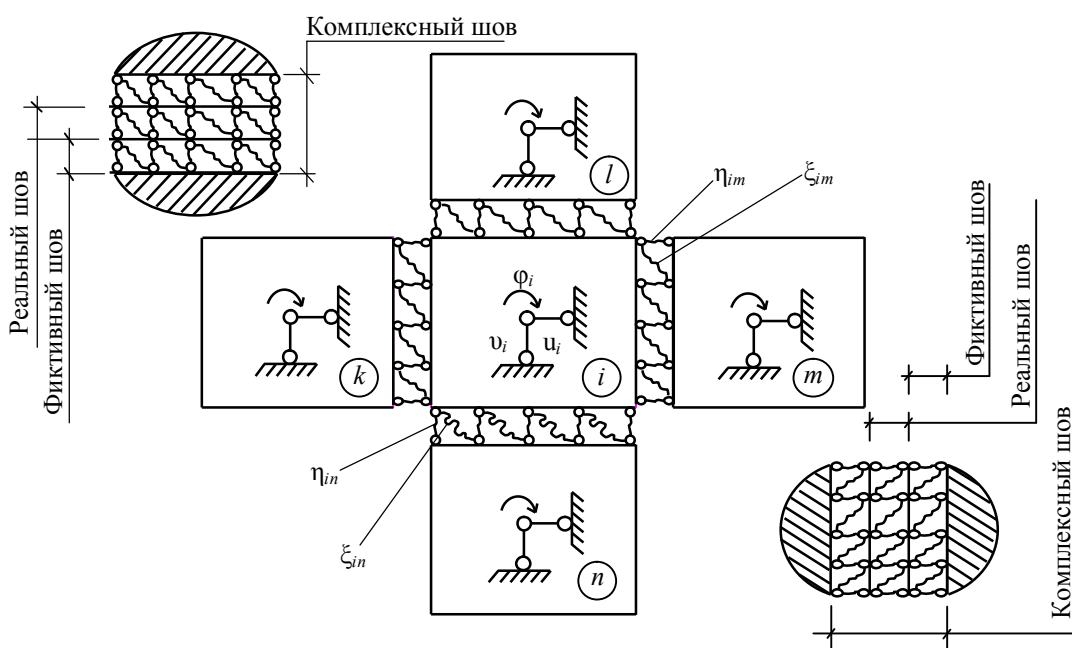


Рис. 6.3.2 Расчетная модель для сборных железобетонных плит перекрытий

Разметка фрагмента перекрытия на конечные элементы типы швов и их нумерация показаны на рис. 6.3.1 и 6.3.2.

В поперечном направлении количество элементов равно  $k_y = 8$ , линии разрезки совпадают с продольными реальными швами между плитами (швы типа II) и фиктивными швами типа 1 – в ригеле. В продольном направлении каждая плита развита на 4 равные части (швы типа 1). В продольных швах между ригелем и торцами плит разрезка проходит по грани колонны (швы типа III). Количество элементов в этом направлении  $k_x = 11$ .

Формулы для определения коэффициентов жесткости фиктивных швов  $i$ -го элемента, реальных швов по результатам эксперимента при сжатии-растяжении, сдвига и повороте приведены в табл. 6.3.2.

Обозначив жесткость реальных швов  $C_{im}^k$  и фиктивных швов  $C_i^\phi$  и  $C_m^\phi$ , в общем случае получим формулу для определенных жесткости комплексных швов как для последовательно соединенных связей (например,  $i$ -го с  $m$ -ным элементов)

$$(C_{im}^k)^{-1} = (C_{im}^g)^{-1} + (C_i^\phi)^{-1} \quad (6.3.5)$$

Решение строится на основе матричных уравнений метода перемещений

Таблица 6.3.2

Тип швов при $E_x=E_y$ $2,68 \cdot 10^5$ кг/см <sup>2</sup> $G_x=G_y=\frac{F_n(V)}{2(1+\mu)}$ ; $\mu=0,2$	Растяжение сжатие кН/м		Поворот		Сдвиг, кН/м	
	$\eta_y$	$\eta_x$	$\omega_y$	$\omega_x$	$\xi_y$	$\xi_x$
По торцу со стороны						
Фиктивные швы типа 1	$a_i(a_{iu})$	$b_i(b_{iu})$	$a_i(a_{iu})$	$b_i(b_{iu})$	$a_i(a_{iu})$	$b_i(b_{iu})$
	$\frac{2E_y \cdot h \cdot a_i}{b_i}$	$\frac{2E_y \cdot h \cdot b_i}{a_i}$	$\frac{2E_y \cdot I_y}{b_i}$	$\frac{2E_x \cdot I_x}{a_i}$	$\frac{4G_y \cdot h a_i}{h_i}$	$\frac{4G_y \cdot h b_i}{a_i}$
Реальные швы типа	$\frac{E_{iu} h_{iu} a_{iu}}{\delta_{iu}}$	$\frac{E_{iu} h_{iu} b_{iu}}{\delta_{iu}}$	$\frac{E_{iu} h_{iu} a_{iu}^3}{12\delta_{iu}}$	$\frac{E_{iu} h_{iu} b_{iu}}{12\delta_{iu}}$	$\frac{G_{iu} h_{iu} a_{iu}}{\delta_{iu}}$	$\frac{E_{iu} h_{iu} a_{iu}}{\delta_{iu}}$
$h_{iu}$ толщина шва $a_{iu}$ длина шва $\delta_{iu}$ толщина шва	1916,04	2597,1	312,9	497,9	744,9	1973,16

Формулы для определения жесткости

$$[R]\{U\}=\{P\}, \quad (6.3.6)$$

где  $[R]$  - матрица внешней жесткости системы;  
 $\{U\}$  - вектор перемещений;



{P} - вектор внешних сил.

Матрицу внешней жесткости [R] получают из общей зависимости

$$[R]=[A]*[C]*[A]^T. \quad (6.3.7)$$

Здесь [A] - матрица, элементами которой являются коэффициенты при внутренних силах в уравнениях равновесия элементов МСД;  $[A]^T$  - матрица, транспонированная с предыдущей; [C] - матрица внутренней жесткости системы, элементы которой соответствуют величинам усилий в плоскостях сосредоточенных деформаций при единичных взаимных смещениях элементов МСД. Вектор нагрузок {P} формируется путем переноса внешних сил в узлы с сохранением условий равновесия.

Итак, все компоненты формулы (6.3.7) известны; после определения матрицы внешней жесткости [R] решается система уравнений (6.3.6) и определяются искомые перемещения - два линейных  $U$  и  $v$  и одно угловое  $\varphi$ .

Вертикальные перемещения  $v$  точек (41-48), лежащих на вертикальной оси симметрии, под действием сосредоточенной силы в середине пролета показаны в табл. 6.3.1.

#### **6.4. Предельные состояния железобетонных плит при длительном действии вертикальной нагрузки**

Нелинейная теория деформирования железобетона с трещинами, в виде методы сосредоточенных деформаций предложенная проф. А.Р.Ржаницыным и развитая доцентом, М.И.Додоновым для железобетонных плит, позволяет определить поле перемещений, установить картину образования и раскрытия трещин для различных стадий его напряженно-деформированного состояния начиная с момента нагружения и кончая разрушением. Указанная теория разработана для случая однократного нагружения кратковременной нагрузкой и численно реализована.

Реализация данной идеи осуществляется шагово-итерационным способом. Изложенные выше нелинейные теории деформирования железобетона позволяют рассчитать железобетонную плиту по первой группе предельных состояний, т.е. по несущей способности, определить величину прогиба и установить ширину раскрытия нормальных трещин при однократном нагружении кратковременной нагрузкой. Вместе с тем согласно требованиям норм проектирования СНиП 2.03.01-84\*, железобетонные плиты, подверженные воздействиям эксплуатационных нагрузок, должны рассчитываться и по второй группе предельных состояний, т.е. по перемещениям и раскрытию трещин с учетом длительного действия нагрузки. При длительном действии нагрузки развиваются деформации ползучести в бетоне сжатой и растянутой зон и тем самым создаются предпосылки для проявления железобетоном нелинейных деформаций и трещинообразования.

Вопросу учета длительности действия нагрузки при расчете изгибаемых железобетонных плит посвящены многие работы. В одних из них [315] ползучесть бетона учитывалась на основе теории упругой наследственности, в других [228] используется теория старения; в третьих [31] - интегральный модуль, в четвертых [4] применяется модуль длительных деформаций. Использование методик расчета, приведенных в вышеназванных

работах, в проектной практике весьма сложно, так как она сводится к решению системы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих переменные коэффициенты.

В связи с этим в данной работе предлагается практический прием учета длительного действия нагрузки при расчете изгибаемых железобетонных плит по второй группе предельных состояний по перемещениям и по раскрытию трещин. Суть работы сводится к определению величины коэффициента упругопластических деформаций бетона  $\nu$ , в зависимости от уровня напряжения в бетоне  $\frac{\sigma_b}{R_b}$ , класса бетона и длительности действия

нагрузки по средним опытным диаграммам  $\sigma_m - \epsilon_m$  приведенным в работе [344], с последующим использованием их в алгоритме расчета (рис.6.4.1 и 6.4.2) [149, 250] в виде отдельной подпрограммы.

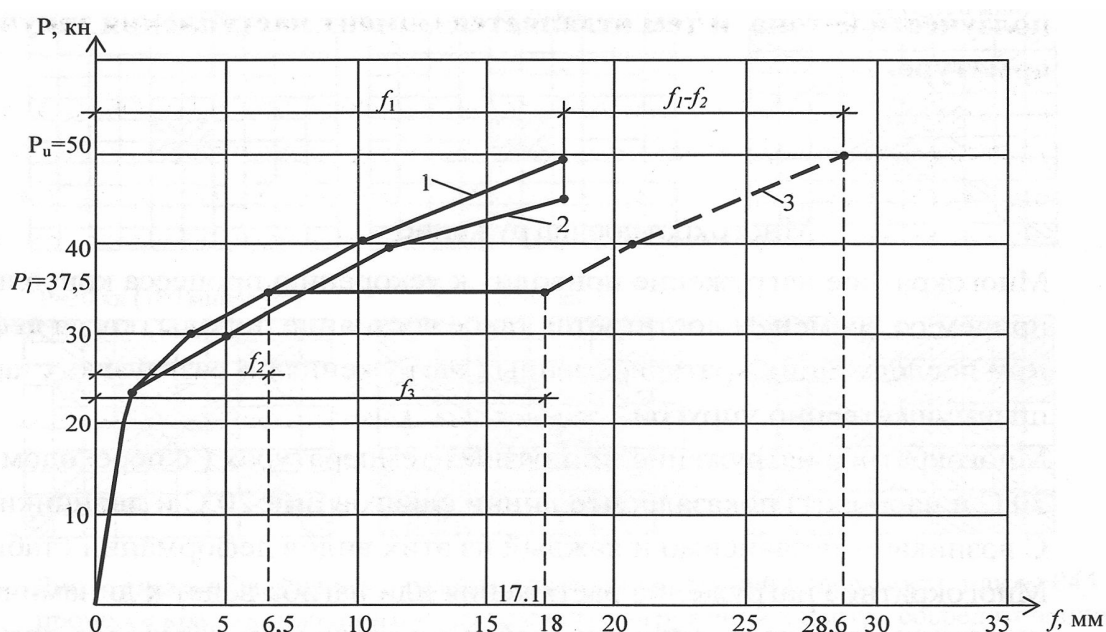


Рис.6.4.1. зависимость нагрузка- прогио для плиты 844: 1- теория и метод конечных элементов, 2- теория и метод конечных разностей, 3 - е учетом длительности внешнего воздействия

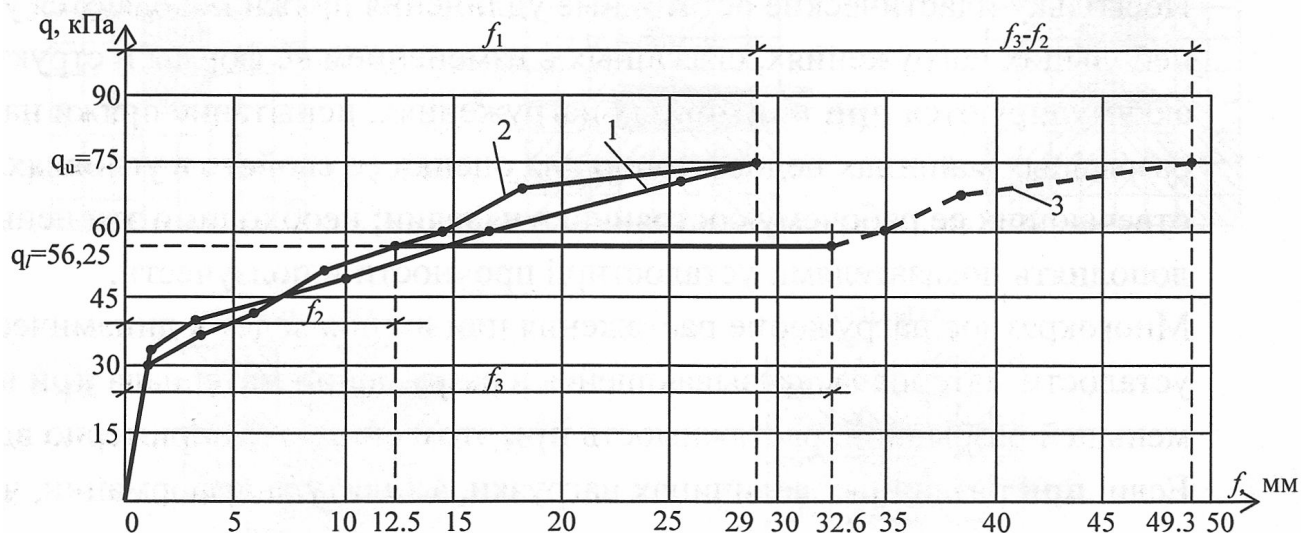


Рис. 6.4.2. Зависимость нагрузка-прогиб для плиты 866: 1- теория и метод конечных разностей; 2- теория и метод конечных элементов; 3- с учетом длительности внешнего воздействия

Укрупненная блок-схема программы автоматизированного расчета на ЭВМ железобетонных плит с трещинами приведена в [149, 250].

Алгоритм нелинейного расчета перемещений железобетонных плит с учетом длительности действия внешней нагрузки, состоит из следующих процедур:

- 1) формирование нелинейной матрицы жесткости  $[K(\{Z\})]$  при кратковременном и длительном нагружении внешней нагрузки;
- 2) установка доли длительно действующей части нагрузки от полной нагрузки;
- 3) вычисления уровня максимальных сжимающих напряжений в бетоне сжатой зоны

по отношению к пределу прочности бетона  $\frac{\sigma_b}{R_b}$ ,

- 4) установление сроков действия длительно действующей нагрузки  $\tau$ ;

5) определение величины коэффициента  $\varphi_c$  учитывающего длительность действия внешней нагрузки используемого в расчетах по второй группе предельных состояний.

Формирование нелинейной матрицы жесткости  $[K(\{Z\})]$  осуществляется на базе нелинейной теории деформирования железобетона [179,250], с использованием шагово-итерационного метода. Уровень нагружения при этом поводится до величины длительно действующей нагрузки. Величина длительно действующей нагрузки, согласно рекомендациям норм проектирования, составляет  $P_e \approx (0,55-0,75)P_a$ . Величина главных сжимающих и растягивающих напряжений в бетоне изгибаемых железобетонных плит вычисляется по известному алгоритму [179]. Сроки действия внешней длительно действующей нагрузки, согласно средним опытными диаграммам  $\sigma_b - \varepsilon_b$  [344], могут изменяться в пределах от  $\tau = 150$  мин до  $\tau = 10$  лет и более.

Величина коэффициента  $\varphi_c$ , учитывающего длительность действия внешней нагрузки, определяется из тех же средних опытных диаграмм  $\sigma_b - \varepsilon_b$  [344], зависимости от уровня максимальных сжимающих напряжений в бетоне

$\frac{\sigma_b}{R_b}$  и времени действия длительно действующей нагрузки  $\tau$ . Так, например, значения

коэффициента  $\varphi_c, \frac{\sigma_b}{R_b} = 0.6$  и различных значениях  $\tau$  приведены в табл.6.4.1

Таблица 6.4.1

$\tau$	150 мин	180 мин	3 дня	28 дней	70 дней	3 года	10 лет	>10 лет
$\varphi_c$	1,0	0,89	0,7	0,60	0,48	0,42	0,395	0,354

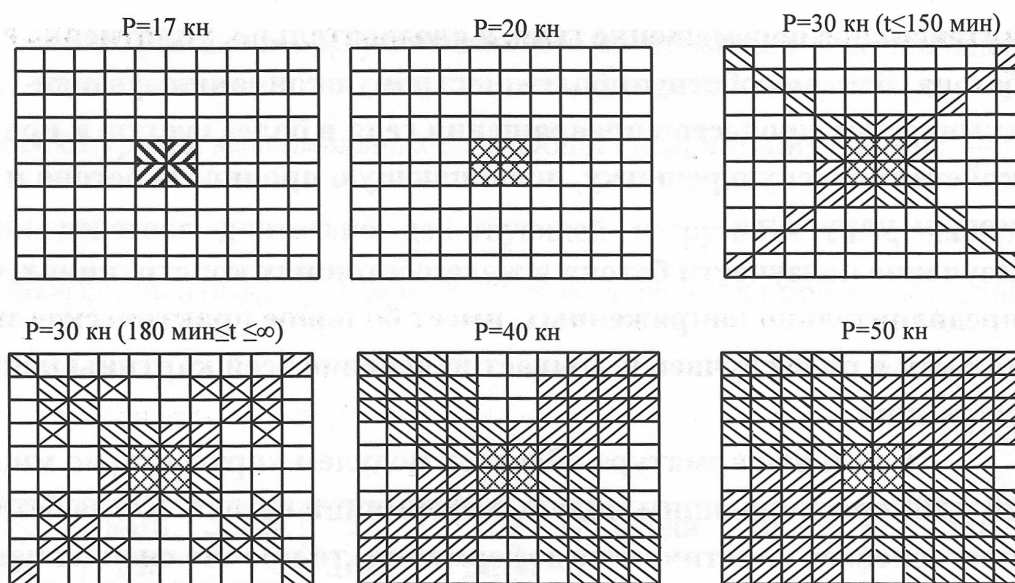
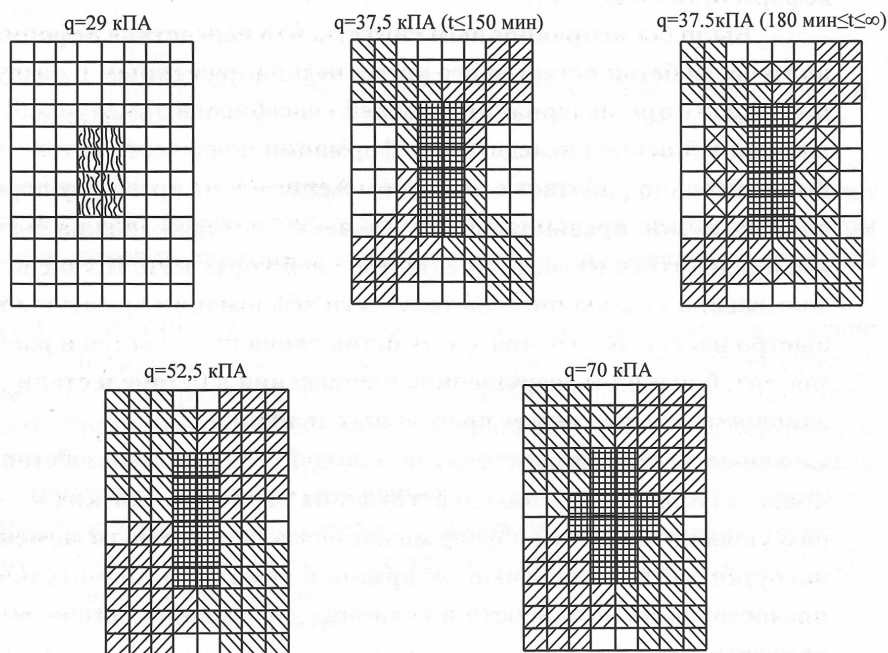


Рис 6.4.3. Схема образования и развития трещин на нижней поверхности плиты 844 в процессе кратковременного и длительного нагружения в центре сосредоточенной нагрузкой (теория),

☒ дополнительные трещины от  $P_c=30$  кН при  $180 \text{ м} \leq \tau \leq a$



**Рис 6.4.4. Схема образования и развития трещин на нижней поверхности плиты 866 в процессе кратковременного и длительного нагружения равномерно распределенной нагрузкой (теория),**

⊗ дополнительные трещины от  $q_c=30$  кПА при  $180 \text{ м} \leq \tau \leq \alpha$

Согласно требованиям норм проектирования СНиП 2.03.01-84\* прогибы обычных железобетонных изгибаемых элементов, к которым предъявляются требования 3-й категории по трещиностойкости, необходимо определять из выражения

$$f = f_1 - f_2 + f_3. \quad (6.4.1)$$

Ниже рассматриваемые схемы задачи: железобетонная плита 844 и железобетонная плита 866, для оценки точности расчетов по МСД, взяты из [179] и [250].

Применительно к указанным задачам величина прогиба  $f_1$  будет вычисляться по алгоритму, приведенному в [149, 250], шаговая итерация при этом будет производиться по приращению нагрузки вплоть до конечной ее величины  $P_n(q_n)$ .

Величина прогиба  $f_2$  от продолжительного действия длительно действующей нагрузки, будет вычисляться по вышеуказанному алгоритму, вплоть до уровня нагружения  $P = P_e (q = q_e)$ . По достижению величины суммарного приращения внешней нагрузки величины  $P_i(q_c)$  - приращение нагрузки прекращается, т.е.  $P_e(q_c) = \text{const}$ . Далее осуществляется выдержка железобетонных плит 844 и 866 под длительной нагрузкой в течение времени от  $t = 180$  мин до  $t = \alpha$ . В период времени выдержки под длительной нагрузкой осуществляется процедура изменения нелинейной матрицы жесткости  $[K(\{Z\})]$  матричного уравнения равновесия

$$[K(\{Z\})] * \{Z\} = \{P\} \quad (6.4.2)$$

путем пошагового изменения времени выдержки железобетонных плит под нагрузкой при  $\tau = 180$  мин,  $\tau = 3$  дня,  $\tau = 28$  дней,  $\tau = 70$  дней,  $\tau = 3$  года,  $\tau = 10$  лет и  $\tau = \alpha$  вследствие снижения величины упругопластического коэффициента бетона  $\nu_e(t)$ .

Аналогичным образом учитывалась длительность действия внешней нагрузки при расчете по образованию и раскрытию трещин изгибаемых железобетонных плит 844 и 866.

После выдержки железобетонных плит под длительной нагрузкой ( $P_c=30$  кН для плиты 844 и  $q_c = 37,5$  КПа для плиты 866), в результате перераспределения напряжений между арматурой и бетоном, после  $\tau = 3$  года, на нижней поверхности плиты образовались дополнительные трещины (конечные элементы, где образовались трещины, обозначены крестиком, см. рис. 6.4.3 и 6.4.4), величина нормального напряжения в арматуре в сечении вновь образованной трещины составила  $\sigma_s = 222,96$  МПа, а ширина раскрытия  $a_{\text{трес}} = 0,8$  мм. После дальнейшей выдержки железобетонной плиты под нагрузкой ширина раскрытия трещины увеличилась с 0,8 мм до 0,92 мм, а величина нормального напряжения в арматуре, в сечении с трещиной, до  $\sigma_s = 256,63$  МПа. В железобетонных плитах 844 и 866 в результате длительности действия внешней нагрузки прогиб середины плиты увеличился соответственно на 58,9 % для плиты 844 и на 70 % для плиты 866.

Сопоставление результатов расчета по плитам 844 и 866 МКЭ и МСД в виде зависимостей  $P-f$ ,  $q-f$  и схемы образования и последовательности развития трещин с учетом длительности действия внешней нагрузки приведены на рис.6.4.1, 6.4.2, 6.4.3 и 6.4.4, которые свидетельствуют о точности результатов расчета полученные МСД.

#### 6.5. Учет длительности действия нагрузки вертикальной при определении прогиба железобетонных изгибаемых элементов

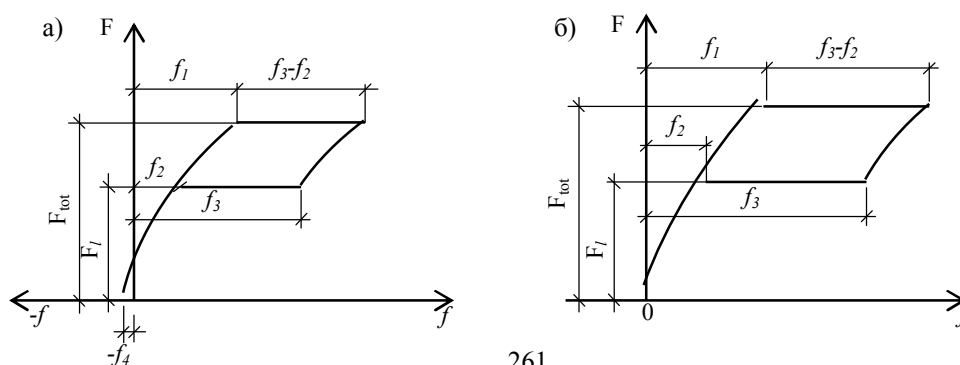
Согласно рекомендациям норм проектирования СНиП 2.03.01-84\* [326] прогиб обычных и предварительно напряженных железобетонных изгибаемых элементов, к которым предъявляют требования 2-й и 3-й категорий по трещиностойкости определяется из выражения

$$f = f_1 - f_2 + f_3 - f_4, \quad (6.5.1)$$

где  $f_1$  - прогиб от непродолжительного действия всей нагрузки;  $f_2$  - прогиб от непродолжительного действия постоянной и длительной нагрузок;  $f_3$  - прогиб от продолжительного действия постоянной и длительной нагрузок;  $f_4$  - выгиб, вызванный ползучестью бетона от обжатия.

Для обычных железобетонных изгибаемых элементов  $f_4 = 0$ .

Графическая интерпретация [326] представится в виде диаграммы зависимости  $F-f$ , рис. 6.5.1.



**Рис. 6.5.1. Диаграмма зависимости  $F-f$ :**  
**а) для предварительно напряженных изгибаемых элементов;**  
**б) для обычных изгибаемых элементов**

При этом нормы проектирования СНиП 2.03.01-84\* рекомендуют прогибы  $f_1$  и  $f_2$  вычислять при значениях  $\psi_s$  и  $\nu$ , отвечающих кратковременному действию нагрузки, а прогиб  $f_j$  - при значениях  $\psi_s$  и  $\nu$ , отвечающих длительному действию нагрузки.

Неравномерность краевых деформаций бетона сжатой зоны по длине изгибаемого элемента характеризуется коэффициентом  $\psi_s$  и, согласно рекомендациям тех же норм проектирования принимают равным 0,9 как при длительном, так и при кратковременном действии нагрузки.

Коэффициент упругопластических деформаций бетона  $\nu$ , учитывающих развитие неупругих деформаций в бетоне согласно опытным данным, зависит от ряда факторов, основными из которых являются:

1) характер и скорость внешнего воздействия (кратковременное, длительное или многократно-повторное);

2) уровень напряжений в бетоне  $\frac{\sigma_b}{R_b}$

3) длительность действия нагрузки  $\tau$ ;

4) класс бетона и его возраст.

Аналитическое выражение для коэффициента упругопластических деформаций бетона  $\nu$  можно представить в виде

$$\nu = \frac{\varepsilon_e}{[\varepsilon_e + \varepsilon (t \sigma_e / R_e)]}, \quad (6.5.2)$$

где  $\varepsilon_e$  - величина упругой деформации бетона;  $\varepsilon_{pc}$  - величина пластической деформации бетона;  $\frac{\sigma_b}{R_b}$  - уровень напряжения в бетоне;  $\tau$  - длительность действия нагрузки.

Вместе с тем, величина коэффициента упругопластических деформаций  $\nu$ , по рекомендациям СНиП 2.03.01-84\*, при непродолжительном действии всей нагрузки и непродолжительном действии постоянной и длительной нагрузок принимает одно и то же значение, равное 0,45, т.е. не зависит от уровня напряжения  $\frac{\sigma_b}{R_b}$ , что противоречит опытным данным. Кроме того коэффициент упругопластических деформаций  $\nu$ , согласно тем же СНиП, при непродолжительном действии постоянной и длительной нагрузок принимает значение, равное (0,1...0,15) в зависимости от условий эксплуатации и не зависит от продолжительности действия длительно действующей части

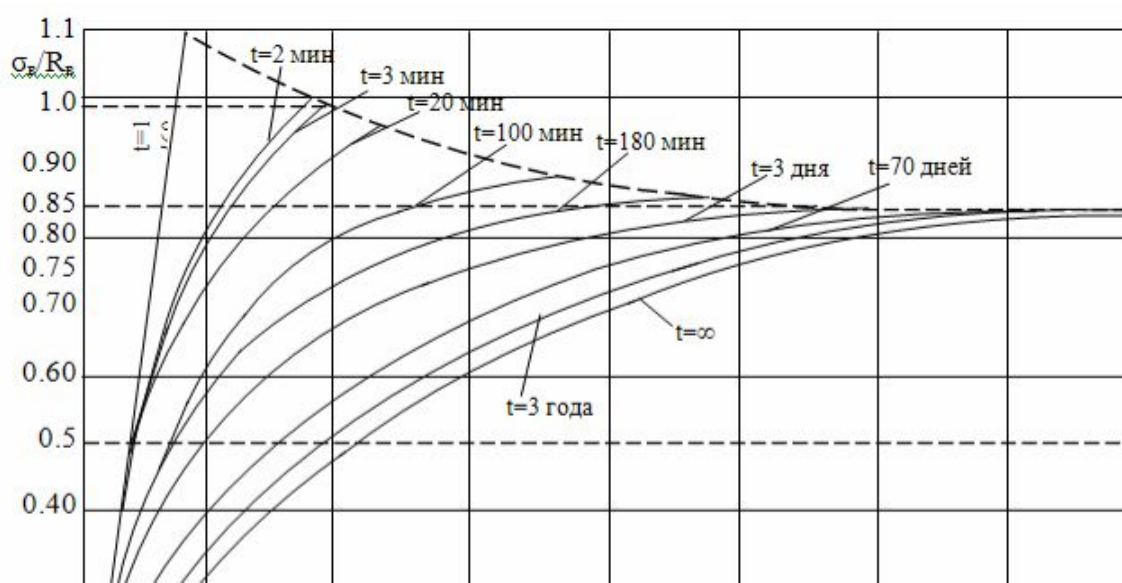
нагрузки, уровня напряжения  $\frac{\sigma_b}{R_b}$ , что так же не соответствует опытным данным.

Вышеизложенные несоответствия между рекомендациями СНиП 2.03.01-84\* и опытными данными могут быть устранены, если воспользоваться средними опытными диаграммами  $\sigma_b - \epsilon_b$  при различной длительности загрузки бетона, приведенными на рис.6.5.2, согласно [18]. Для подтверждения вышеизложенных доводов обратимся к табл. 6.5.1.

Из табл. 6.5.1 видно, что при кратковременном нагружении и изменении уровня напряжения в бетоне  $\frac{\sigma_b}{R_b}$  от 0,7 до 1,0 величина коэффициента в упругопластических деформаций  $\nu$ , согласно диаграммам  $\sigma_b - \epsilon_b$  изменяется в пределах от 0,84 до 0,45, тогда как по рекомендациям СНиП 2.03.01-84\* величина  $\nu$  принимается равной 0,45.

Таблица 6.5.1

Уровень напряжения в бетоне $\sigma_b/R_b$	Значения $\nu_b$ ,								
	При кратковременном нагружении ( $\tau = 3$ мин)		При длительном нагружении согласно диаграмме $\sigma_b - \epsilon_b$ и $\tau$ , равном						по СНиП
	по СНиП 2.03.01-84*	согласно диаграмме $\sigma_b - \epsilon_b$	100 мин	180 мин	3 дня	70 дней	3 года	$\alpha$	$\alpha$
0,7	0,45	0,84	0,43	0,35	0,26	0,18	0,157	0,143	0,15-0,1
0,75	0,45	0,74	0,586	0,28	0,21	0,159	0,142	0,129	0,15-0,1
0,8	0,45	0,67	0,336	0,24	0,173	0,131	0,121	0,12	0,15-0,1
0,85	0,45	0,60	0,278	0,177	0,122	0,115	0,110	0,1	0,15-0,1
0,9	0,45	0,55	-	-	-	-	-	-	-
1,0	0,45	0,45	-	-	-	-	-	-	-





**Рис.6.5.2. Диаграммы  $\sigma_b - \varepsilon_b$  при различной длительности загрузки бетона**

При длительном загрузении, согласно данным табл.6.5.1, величина коэффициента упругопластических деформаций  $\nu$  изменяется в пределах от 0,43 до 0,1 и зависит как от продолжительности действия нагрузки, так и от уровня напряжений в бетоне. Вместе с тем нормы проектирования СНиП 2.03.01-84\* рекомендуют при продолжительном действии постоянных и длительных нагрузок величину  $\nu$  принимать равной (0,1-0,15) независимо от продолжительности действия нагрузки и уровня напряжений в бетоне.

#### **6.6. Выводы по главе**

1. При загрузении нагрузки трещины в плитах перекрытий достигли контрольной ширины раскрытия трещин для плиты  $a_T=0,25$  мм при нагрузке  $1880 \text{ кгс/м}^2$ , что превышает контрольную нагрузку по трещиностойкости, равную  $1003 \text{ кгс/м}^2$  в 1,87 раз, контрольный прогиб, равный 6,1 мм, достигал при нагрузке  $1240 \text{ кгс/м}^2$ , что превышает контрольную нагрузку по жесткости, равную  $879 \text{ кгс/м}^2$ , в 1,4 раза. Разрушающая нагрузка фрагмента составила 2035

кгс/м<sup>2</sup>, что больше в 1,6 раза контрольной нагрузки на плиту, равной 1307 кгс/м<sup>2</sup>, что свидетельствует о высокой несущей способности плит перекрытий.

2. С увеличением нагрузки ригель одновременно с прогибом смещается относительно своей оси вследствие распора плит перекрытий, влияние этого распора увеличивается с появлением трещин в швах между ригелем и плитами перекрытий. При упругой работе конструкций на каждом этапе смещение увеличивалось от 0,005 мм до 0,025 мм, то с появлением трещин эта величина увеличивалась от 0,012 мм до 0,096 мм. Кроме того влияние распора вызывает закручивание ригеля вокруг оси, это особенно заметно по распространению трещин с внутренней и наружной сторон ригеля. Если с внутренней стороны в середине пролета трещины по высоте достигали половины высоты полки ригеля и равнялись 15 см, то эти же трещины с наружной стороны достигли только уровня растянутой арматуры.

3. Перемещения фрагмента из собранного железобетонного межэтажного перекрытия, вычисленные как для составной балки с двумя поясами по методу сосредоточенных деформаций (МСД), и по теории составных стержней хорошо подтверждаются экспериментом. При сопоставлении разность результатов не превышает от 1 до 6 % для составной балки, а от 1 до 9 % - для метода сосредоточенных деформаций.

4. По предложенному алгоритму выполнен расчет ячейки сборных железобетонных перекрытий на диагонально-сжимающую нагрузку методом сосредоточенных деформаций. Сопоставление деформаций полученных экспериментом с расчетом - сжатой диагонали на разных уровнях загрузки, в зависимости «*N-f*» хорошо согласуются между собой.

5. При определении прогиба обычных и преднапряженных изгибаемых элементов, к которым предъявляют требования 2-й и 3-й категорий по трещиностойкости, величину коэффициента упругопластических деформаций бетона  $\nu$  необходимо определять по средним опытным диаграммам.

6. С помощью средних опытных диаграмм  $\sigma_b - \epsilon_b$  можно произвести учет предыдущих загрузений, что явится исходной информацией при проведении обследования несущих систем многоэтажных зданий и сооружений из железобетона с целью установления величины остаточного ресурса по несущей способности и пригодности к нормальной эксплуатации.

## О С Н О В Н Ы Е    В Ы В О Д Ы

1. В результате литературного анализа, патентного поиска и обобщения накопленного опыта научно обоснована и решена проблема дальнейшего совершенствования и развития конструктивных форм и методов расчета железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий и их элементов, перспективностью которой является разработка расчетных

моделей, основанных на современном представлении о нелинейном деформировании железобетона с применением вычислительной техники.

2. На основе разработанных дискретных расчетных моделей для железобетонных сечений, стержней, стержневых систем, плоско напряженных и изгибаемых плитных конструкций в несущих системах многоэтажных зданий выявлены особенности работы железобетонных конструкций с учетом длительности внешнего воздействия нагрузок, обуславливающих нелинейность и упругопластическое поведение связей между сборными железобетонными элементами.

3. На основе результатов экспериментально-теоретических исследований автора с учетом ранее имеющихся теоретических положений разработан метод сосредоточенных деформаций (МСД), относящийся к разряду дискретных и близкий к методу конечных элементов (МКЭ), отличающийся простотой формирования разрешающих уравнений при реализации на вычислительной технике.

При расчетах железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий получены зависимости для элементов матриц внешней жесткости стержневых и плоскостных систем, что исключает операции перемножения матриц. Это крайне целесообразно при нелинейных расчетах, связанных с многократной корректировкой матриц жесткости, обусловленных итерационными процессами.

4. С учетом деформирования расчетной схемы при расчете элементов несущих систем многоэтажных зданий предложен способ корректировки вектора внешних сил, состоящий в добавлении к нему узловых изгибающих моментов. Корректировку вектора внешних сил рекомендовано выполнять в едином цикле с корректировкой матриц внешней жесткости без изменения структуры разрешающих уравнений.

5. Для расчета прочности нормальных сечений статически определимых железобетонных стержневых элементов в нелинейной постановке при любых поперечных формах и схемах приложения внешних сил целесообразно использовать предложенные одноосные диаграммы деформирования бетона и арматуры при различной длительности нагружения, включая нисходящие ветви. Проверку прочности нормальных сечений можно вести сразу по известному (заданному) вектору внешних сил, минуя поэтапное его увеличение.

6. Установлено, что плосконапряженные железобетонные элементы несущих систем многоэтажных зданий с учетом нелинейной работы бетона и арматуры в конструкциях, а также соединений между сборными элементами достаточно просто и надежно можно рассчитывать по методу сосредоточенных деформаций (МСД). Принятие гипотезы плоских сечений в пределах каждого элемента и возможность изменения жесткостных характеристик материалов в МСД позволяют принимать эти элементы значительно крупнее, чем в методе конечных элементов.

7. При расчетах железобетонных элементов междуэтажных перекрытий на внешние воздействия следует учитывать одновременно изгибающее и

плосконапряженное состояния, для чего на основе МСД разработаны элементы с шестью степенями свободы. Полученные расчетные формулы для изгибаемых железобетонных плитных элементов междуэтажных перекрытий могут рассматриваться как наиболее общие, из них, как частные случаи, можно получать решения для стержневых и плосконапряженных элементов несущих систем.

8. Разработанные и предложенные методика и алгоритм расчета позволяют использовать реальные диаграммы деформирования материалов, учитывают нелинейность и неравномерность развития нормальных и касательных напряжений по высоте сечения элементов, обусловленные условиями опирания их в стесненных условиях, т.е. наличием эффекта от распора.

Расчетная модель в виде МСД учитывает влияние фактора длительного действия внешней нагрузки на пространственную работу фрагментов междуэтажного перекрытия, смонтированных из типовых элементов многоэтажных каркасных зданий, и позволяет оценить их напряженно-деформированное состояние при любом уровне загрузки.

9. Анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований пространственной работы сборных железобетонных плит перекрытий, опертых по контуру, в монолитных зданиях и фрагментов сборного железобетонного перекрытия, смонтированного из типовых элементов многоэтажных каркасных зданий, показывает, что эти конструкции обладают значительными резервами по несущей способности и пригодности к нормальной эксплуатации.

10. Экономическая эффективность результатов исследована, очевидна и подтверждена реализацией разработанных нормативных документов, способствующих сокращению затрат и сроков на проектирование и строительство зданий на 30 %.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

**экспертной комиссии диссертационного Совета Д 05.12.006 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) наук при Кыргызском Государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н.Исанова и Кыргызском - Российском Славянском университете им. Б.Н.Ельцина по диссертации Зулпуева Абдивапа Момуновича на тему: «Теория сосредоточенных деформаций в расчетах несущих конструкций многоэтажных зданий», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности: 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения».**

Комиссия в составе:

Председатель - Кутуев Мухамедали Дадиевич доктор технических наук, профессор.

Члены комиссии: Курдюмова Валентина Мифадьевна доктор технических наук, профессор и Семенов Владимир Сергеевич доктор технических наук, профессор.

Рассмотрев представленную соискателем Зулпуева А.М. докторскую диссертацию на тему: «Теория сосредоточенных деформаций в расчетах несущих конструкций многоэтажных зданий», по специальности: 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения», пришла к следующему заключению:

**1. Соответствие работы специальности, по которой дано право диссертационному Совету проводить защиту.**

Представленная Зулпуева А.М. докторская диссертация на тему: «Теория сосредоточенных деформаций в расчетах несущих конструкций многоэтажных зданий», соответствует профилю диссертационного Совета Д 05.12.006.

Диссертационная работа состоит из введения, 6 глав, основных выводов, списка использованной литературы и приложений. Общий объем диссертационной работы составляет 305 страниц компьютерного текста (без приложений), в том числе: 110 рисунков, 82 таблиц, библиографии из 402 наименований. Основное содержание работы изложено в трех монографиях, опубликовано в 31 работах, важнейшие из них помещены в списке литературы.

Комиссия отмечает следующие основные научные результаты диссертационной работы: В работе разработан метод сосредоточенных деформаций для расчёта железобетонных стержневых и плоскостных конструкций несущих систем в многоэтажных зданиях, учитывающий реальные диаграммы нелинейного деформирования бетона и арматуры, при различных длительностях загрузки. Получены матрицы жёсткости для железобетонных конструкций при различных видах напряжённо-деформированного состояния и составлены алгоритмы расчётов на вычислительной технике. Сопоставлены данные расчётов различных элементов несущих систем по методу сосредоточенных деформаций с результатами, полученными экспериментально и другими расчётными методами. А также сформирована расчетная модель, учитывающие влияние фактора длительного действия внешней нагрузки на пространственную работу фрагментов междуэтажного перекрытия, смонтированных из сборных натуральных элементов многоэтажных каркасных зданий, и позволяющий оценить их напряженно-деформированное состояние при любом уровне загрузки, что в полной мере отвечает паспорту 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения».

**Целью данной работы** является развитие теории упругих сосредоточенных деформаций проф. А.Р. Ржаницына и разработка на ее основе дискретных расчётных моделей для расчета несущих систем многоэтажных зданий, возведенных из железобетона; составление алгоритмов и программ для ЭВМ; проведение экспериментальных исследований на фрагментах из натуральных железобетонных элементов для решения вопроса о достоверности полученных результатов расчета по предлагаемым методам расчета.

Для достижения и реализации поставленной цели определены и решены следующие основные задачи:

- разработан и развит метод сосредоточенных деформаций (МСД) для расчёта железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий,

который позволяет получить реальную картину напряжённо-деформированного состояния железобетонных элементов на всех уровнях загрузки, вплоть до разрушения;

- получены формулы и матриц жесткости сечений для железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, учитывающие реальные диаграммы деформирования железобетона при различных длительностях загрузки, обеспечивающие существенное сокращение объема программы за счёт исключения процедур перемножения матриц в процессе итерационных расчётов;

- предложен и проверен метод учёта деформирования расчётной схемы сооружения, введением дополнительного вектора узловых нагрузок, в основное матричное уравнение метода перемещений, при этом совмещаются процедуры учёта нелинейности, т.е. реальных диаграмм деформирования железобетона при различных длительностях загрузки.

-разработана методика расчета и алгоритмы программы для вычислительной техники по расчёту железобетонных сечений и стержней; плоско и изгибнонапряжённых плит перекрытий опертых по контуру; сборных железобетонных элементов междуэтажных перекрытий как пространственно-деформируемых систем позволяющих при решении задач различной сложности выполнять сопоставления результатов расчетов по методу сосредоточенных деформаций с экспериментальными данными или результатами полученными другими расчётными методами;

- предложена расчетная модель, учитывающая влияние длительности действия внешней нагрузки на напряженно-деформированное состояние несущих элементов многоэтажных зданий, которая позволяет оценить их напряженно-деформированное состояние при любом уровне загрузки.

**Объект исследования.** В качестве объекта исследования рассматриваются расчет фрагментов железобетонных стержневых и плоскостных конструкции несущих систем многоэтажных зданий на основе метода сосредоточенных деформаций, а также учет влияние фактора длительности действия внешней нагрузки на напряженно-деформированное состояние несущих элементов многоэтажных зданий, которая позволяющей оценить их напряженно-деформированное состояние при любом уровне загрузки. Это соответствует требованиям к исследованию по специальностям 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения»

**2. Актуальность работы.** Прогнозы на будущее показывают, что концентрация населения вокруг мегополисов является закономерным, объективным и глобальным процессом, связанным с ростом народонаселения и развитием производительных сил.

Разумеется, что в условиях природной ограниченности земли и всё возрастающей её стоимости, города не могут безгранично расплзаться вширь, они растут, и будут расти вверх за счёт повышения этажности жилых, гражданских и общественных зданий.

С ростом этажности, здания становятся сложными и ответственными сооружениями. Об их ответственности говорит тот факт, что в жилом или

административном высотном здании одновременно пребывают тысячи людей, жизнь и благополучие которых непосредственно зависят от знания и умения проектировщиков и строителей, осуществляющих эти сооружения.

Несущие системы современных железобетонных многоэтажных зданий образуются из стержневых и плоскостных элементов, общее число которых может составлять многие сотни и тысячи. Надежная работа отдельных элементов и их совокупности должна быть обеспечена расчётом на все нагрузки и воздействия в стадии изготовления, монтажа и эксплуатации.

В этих расчётах наиболее ответственным этапом является построение расчётных моделей для отдельных элементов несущих систем в целом. Расчётная модель должна наиболее адекватно отражать свойства моделируемого элемента несущей системы, с другой стороны, расчётная модель должна быть проста и легко реализуема с применением вычислительных средств.

**Тенденции дальнейшего совершенствования железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий требуют соединения в расчётных моделях теории нелинейного деформирования железобетона с методами строительной механики и вычислительной техники, для получения исчерпывающих и достоверных сведений о напряженно-деформированном состоянии в элементах и соединениях, несущих системах в целом. Поэтому могут быть запроектированы и осуществлены на практике экономичные и надёжные конструктивные решения многоэтажных зданий.**

На основании выше изложенного, можно заключить, что научное исследование, проведенное соискателем, представляется весьма актуальным, своевременным и перспективным.

### **3. Научные результаты.**

В работе представлены следующие новые научно обоснованные теоретические результаты, которых имеет важное значение в расчетах железобетонных конструкции несущих систем многоэтажных зданий, по специальности 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения»:

**Результат 1.** Автором развит метода сосредоточенных деформаций

(МСД) для расчёта стержневых, плосконапряжённых и изгибаемых железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, учитывающий реальные диаграммы нелинейного деформирования бетона и арматуры при различных длительностях нагружения.

**Результат 2.** Автором разработан методы получения матриц жёсткости для железобетонных конструкций при различных видах напряжённо-деформированного состояния и длительностях нагружения, обеспечивающие общность и методическое единство в решении расчётных задач различных типов.

**Результат 3.** Автором получены данные экспериментальных исследований фрагментов железобетонных перекрытий из натуральных элементов на вертикальные и горизонтальные воздействия, отражающие реальные условия работы конструкции в системе зданий.

**Результат 4.** Автором получены данные расчётов на вычислительной технике учитывающие реальные диаграммы деформирования бетона и арматуры различных элементов несущих систем по методу сосредоточенных деформаций (МСД) и результаты их сопоставлений с данными натуральных экспериментов и другими расчётными методами.

**Результат 5.** Диссертантом предложена новая расчетная модель, учитывающая влияние податливости связи между отдельными сборными железобетонными элементами на общее напряженно-деформированное состояние системы в целом и дающая реальную их картину при любом уровне загрузки.

**Результат 6.** Автором разработан по результатам исследований нормативный документ «Руководство по применению программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных деформаций», (Госархитекстрой г.Бишкек 2007г.) и «Рекомендации по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами», (Госархитекстрой РУз г.Ташкент 2007г.).

**4. Степень обоснованности и достоверности каждого результата (научного положения), выводов и заключения соискателя, сформулированных в диссертации.**

Научные результаты, положения и выводы, полученные диссертантом, обоснованы сопоставлением полученных данных с результатами других авторов, использованием при проведении экспериментов современной аттестованной измерительной аппаратуры и апробированных методик, сравнением экспериментальных данных, полученных в результате модельных и натуральных исследований железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий.

Мнение об обоснованности и достоверности каждого научного положения, сформулированного в диссертации, по специальности 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения»:

**Результат 1** обоснован анализом теоретических подходов и расчетного обоснования в области строительной механики для расчета применительно к железобетонным конструкциям, а также с применением физических и геометрических нелинейности для получения аналитических зависимостей. Достоверность результата подтверждается натурными и модельными экспериментами.

**Результат 2** обосновывается хорошим соответствием при сравнении с теоретическими и экспериментальными данными. Достоверность обуславливается прослеживанием аналогии с полученными ранее зависимостями М.И. Додонова и другим авторов.

**Результат 3.** Обоснованность и достоверность 3-го результата подтверждается результатами исследований и внедрением в производство усовершенствованных железобетонных конструкций в многоэтажных зданий.

**Результат 4** обоснован теоретический подход с применением вычислительные техники для расчета железобетонных конструкции несущих систем многоэтажных зданий, с учетом реальных диаграммы деформирования



бетона и арматуры, при различных длительностях загрузки. Достоверность результата подтверждается другими теоретическими и экспериментами данными.

**Результат 5** обоснован и подтвержден теоретического результата нового расчетного модели, учитывающая влияние податливости связи между отдельными сборными железобетонными элементами на общее напряженно-деформированное состояние системы в целом и дающая реальную их картину при любом уровне загрузки, экспериментально.

**Результат 6** можно считать обоснованным и достоверным, поскольку руководство и рекомендации разработаны на основе всесторонних исследований с использованием научно обоснованных методик экспериментальных и теоретических исследований. Разработанные руководство и рекомендации приняты проектными институтами и эксплуатационными организациями.

Отдельно проведем анализ обоснованности и достоверности выводов, сформулированных в Заключение диссертации Зулпуева А.М.

**Выводы первый, второй и третий** сделаны на основе подробного анализа большого количества научных литературных и проектных источников, натуральных экспериментальных исследований. В них автор вскрывает проблемы дальнейшего совершенствования и развития конструктивных форм и методов расчета железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий. Все три вывода могут считаться обоснованными и достоверными.

**Вывод четвертый, пятый, шестой, седьмой, восьмой, девятый и десятый** сделан на основе собственных теоретических и экспериментальных исследований с использованием приемов математического анализа, что делает достоверным и вполне обоснованными. А также достоверность исследований подтверждается применением при проведении экспериментов аттестованной аппаратурой и методов математической статистики при обработке эксперимента и обоснованность выводов подтверждается использованием разработанных руководство и рекомендаций проектными институтами и эксплуатационными организациями.

**Вывод одиннадцатый** обоснован и достоверен по результатам сопоставление теоретических и экспериментальных данных, приведенных в диссертации.

**5. Степень новизны каждого научного результата (положения), выводов и заключения соискателя, сформулированных в диссертации.**

По специальности 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения»:

**Результаты 1 и 2** можно считать новыми, поскольку они впервые получены автором диссертации в результате теоретических исследований.

**Результаты 3, 4, 5 и 6** является новыми, что подтверждается теоретическими и экспериментальными исследованиями, а также свидетельствующий о впервые разработанных руководство и рекомендаций по расчету и проектированию усовершенствованных железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий, по применению

программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных деформаций.

Оценка новизны выводов, сформулированных в Заключении диссертации Зулпуева А.М.

**Выводы первый, второй и третий** позволили вскрыть проблемы дальнейшего совершенствования и развития конструктивных форм и методов расчета железобетонных конструкций несущих систем многоэтажных зданий. Это является новыми.

**Вывод четвертый, пятый, шестой, седьмой, восьмой, девятый и десятый** можно считать новыми, так как они впервые сформулированы по результатам натурных экспериментов и теоретических исследований. А также автором сделан теоретический подход с применением вычислительные техники для расчета конструкции несущих систем многоэтажных зданий, с учетом реальных диаграммы деформирования бетона и арматуры, при различных длительностях загрузки, по методу сосредоточенных деформаций.

**Вывод одиннадцатый** впервые получен в данной диссертации на основе результатов теоретических и экспериментальных исследований. Его можно считать новым.

**6. Оценка внутреннего единства и направленности полученных результатов на решение соответствующей актуальной проблемы, теоретической и прикладной задачи.**

Научные положения диссертации Зулпуева А.М. представляют собой результат комплексного исследования проблем дальнейшего совершенствования и развития конструктивных форм и методов расчета железобетонных конструкций несущих систем в многоэтажных зданий. Результаты подтверждены теоретическими и экспериментальными (натурными и модельными) исследованиями существующих и предложенных по методу сосредоточенных деформаций, а также внедрением в производство и проектных институтах. Полученные результаты взаимосвязаны, рекомендации по расчету, проектированию и эксплуатации построены на выверенных теоретических положениях. Предлагаемая работа является одной из первых попыток создания научно-обоснованных теоретических исследований для расчета железобетонных конструкций несущих систем в многоэтажных зданий, с учетом реальных диаграммы физического и геометрического нелинейного деформирования бетона и арматуры, при различных длительностях загрузки, по методу сосредоточенных деформаций. Она способствует решению комплексной проблемы для расчета строительных конструкций, в многоэтажных зданий и сооружений.

Диссертация содержит ряд новых научных результатов и положений по данной проблеме, имеющих внутреннее единство, что свидетельствует о личном вкладе автора в строительную науку. Предложенные новые методы для расчета железобетонных конструкций несущих систем в многоэтажных зданий, с учетом реальных диаграммы нелинейного деформирования бетона и арматуры, при различных длительностях загрузки, по методу

сосредоточенных деформаций, достаточно аргументированы и обоснованы автором диссертации.

### **7. Практическая значимость полученных результатов.**

Следующие научные результаты, полученные в докторской диссертации Зулпуева А.М. были реализованы:

- результаты теоретических положений по развитию методики расчета по методу сосредоточенных деформаций и разработанные на их основе пакет прикладных программ для расчета железобетонных стержневых и плоскостных конструкций используются с 2004 года в Ошском филиале Кыргызского научно-исследовательского проектного института по архитектуре и градостроительству и Главном управлении архитектуры и строительства в южном регионе Кыргызской республики, ОАО «Промпроект» и ОАО «Кыргызгипрострой» города Бишкек.

- с 2006 года включены в учебный процесс строительно-технологического факультета КГУСТА им. Н.Исанова, инженерно-строительного факультета Ошского технологического университета для специальностей «Промышленное и гражданское строительство», «Автомобильные дороги и аэродромы» и «Экспертиза и управление недвижимостью». Предложенная методика расчета с пакетом прикладных программ для расчета железобетонных конструкций используется при выполнении курсового и дипломного проекта, в научно-исследовательской работе студентов и применена при выполнении госбюджетных и хоздоговорных научно-исследовательских работ.

- с 2000 года, предложенный пакет прикладных программ используется в ООО «Ферганагражданпроект» для расчета сборных железобетонных плит перекрытий. В 2007 году в Госархитекстрой РУз внедрены рекомендации по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами для проектного института ЗАО «УзЛИТТИ».

- с КыргызНИИП сейсмостойкого строительства при Госагент-архитекстрой Кыргызской Республики в 2007 году внедрено «Руководство по применению программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных деформаций».

Материалы диссертации использованы в следующих материалах и разработках:

- **Зулпуев А.М.** Основы метода сосредоточенных деформаций в расчете железобетонных стержневых и плоскостных конструкций в многоэтажных зданиях. //Фергана, Изд-во ФерПИ «Техника», 2004 г. 203 с.

- **Зулпуев А.М.** Исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных распорных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами. // Бишкек. Изд-во «Илим», 2010 г. 80 с.

- **Зулпуев А.М.** Теория сосредоточенных деформаций в прикладных задачах. //Додонов М.И., Темикеев К. Часть I. - Бишкек, Изд-во «Илим», 2012 г. 250 с.

- **Зулпуев А.М.** Руководство по применению программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных

деформаций. //Кыргыз НИИП сейсмического строительства. – Бишкек. ИЦ «Техник». 2007 г. 16 с.

- **Зулпуев А.М.** Рекомендации по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами. //Госархитекстрой РУз. – Ташкент. Изд-во ФерПИ «Техника», 2007. 16 с.

## **8. Подтверждение опубликования основных положений, результатов и выводов диссертации.**

Содержание диссертации отражено в следующих публикациях автора:

1. **Зулпуев А.М.** Основы метода сосредоточенных деформаций в расчете железобетонных стержневых и плоскостных конструкций в многоэтажных зданиях. //Монография. – Ташкент: ФерПИ «Техника», 2004. - 203 с.

2. **Зулпуев А.М.** Исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных распорных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами. //Монография. – Бишкек. Изд-во «Илим», 2010. –80 с.

3. **Зулпуев А.М.** Теория сосредоточенных деформаций в прикладных задачах. //Додонов М.И., Темикеев К.//монография. – Бишкек Изд-во «Илим», 2012 г. – 250с.

4. **Зулпуев А.М.** Экспериментальные исследования сборных плоских плит с распором. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 4, 2003. - Фергана. – 2003. - С. 61-64.

5. **Зулпуев А.М.** Расчет балочных плит и плит перекрытий, опертых по контуру по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии. № 2, 2004. - Фергана. - 2004. - С. 64-68.

6. **Зулпуев А.М.** Метод сосредоточенных деформаций для расчета сборных железобетонных распорных плит перекрытий. //Султанов У. //Научно-технический журнал. № 7-8/2004. – Ходжент. - 2004. - С. 43-53.

7. **Зулпуев А.М.** Влияние распора на работу статических неопределимых систем. //Научно-технический журнал «Известия». ОшТУ. № 1, 2005. – Ош. - 2005. - С. 23-25.

8. **Зулпуев А.М.** Расчет по раскрытию трещин, нормальных к продольной оси элемента. Научно-технический журнал, СамГАСИ, № 2, 2005. – Самарканд. - 2005. - С. 7-9.

9. **Зулпуев А.М.** Программа «DIRAR» для расчета плит перекрытий на действие кратковременной нагрузки. //Научный журнал «Вестник». ОшГУ. № 2, 2005. - Ош. - 2005. - С. 99-101.

10. **Зулпуев А.М.** Расчет стержней и стержневых систем по методу сосредоточенных деформаций. //Додонов М.И. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 1, 2005. - Фергана. - 2005. - С. 86-88.

11. **Зулпуев А.М.** Расчет изгибаемых плитных элементов и систем из них с учетом нелинейной работы по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический и производственный журнал «Бетон и железобетон». № 2, 2005. - Москва. - 2005 – С. 14-17.

12. **Зулпуев А.М.** Расчет сборных железобетонных плит перекрытий, опертых по контуру, в монолитных многоэтажных зданиях, по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал «Известия» ОшТУ № 4, 2005. - Ош. - 2005. - С. 31-37.

13. **Зулпуев А.М.** Сборные железобетонные плиты перекрытий, опертые по контуру в монолитных многоэтажных зданиях. //Научно-технический журнал. ФерПИ. № 3.,2006. – Ташкент. - 2006. - С. 36-39.

14. **Зулпуев А.М.** Экспериментальное исследование сборных железобетонных плит перекрытий на натурных образцах. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 4, 2006. - Фергана. - 2006. - С. 57-60.

15. **Зулпуев А.М.** Учет граничных условий и реальных связей в расчете изгибаемых плитных систем по методу сосредоточенных деформаций. //Юлдашев О.Р.//Научно-технический журнал «Вестник». ТашГТУ. № 1, 2006. – Ташкент. - 2006. - С. 136-139.

16. **Зулпуев А.М.** Построение аппроксимирующей зависимости «Напряжение-деформация» для бетона. //Научно-технический и производ-ственный журнал «Бетон и железобетон» № 2, 2006. - Москва. - 2006. - С. 9-11.

17. **Зулпуев А.М.** Расчет железобетонных плоскостных конструкций на основе дискретных моделей. //Республиканский научно-технический журнал «Наука и новые технологии». № 7-8. 2006. - Бишкек. - 2006. - С. 142-143.

18. **Зулпуев А.М.** Особенности методики испытаний фрагмента монолитного многоэтажного здания кратковременной и длительной нагрузкой. //Сенин Н.И., Салпагаров Ж.//Республиканский научно-теоретический журнал «Наука и новые технологии». – Бишкек. – 2009. № 8. 2009. - С. 29-32.

19. **Зулпуев А.М.** Определение элементов матрицы внешней жесткости с учетом единичных перемещений для упругого стержня. //Республиканский научно-теоретический журнал «Наука и новые технологии». Бишкек. №10. 2009. с.24-28.

20. **Зулпуев А.М.** Расчет стержней деформированной схемы по методу сосредоточенных деформаций.//Республиканский научно-теоретический журнал «Наука и новые технологии». Бишкек. №10. 2009. с.18-21.

21. **Зулпуев А.М.** Расчет плоско-напряженных систем в упругой стадии работы. //Научный журнал «Вестник» ОшМУ. № 3. 2010. - Ош. – 2010. - С. 244-247.

22. **Зулпуев А.М.** Сопротивление сборных железобетонных перекрытий в каркасных зданиях деформированию из плоскости при горизонтальных нагрузках. //Научный журнал «Вестник» ОшМУ. № 3. 2010. – Ош. – 2010. - С. 247-250.

23. **Зулпуев А.М.** Расчет плит перекрытий, армированных стальным профилированным настилом по методу предельного равновесия. //Научно-периодическое издание «Вестник» КГУСТА им. Н. Исанова.№ 1 (27). – Бишкек. – 2010. – С. 113-117.

24. **Зулпуев А.М.** Расчет по методу сосредоточенных деформаций железобетонных плоскостных конструкций и систем из них. //Научно-периодическое издание «Вестник» КГУСТА им. Н. Исанова.№ 1 (27). –Бишкек. – 2010. – С. 117-123.

25. **Зулпуев А.М.** Расчет железобетонных плоскостных конструкций на основе дискретных моделей.//Теоретический и прикладной научно-технический журнал «Известия» КГТУ им. И. Раззакова. №21. – Бишкек. – 2010. – С. 89-92.

26. **Зулпуев А.М.** Расчет перемещений балочной изгибаемой плиты и построение аппроксимирующей зависимости "М – κ". //Теоретический и прикладной научно-технический журнал «Известия» КГТУ им. И. Раззакова. №21. – Бишкек. – 2010. – С. 92-94.

27. **Зулпуев А.М.** Матричные соотношения между усилиями и перемещениями для симметричных поперечных сечений упругого стержня.//Республиканский научно-теоретический журнал «Известия ВУЗов» №5. 2010. Бишкек. с. 3-5.

28. **Зулпуев А.М.** Определение внутренних усилий граничных условий в методе сосредоточенных деформаций.//Республиканский научно-теоретический журнал «Известия ВУЗов» №5. 2010. Бишкек. с. 10-13.

29. **Зулпуев А.М.** Экспериментально-теоретическое исследование предельных состояний сборных железобетонных перекрытий при вертикальном и горизонтальном воздействии.//Темикеев К.//Научно-технический журнал «Известия». ОшГУ. № 1, 2012. – Ош. - 2012. - С. 120-125.

30. **Зулпуев А.М.** Руководство по применению программы DIRAR для нелинейного расчета железобетонных конструкций методом сосредоточенных деформаций //Кыргыз НИИП сейсмического строительства. – Бишкек. ИЦ «Техник». 2007 г. 16 с.

31.**Зулпуев А.М.** Рекомендации по проектированию сборных железобетонных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами //Госархитекстрой РУз. – Ташкент. Изд-во ФерПИ «Техника», 2007. 16 с.

#### **9. Соответствие автореферата содержанию диссертации.**

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации, поставленной в ней цели и задачам исследования. Автореферат имеет резюме на русском, кыргызском и английском языках.

#### **10. Обоснованность предложения о назначении ведущей организации, официальных оппонентов.**

Комиссия диссертационного Совета Д 05.12.006 предлагает по докторской диссертации Зулпуева А.М. назначить:

- в качестве ведущей организации «Ташкентский архитектурно-строительный институт», где работает доктора технических наук, профессор Абдурашидов К.С. по специальности 05.23.01. (Адрес: ин. 100000, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Навои – 13).

- официальным оппонентом – доктора технических наук, профессора **Беспаева А.А.** (специальность по автореферату - 05.23.01), который имеет труды, касающиеся проблемы исследования:

1. Беспаев А.А.

2. Беспаев А.А.

(Казакский научно-исследовательский и проектно-экспериментальный институт сейсмостойкого строительства и архитектуры (**КАЗНИИССА**), Агентства РК по делам строительства и жилищно-коммунального хозяйства), адрес: ин. 050046, Казакстан, г. Алма-Ата, ул. Солодовникова – 21, к.32).

- официальным оппонентом – доктора технических наук, профессора **Байтурсунова Дияса Мадиевича** (специальность по автореферату - 05.23.01), который имеет труды, касающиеся проблемы исследования:

1. Байтурсунов Д.М.

2. Байтурсунов Д.М.

(Казакская головная архитектурно-строительная академия, адрес: ин. 050043, Казакстан, г. Алма-Ата, ул. Рыскулбекова – 28).

- официальным оппонентом – доктора технических наук, профессора **Ашрабова Анвара Аббасовича** (специальность по автореферату - 05.23.01), который имеет труды, касающиеся проблемы исследования:

1. Ашрабов А.А. О некоторых новых методах и моделях механики железобетона с трещинами. //Научно-технический журнал Узбекистана. - Ташкент. – 2010. - № 2. – С.46-52.

2. Ашрабов А.А., Д. Джаяпрокаш. Оценка прочности железобетонных элементов, усиленных внешним армированием на углепластиковой основе. //Научно-технический журнал «Вестник» ТАДИ. -Ташкент. - 2011. - № 1. – С. 67-72. (Ташкентский автомобильно-дорожный институт, адрес: 100060, Узбекистан, г. Ташкент, прос. Амира Темира - 20).

Комиссия, рассмотрев представленные документы, рекомендует диссертационному Совету Д 05.12.006 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) наук при Кыргызском Государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н.Исанова и Кыргызском - Российском Славянском университете им. Б.Н.Ельцина принять к защите докторскую диссертацию Зулпуева Абдивапа Момуновича на тему: «Теория сосредоточенных деформаций в расчетах несущих конструкций многоэтажных зданий», по специальности: 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения».

**Председатель комиссии:**

д.т.н., профессор

**М.Д. Кутуев**

**Члены экспертной комиссии:**

д.т.н., профессор

**В.М. Курдюмова**

д.т.н., профессор

**В.С. Семенов**

**Подписи членов комиссии заверяю:**

Ученый секретарь диссертационного  
Совета 05.12.006,

к.т.н., доцент

**Л.В. Ильченко**

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аграновский В.Д., Л. Ишак В.И., Соколов М.Е. Экспериментальные исследования перемычек бескаркасных зданий при перекосе. В кн.: монолитное домостроение. Сб.трудов /ЦНИИЭПжилища. - М., - 1979. - С. 12-29.
2. Александров А.В., Шапошников Н.Н, и др. Расчетная модель многоэтажного здания на основе метода конечных элементов и некоторые результаты ее применения. - В кн.: Сборные многоэтажные здания. - М., - 1976. - С. 51-58. (Труды/ III Международный симпозиум S-41 МСС и Объединенного комитета по высотным зданиям, публикация 43).
3. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы.-М,-Стройиздат-1983-488 с.
4. Александров А.В. Дискретная модель для расчета ортотропных пластин и оболочек //Тр. ин-та. МИИТ.-1971.-№364.-С.3-10.
5. Анг А.Г.С., Ньюмак Н.М. Численный метод расчета неразрезных плит. Сб.статей "Расчет строительных конструкций с применением электронных машин", перевод с англ. Под ред. А.Ф.Смирнова. Стройиздат. - 1967. - С. 13-18.
6. Адыракаева Г.Д. Прочность и перемещения плосконапряженных железобетонных конструкций. Автореф. дисс.канд.техн.наук.-М.1989. 18 с.
7. Аншин Л.З. Расчет вертикальных диафрагм многоэтажных каркасных зданий. // Строительство и архитектура. – Москва. – 1969. - № 3. – С .24-25.
8. Архитектура гражданских и промышленных зданий. - Москва. Стройиздат. – 1983. - т. 3. - 239 с. (Жилые здания. Л.Б. Великовский, А.С. Ильяшев, Т.Г. Маклакова и др.).
9. Байков В.Н. Расчет изгибаемых элементов с учетом экспериментальных зависимостей между напряжениями и деформациями для бетона и высокопрочной арматуры. //Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. - 1981. - № 5. - С. 26-31.
10. Байков В.Н., Додонов М.И., Набатников А.М., Кириллин Б.И.. Вероятностная оценка ширины раскрытия трещин в железобетонных конструкциях. //Бетон и железобетон. - 1973. - № 10. - С. 31-32.
11. Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С., Фролов А.К., Мухамедиев Т.А., Кунижев В.Х.. Общий случай расчета прочности железобетонных



- элементов по нормальным сечениям. //Бетон и железобетон.-1987. -№ 5.- С.16-18
12. Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С., Фролов А.К., Мухамедиев Т.А., Кунижев В.Х.. Расчет прочности косовнецентренно сжатых элементов. Сб. тр. ВНИИГ. - Ленинград. - 1987. – С. 20-26.
  13. Байков В.Н., Мадатян С.А., Дудолодо Л.С., Митасов В.М. Об уточнении аналитических зависимостей диаграммы растяжения арматурных сталей.- Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1983. - № 9. – С. 22-25.
  14. Байрамуков С.Х. Влияние смешанного армирования на выносливость нормальных сечений изгибаемых элементов. // Бетон и железобетон. - 1999. - № 6. - С. 14 – 16.
  15. Байков В.Н., Горбатов С.В., Димитров З.А. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей. - Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1977. - № 6.- С. 15-18.
  16. Байков В.Н., Рахманов А.А., Базоев Д.К. Значения коэффициента  $\psi_a$  и  $\psi_\delta$  для напряженно-деформированного состояния элементов и их природа. //Совершенствование методов расчета и исследования новых типов железобетонных конструкций. - Л., - 1981. - С. 7-14.
  17. Байков В.Н., Сапрыкин В.Ф. Несущая способность изгибаемых элементов с большим содержанием высокопрочной арматуры при учете неупругих свойств бетона и арматуры. - Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1981. - № 7. - С. 20-26.
  18. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс. Учебник для вузов. - 4-е изд., перераб. - М.: Стройиздат. - 1985. - 728 с.
  19. Байков В.Н., Фролов А.К. Анализ деформируемости узловых соединений ригелей с колоннами. //Бетон и железобетон. -1978. - № 2. - С. 26-28.
  20. Балан Т.А. Модель деформирования бетона при кратковременном многоосном нагружении. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. - № 4. – С. 32-36.
  21. Бачинский В.Я., Бамбура А.Н. К расчету гибких железобетонных элементов. //Бетон и железобетон. – 1980. - № 9. – С. 20-24.
  22. Бачинский В.Я., Бамбура А.Н., Ватагин С.С. Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии. // Бетон и железобетон. - 1984. – № 10. - С.18-19.
  23. Бачинский В.Я., Манискевич Е.С. Прочность и устойчивость железобетонных рам //Несущая способность и деформативность железобетонных конструкций. - Киев: Вища Школа. - 1978. – С. 3 – 11.
  24. Бамбура А.Н. К совершенствованию методов расчета железобетонных конструкций // Матер. Международная научная конференция «Новые методы расчета, материалы и технология в строительстве». Алчевск, 1993. – С. 27-31
  25. Белобров И.К., Тихонов Й.М. Внецентренное сжатие //Новое о прочности железобетона. М.: Стройиздат. - 1974. - С. 198-223.

26. Бельский Г.Е. Об устойчивости сжатоизогнутых стержней с учетом продольного сближения опор. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1971. - № 1. – С. 21-24.
27. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. - М.: Госстройиздат. – 1961. – 96 с.
28. Видный Г.Р., Клованич С.Ф., Осадченко К.А. Расчет железобетонных конструкций при сложном напряжении методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. -1986. - № 5. - С. 22-26.
29. Биргер П.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. - М.: Оборонгиз. - 1961.
30. Бирулин Ю.Ф., Мощевитин Г.Т., Карпенко Н.И., Балан Т.А., Ярин Л.И. Исследование работы железобетонных балок-стенок //Совершенствование технологии производства и монтажа железобетонных конструкций: Сб. научн. тр. НИИМосстроя. - М., - 1980. - С. 5-19.
31. Бондаренко В.М., Тимко И.А., Шагин А.Л. Расчет железобетонных плит и оболочек методом интегрального модуля деформаций. Харьков: Харьк. гос.ун-т, 1967.
32. Бондаренко В.М., Бондаренко С.З. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. - М.: Стройиздат. - 1982. - 287 с.
33. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. – Москва. Стройиздат. – 1982. – 287 с.
34. Бондаренко В.М. Фактор времени при учете ниспадающей ветви диаграммы бетона при сжатии. - В кн.: Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона, вып. 8. - Ростов-на-Дону. -1980.-С. 17-22.
35. Борзенко М.М. Распределение усилий в многопролетных железобетонных балках при действии постоянной нагрузки. - В кн.: Строительные конструкции. – Минск. – 1980. - С. 17-22. (Сб.научн. тр. //Ин-т строительства и архитектуры).
36. Брусенцов Г.Н. О расчете железобетонных «конструкций с трещинами при плоском напряженном состоянии. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. - № 6. - С. 17-22.
37. Бургман В.В., Шумилин А.Б, Натурные испытания безбалочного бескапитального перекрытия Центрального Государственного архива г.Москвы, возводимого методом подъема. - В сб. Конструктивные решения многоэтажных зданий. ЦНИИПромзданий вып. 27. - М.: Стройиздат. - 1975.
38. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. - Киев. - 1973. - 487 с.
39. Валь Е.Г. Программы расчета многоэтажных зданий на горизонтальные нагрузки. - В кн.: Конструкции крупнопанельных зданий. Сб. научн, тр. /ЦНИИЛжилища. - М., - 1980. - С. 16-19.
40. Васильков В.С., Володин Н.М. Расчет сборных конструкций зданий с учетом податливости соединений. - М.: Стройиздат. – 1975. - 144 с.

41. Васильков Б.С., Володин Н.М. Расчет сборных диафрагм многоэтажных зданий методом конечного элемента с учетом податливости связей. - Сб. трудов ЦНИИСК им.Кучеренко. – 1972. - вып. 22. - С. 68-74.
42. Варван П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С. и др. Метод конечных элементов. - Киев. Будивельник. – 1981. - 175 с.
43. Васильков Г.В. Об одном методе решения физически нелинейных задач строительной механики. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. - № 6. - С. 13-16.
44. В.З.Власов. Тонкостенные упругие стержни. - М.: Физматгиз. -1959. -568 с.
45. Верешага А.И., Азизов Т.Н. Влияние трещинообразования при расчете перекрытий с учетом пространственной работы сборных плит. //Будівництво України. – 1997. - №4. – С. 34-35.
46. Верешага А.И. Приближенный расчет перекрытий с учетом совместной работы плит. //Материалы международной конференции «Инженерные проблемы современного бетона и железобетона» - том I, часть 1. – Минск. – 1997. – С. 80-83.
47. Вахненко П.Ф., Вахненко В.П. Ширина раскрытия нормальных трещин в косоизгибаемых железобетонных элементах // Строительные конструкции. – Киев: 1989. – Вып. 42. – 3 с.
48. Гагарина А.А. Метод расчета плоских железобетонных конструкций с учетом наличия трещин. - В кн.: Конструкции крупнопанельных зданий. - М., - 1960. - С. 97-105. (Сб.научн.тр./ЦНИИЭПжилища).
49. Гагарина А.А. Исследование пространственной работы стен многоэтажных зданий с применением аналоговых вычислительных машин. - В кн.: Сборные многоэтажные здания. - М., - 1976. - С. 118-120. (Труды /III Международный симпозиум S-41 МСС и Объединенного комитета по высотным зданиям, публикация № 43).
50. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир. - 1984.- 428 с.
51. Гвоздев А.А. О некоторых направлениях в теории формирования и длительной прочности бетона. - В кн.: Прочностные и деформационные характеристики элементов бетонных и железобетонных конструкций. - М., - 1981. - С. 42-47. (Сб. научн. тр./НИИЖБ).
52. Гвоздев А.А., Байков В.Н. К вопросу о поведении железобетонных конструкций в стадии, близкой к разрушению.//Бетон и железобетон. - 1977.-№ 9. - С. 22-24.
53. Гвоздев А.А., Чистяков Е.А. К вопросу о несущей способности гибких внецентренно сжатых стержней. //Бетон и железобетон.-1981. -№ 4. - С. 45.
54. Гвоздев А.А., Чистяков Е.А., Шубик А.В. Исследование деформаций и несущей способности гибких сжатых железобетонных элементов с учетом длительного действия нагрузки. В кн.: Прочность и жесткость железобетонных конструкций. - М. – 1971. - С. 5-13. (Сб. научн.трудов /НИИЖБ).
55. Гвоздев А.А., Карпенко Н.И., Крылов С.И. Теоретическое и экспериментальное исследование работы железобетона с трещинами при плоском однородном и неоднородном напряжённом состояниях.

- //Совершенствование расчёта статически неопределимых конструкций. - М.: Стройиздат. – 1986. - С. 5-43.
56. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем.-М.: Стройиздат.-1974.-204 с.
  57. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. - М.: Стройиздат. – 1974. - 316 с.
  58. Гениев Г.А., Тюпин Г.А. Некоторые вопросы теории упругости и пластичности железобетона при наличии трещин //Новые методы расчета строительных конструкций: сб. ЦНИИСК.- М.: Стройиздат. - 1968. -С. 9-14.
  59. Глина Ю.В. О податливости перемычек бескаркасных монолитных зданий. - В кн.: Монолитное домостроение. - М., - 1979. - С. 29-39.
  60. Глуховский А.Д. Железобетонные безбалочные бескапитальные перекрытия для многоэтажных зданий. //Госстройиздат. - М., - 1956.
  61. Голосов В.Н., Богданова Е.Н., Шубик А.Л. Монолитные железобетонные перекрытия с применением стального профилированного настила. Обзор. - М., ВНИИС. – 1983. - 71 с.
  62. Горачек Е., Лишак В.И., Пуме Д., Драгилов И.И., Камейко В.А., Морозов Н.В., Цимблер В.Г. Прочность и жесткость стыковых соединений панельных конструкций (опыт СССР и ЧССР). - М.: Стройиздат. - 1980. - 192 с.
  63. Горбатов С.В. Несущая способность изгибаемых элементов с арматурой, имеющей площадку текучести, при учете неупругих свойств бетона // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. - 1983. - № 7. - С. 7-10.
  64. Городецкий А.С. Применение метода конечных элементов к физически нелинейным задачам строительной механики: Дисс. д-ра техн. наук. - Киев. – 1978. - 286с.
  65. Городецкий А.С., Здоренко В.С. Расчет физически нелинейных рамных систем на ЭВМ. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев: Будивельник. – 1970. С. 54-62. (Сб. научн. тр./КиевЗНИИЭП).
  66. Городецкий А.С., Здоренко В.С. К расчету физически нелинейных плоских рамных систем. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. - № 4. – С. 16-20.
  67. Грановский А.В. Напряженное состояние несущих стеновых конструкций крупнопанельных зданий при учете неупругих свойств материалов. Автореф. канд. дисс. - М., - 1979. - 24 с.
  68. Грановский А.В. Учет физической нелинейности материалов конструкций и связей при расчете зданий. - В кн.: Теоретические исследования строительных конструкций.- М.: Стройиздат. – 1977. - С. 23-27.
  69. Грановский А.В. Расчет фрагментов зданий с учетом неупругих свойств материалов несущих стен. - В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования крупнопанельных и каменных конструкций. - М. - 1982. - С. 29-37. (Сб. научн. тр. /ЦНИИСК).

70. Грановский А.В., Лейтес Е.С. К расчету несущих конструкций ступенчато-переменной жесткости в зданиях большой этажности. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. - № 1. - С. 17-19.
71. Григорьева И.А. Экспериментальные исследования работы сталежелезобетонных плит по профилированному настилу высотой 114 мм. //Экспресс-инф. ВНИИИС. Строит. конструкции. серия 11. вып. 6. - 1983. - С. 27-33.
72. Гринев В.Д., Хартанович Р.А. К расчету внецентренно сжатых элементов с однозначной эпюрой напряжений в бетоне. - Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1979. - № 8. - С. 18-22.
73. Гурьев Г.Г. Проектирование горизонтальных стыков в многоэтажных зданиях со скрытым каркасом.-В кн.: Железобетонные конструкции промышленного и гражданского строительства. - М., сб. тр. МИСИ. - 1981. -№ 185.
74. Гузовский В.В. Расчет конструкций с учетом ниспадающей ветви диаграммы работы бетона, ширины раскрытия трещин и локальной разгрузки. - Реферат. Сбор. Сер. 14. ЦИНИС Госстроя СССР.-1980. -вып. 6. - С. 24-28.
75. Гурьев Г.Г., Панышин Л.Л., Деформационный расчет многоэтажного здания связевой системы. - В кн.: Пространственная работа железобетонных конструкций. - М., - 1971. - С. 98-109. (Сб. тр. МИСИ, № 90, вып. 2).
76. Гусаков В.Н. Исследование и разработка методов расчета по деформациям и несущей способности изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов из плотного силикатного бетона при статических нагрузках.: Автореф. дисс.докт.техн.наук – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева. - 1980. - 48 с.
77. Гуца Ю.П. Предложения по нормированию диаграммы растяжения высокопрочной стержневой арматуры //Бетон и железобетон.-1979.-№ 7. - С. 15-16.
78. Гуца Ю.П., Лемыш Л.Л. Расчет деформаций конструкций на всех стадиях при кратковременном и длительном нагружениях. //Бетон и железобетон. – 1985. - № 11. - С. 13-16.
79. Давыдова Э.Г. Пространственный расчет зданий повышенной этажности как тонкостенных составных стержней при действии произвольной горизонтальной нагрузки. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев: Будивельник. – 1972. - С. 63-66.
80. Данилина Т.К. Жесткость плит перекрытий в упругопластической стадии // Бетон и железобетон. - 1983. - № 5. - С. 37-38.
81. Дегтерев В.В. Учет влияния прогиба при расчете гибких внецентренно-сжатых элементов мостовых конструкций. //Бетон и железобетон. – 1981. - № 4. - С. 44-45.
82. Дегтерев В.В., Гагарин Ю.А. Результаты испытаний бетонных призм на внецентренное сжатие. //Исследование прочности бетонных и

- железобетонных элементов. - М.: ЦНИИС Минтрансстроя. - 1973. - С. 56-88.
83. Денисов Б.Е. Испытание на виброплощадке модели крупнопанельного здания. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. -№ 4.-С. 17-24.
84. Дзюба В.А. Полные диаграммы деформирования элементов диафрагм жесткости каркасно-панельных зданий. - Экспресс-информация. ЦНТИ по гражданскому строительству и архитектуре. - М., - 1983. - вып. 3. -С. 15-18.
85. Дзюба В.А. Исследование деформативности бетонных и железобетонных конструкций каркасно-панельных зданий на стадии разрушения. - Автореф. канд. дис. - М., - 1983. - 20 с.
86. Дмитриев А.В. Динамический расчет изгибаемых железобетонных элементов с учетом влияния скорости деформирования. - Дисс. ... к-та техн. наук. - М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева. - 1983. - 168 с.
87. Додонов М.И. Расчет прочности и перемещений железобетонных стержней на основе дискретных моделей. – М.: Сб. МИСИ. - 1988. – С. 54-59.
88. Додонов М.И., Сапрыкин В.Ф. Расчет железобетонных элементов с высокопрочной арматурой методом сосредоточенных деформаций. – М.: Сб. МИСИ. – 1988. – С. 60-67.
89. Додонов М.И. Расчет изгибаемых пластин методом сосредоточенных деформаций. //Строительная механика и расчет сооружений. -1986. - № 2. - С. 22-25.
90. Додонов М.И. Развитие и применение метода сосредоточенных деформаций к расчету проемных диафрагм многоэтажных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1984. - № 6. - С. 65 - 69.
91. Додонов М.И. Развитие и применение метода сосредоточенных деформаций к расчету плоскостных конструкций многоэтажных зданий. //Тезисы докладов 3-го коорд. совещания. - Вильнюс. - 1984. - С. 84-88.
92. Додонов М.И., Работа перекрытий в несущих системах многоэтажных зданий при действии горизонтальных нагрузок. - Доклад на совещании стран-участников СЭВ. – Симферополь. - 1981.
93. Додонов М.И., Дроздова И.П. Сопротивление перекрытий скручиванию при повороте многоэтажных каркасных зданий. - Доклад на Всесоюзном координационном совещании. - Москва. - 1981.
94. Додонов М.И., Дроздова И.П. Сопротивление перекрытий скручиванию при повороте в плане многоэтажных каркасных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. - № 4.
95. Додонов М.И., Каландарбеков К. Теоретические исследования моделей дисков перекрытий при действии на них горизонтальной нагрузки. – М.: ВНИИИС. - 1984. - вып. 4. - деп. № 1913. - 9 с.
96. Додонов М.И., Каландарбеков К. Развитие расчетных моделей дисков сборных железобетонных перекрытий при действии на них горизонтальной (ветровой) нагрузки. – М.: ВНИИИС Госстроя СССР. - 1983. - серия 11. - вып. 9. - деп. № 4058. - 20 с.

97. Додонов М.И., Каландарбеков И. Экспериментальное исследование моделей дисков перекрытий многоэтажных зданий. - Экспресс - информация. Раздел: Строительство и архитектура, серия 8, вып. 8. - М., - 1984. - С. 5-8.
98. Додонов М.И., Каландарбеков И., Николаев А.С. Теоретические и экспериментальные исследования фрагмента диска сборного перекрытия. - Библиографический указатель депонирования рукописей во ВНИИИС Госстроя СССР, раздел: Строительство и архитектура. Вып. 2. - М., - 1985. - № 5459. - 12 с.
99. Додонов М.И., Кулагин А.А., Мухамедиев Т.А., Шумилин А.Б. Расчет прогибов безбалочных бескапитальных перекрытий с учетом трещин. //Бетон и железобетон. – 1979. - № 10.
100. Додонов М.И., Мамин А.Н. Жесткостные характеристики комплексных швов при расчете железобетонных пластин по методу сосредоточенных деформаций. //Моск. инж.-строит, ин-т. - М., -1985. - 8 с. - деп. в ВНИИИС. - № 4600.
101. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А., Кунижев В.Х., Адыракаева Г.Д. Расчет прочности и перемещений стержневых железобетонных элементов по деформированной схеме. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. - № 3.
102. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А. Экспериментально-теоретическое исследование железобетонных безбалочных перекрытий многоэтажных зданий с нерегулярной сеткой колонн. //Материалы XXXV научно-технической конференции. - М.: МИСИ. - 1976.
103. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А. К расчету прогибов плит, опертых по контуру. //Бетон и железобетон. – 1977. - № 4.
104. Додонов М.И., Абдыракаева Г.Д. О перемещениях балок-стенок //Строительная механика и расчет сооружений. – 1989. - №4. - С.42-43.
105. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А. Экспериментальное исследование плоских безбалочных перекрытий с нерегулярной сеткой колонн. - Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1977. - № 10.
106. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А. Прогибы безбалочных перекрытий с квадратной и прямоугольной сетками колонн при сплошной равномерно распределенной нагрузке. - Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1978. - № 5.
107. Додонов М.И., Мухамедиев Т.А. Расчет на ЭВМ прогибов неразрезных точечно опертых железобетонных плит с учетом процесса трещинообразования. - Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1980. - № 1.
108. Додонов М.И., Николаев А.С. Методика модельных испытаний плитных конструкций на сдвиг. //Моск. инж.-строит. ин-т. - М., - 1985. - 12 с. - деп. в ВНИИИС. - № 5459.
109. Додонов М.И., Николаев А.С. методика модельных испытаний плитных конструкций на сдвиг. //Моск. инж.-строит, ин-т. - М., - 1986. – 6 с. - деп. в ВНИИИС. - № 7086.

110. Додонов М.И., Шериф М.Х., Кунижев В.Х. Расчет на ЭВМ прочности внецентренно загруженных железобетонных элементов круглой формы по нормальным сечениям. - Экспресс-информация ВНИИИС, Госстроя СССР, серия 10, вып. 2. - М., - 1987. - С. 2-5.
111. Додонов М.И., Шериф М.Х. Расчет безбалочных точечно опертых перекрытий методом сосредоточенных деформаций. //Жилищное строительство. - 1987 - № 3. - С. 24-25.
112. Додонов М.И., Шериф М.Х. Расчет составных балок методом сосредоточенных деформаций. - М.: ВНИИИС -1986. - серия 10. - вып. 9. - С. 9 - 14.
113. Додонов М.И., Зулпуев А.М., Джанкулаев А.Я. Расчет на ЭВМ сборных железобетонных плит перекрытий, опертых по контуру. - В кн.: Тезисы докладов XV научно-производственного регионального совещания - семинара «Автоматизация проектирования исследований железобетонных конструкций многоэтажных зданий», сентябрь, 1989. - Львов . - 1989. - С. 25.
114. Додонов М.И., Фролов А.К., Поздеев В.М. расчет железобетонных статически неопределимых элементов методом сосредоточенных деформаций. - М.: ВНИИИС Госстроя СССР. - 1986. - вып.3. - деп. № 1347.
115. Додонов М.И., Чарыев Я.М. Усилия в стержневых элементах при вынужденных осевых деформациях. //Бетон и железобетон. - 1982. - № 7.
116. Додонов М.И., Зулпуев А.М., Джанкулаев А.Я. Эффект распора сборных сплошных плоских перекрытий в монолитных многоэтажных зданиях. - В кн.: Тезисы докладов, т.2., Всесоюзное координационное совещание «Экономичное армирование железобетонных конструкций », сентябрь. 1990. - Фрунзе. - 1990. - С. 78-80.
117. Дроздов П.Ф., Додонов М.И. Некоторые особенности расчета 36-ти этажного здания нового типа. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1974. - № 5.
118. Дроздов П.Ф., Додонов М.И., Чарыев М.М. Температурные климатические воздействия на несущие системы многоэтажных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1978. - № 5. - С. 4-8.
119. Дроздов П.Ф., Додонов М.И., Панышин Л.Л., Саруханян Р.Л. Проектирование и расчет многоэтажных гражданских зданий и их элементов. - М.: Стройиздат. - 1986. - 351 с.
120. Дроздов П.Ф., Себекин И.М. Проектирование крупнопанельных зданий. - М.: Стройиздат. - 1967. - 412 с.
121. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. - М.: Стройиздат. - 1977. - 223 с.
122. Дроздов П.Ф. О расчете гибких железобетонных колонн. //Бетон и железобетон. - 1979. - № 12.
123. Дроздов П.Ф. Надежность гибких железобетонных колонн. //Бетон и железобетон. - 1981. - № 4. - С. 42-43.



124. Дроздова И.П. Сопротивление перекрытий кручению из плоскости в связевом каркасе. - Сб. тр. МИСИ им. В.В. Куйбышева, № 133. - М., - 1976. - С. 61-68.
125. Дроздов П.Ф. Особенности деформирования связевого каркаса в многоэтажных зданиях. //Строит. механика и расчет сооружений. - 1982. - № 5.
126. Дроздов П.Ф., Дзюба В.А., Паньшин Л.Л. Прочность диафрагм каркасных многоэтажных зданий. // Бетон и железобетон. - 1985. - № 2. - С. 23-24.
127. Дроздов П.Ф. Ресурсосберегающее проектирование многоэтажных зданий. // Строит. механика и расчет сооружений. - 1987. - № 6. - С. 15 - 19.
128. Дроздов П.Ф., Лалл Б.Б. Влияние податливости перекрытий на пространственную работу несущей системы многоэтажных каркасно-панельных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1969. - № 6.
129. Дроздов П.Ф., Люблинский Д.А. Программа расчета несущих систем многоэтажных зданий с учетом специфики железобетона. - В кн.: Совершенствование расчета высоких зданий как единых пространственных систем с учетом специфики железобетона. Тезисы докладов VI-го коорд.совещания. - Харьков. - 1982. - С. 9-11.
130. Дроздов П.Ф., Пресняков Н.И. Проектирование ядер жесткости высотных зданий //Строительство и архитектура, серия 13, вып.3.-М.,-1981.-С.23-27.
131. Дроздов П.Ф., Швехман М.Н. Устойчивость многоэтажных каркасных зданий. - В кн.: Исследования по теории сооружений. - М.: Стройиздат. - 1974. - С. 159-165.
132. Дыховичный А.А., Гриценко В.В. Статически неопределимые железобетонные конструкции. - Киев «Будивельник». - 1978. - С. 107.
133. Дыховичный Ю.А., Максименко А.М. Сборный железобетонный унифицированный каркас. - М.: Стройиздат. - 1985. - 296 с.
134. Дроздов П.Ф., Сенин Н.И., Кияшко В.Ю. Новая конструкция монолитных многоэтажных зданий. //Бетон и железобетон.- М.: Стройиздат. - № 10. - 1990. - С. 10-11.
135. Егупов В.К., Командрина Т.А., Голобородько В.Н. Пространственные расчеты зданий: Пособие по проектир. - Киев. Будивельник. - 1976. - 264 с.
136. Ельмуратов С.К. Применение матричной формы метода конечных разностей к расчету гибких пологих ортотропных оболочек на прочность, устойчивость и динамику // Наука и техника Казахстана. Павлодар, ПГУ, - 2001. - №2. - С. 192-195.
137. Енделе М., Шейкога И. Высотные здания с диафрагмами и стволами жесткости. //Пер. с чешек. - И.: Стройиздат. - 1986. - 336 с.
138. Жуков Д.Д., Шуберт И.М. Измерение деформаций арматуры железобетонных центрифугированных стоек кольцевого сечения, работающих на сжатие с кручением //Сб. БелНИИС: Совершенствование

- строительных конструкций и технологии производства. – Минск, 1992. – С. 61-66.
139. Зайцев Л.Н. Исследование трещинообразования, деформаций и несущей способности неразрезных железобетонных плит. - В кн. Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат. – 1972. - С. 106-130.
140. Зырянов В.С., Тельконуров К.М. Расчет прочности плит перекрытий с краевой нагрузкой от наружных стен. //Бетон и железобетон. - 2005. - № 2. - С. 17 - 20
141. Захаров В.Н. Расчет составных стержней с учетом физической и геометрической нелинейности. - В кн.: Теория и методы расчета строительных конструкций. - М., - 1974. - С. 144-152. (ЦНИИСК, сб. трудов).
142. Звездов А.И, Михайлов К.В, Волков Ю.С. XXI век — век бетона и железобетона. // Бетон и железобетон. - 2001. - № 1. - С. 2 – 7.
143. Здоренко В.С. Учет нелинейной ползучести и усадки бетона при расчете железобетонных конструкций. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев, Будивельник. – 1970. - С. 103-109. (КиевЗНИИЭП, сб. тр.).
144. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир.–1975.– 542 с.
145. Зулпуев А.М. Экспериментальные исследования сборных плоских балочных плит с учетом распора. //Моск. инж.-стройит.инс-т. – М.: -1990.- деп. в ВНИИНТПИ.- № 10637.- 9 с.
146. Зулпуев А.М. Влияние распора на работу статических неопределимых систем. //Научно-технический журнал «Известия» ОшГУ.№ 1,2005. – Ош. - 2005. - С. 23-25.
147. Зулпуев А.М. Экспериментальное исследование сборных железобетонных плит перекрытий на натуральных образцах. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 4, 2005. – Фергана. - 2005. - С. 71-74.
148. Зулпуев А.М. Метод сосредоточенных деформаций для расчета сборных железобетонных распорных плит перекрытий. //Научно-технический журнал «Номаи донишгох. Илихом табиатшиноси ва иктисоди.» № 7-8/2004. – Ходжент. - 2004. - С. 43-53.
149. Зулпуев А.М. Программа «DIRAR» для расчета плит перекрытий на действие кратковременной нагрузки. //Научный журнал «Вестник». ОшГУ. № 1, 2005. - Ош. 2005. - С. 99-101.
150. Зулпуев А.М. Построение аппроксимирующей зависимости «Напряжение-деформация» для бетона. //Научно-технический и производственный журнал «Бетон и железобетон». № 2, 2006. - Москва. - 2006. - С. 9-11.
151. Зулпуев А.М. Расчет балочных плит и плит перекрытий, опертых по контуру по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 2, 2004. - Фергана. - 2004. - С. 64-68.

152. Зулпуев А.М. Экспериментальные исследования сборных плоских плит с распором. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 4, 2003. – Фергана. - 2003. - С. 61-64.
153. Зулпуев А.М. Расчет по раскрытию трещин, нормальных к продольной оси элемента. //Научно-технический журнал, Сам ГАСИ, № 2, 2005. – Самарканд. - 2005. - С. 7-9.
154. Зулпуев А.М. Расчет стержней по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 1, 2005. - Фергана. - 2005. - С. 86-88.
155. Зулпуев А.М. Расчет изгибаемых плитных элементов и систем из них с учетом нелинейной работы по методу сосредоточенных деформаций. Москва. //Научно-технический и производственный журнал «Бетон и железобетон». № 2, 2005. - Москва. - 2005. - С. 14-17.
156. Зулпуев А.М. Расчет сборных железобетонных плит перекрытий, опертых по контуру, по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал «Известия» ОшГУ, №2, 2005. - Ош. - 2005. - С. 31-37.
157. Зулпуев А.М. Основы метода сосредоточенных деформаций в расчете железобетонных стержневых и плоскостных конструкций в многоэтажных зданиях «Монография». - Ташкент. - 2004. - 203 с.
158. Зулпуев А.М., Юлдашев О.Р. Учет граничных условий и реальных связей в расчете изгибаемых плитных систем по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал «Вестник». ТашГТУ. № 1, 2006. – Ташкент. - 2006. - С. 136-139.
159. Зулпуев А.М., Юлдашев О.Р. Сборные железобетонные плиты перекрытий, опертые по контуру в монолитных многоэтажных зданиях. //Научно-технический журнал. ТашГТУ. № 2, 2006. – Ташкент. - 2006. - С. 128-130.
160. Зулпуев А.М. Расчет железобетонных плоскостных конструкций на основе дискретных моделей. //Республиканский научно-технический журнал «Наука и новые технологии». № 7-8. 2006. - Бишкек. - 2006. - С. 142-143.
161. Зулпуев А.М., Сенин Н.И., Салпагаров Ж. Особенности методики испытаний фрагмента монолитного многоэтажного здания кратковременной и длительной нагрузкой. //Республиканский научно-теоретический журнал «Наука и новые технологии». – Бишкек. – 2009. № 8. 2009. - С. 29-32.
162. Зулпуев А.М. Исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных распорных плит перекрытий в зданиях с монолитными стенами. //Монография. – Бишкек. Изд-во «Илим», 2010 г. – 80 с.
163. Зулпуев А.М. Расчет плоско-напряженных систем в упругой стадии работы. // Научный журнал «Вестник» ОшМУ. № 23. 2010. - Ош. – 2010. - С. 244-247.
164. Зулпуев А.М. Сопротивление сборных железобетонных перекрытий в каркасных зданиях деформированию из плоскости при горизонтальных нагрузках. // Научный журнал «Вестник» ОшМУ. № 23. 2010. – Ош. – 2010. - С. 247-250.

165. Зулпуев А.М. Расчет плит перекрытий, армированных стальным профилированным настилом по методу предельного равновесия. // Научно-периодическое издание «Вестник» КГУСТА им. Н. Исанова. № 1 (27). – Бишкек. – 2010. – С. 113-117.
166. Зулпуев А.М. Расчет по методу сосредоточенных деформаций железобетонных плоскостных конструкций и систем из них. // Научно-периодическое издание «Вестник» КГУСТА им. Н. Исанова. № 1 (27). – Бишкек. – 2010. – С. 117-123.
167. Зулпуев А.М. Расчет железобетонных плоскостных конструкций на основе дискретных моделей. // Теоретический и прикладной научно-технический журнал «Известия» КГТУ им. И. Раззакова. №21.-Бишкек.-2010.-С. 27-30.
168. Зулпуев А.М. Расчет перемещений балочной изгибаемой плиты и построение аппроксимирующей зависимости "М – κ". //Теоретический и прикладной научно-технический журнал «Известия» КГТУ им. И. Раззакова. №21. – Бишкек. – 2010. – С. 30-33.
169. Изотов Ю.Л., Изотова Т.Ю. Расчет внецентренно сжатых элементов прямоугольного сечения при малых эксцентриситетах. // Бетон и железобетон. - 2006. - № 1. - С. 14 – 18.
170. Исследовать действительную работу дисков перекрытий и разработать указания по проектированию перекрытий полносборных общественных зданий, в том числе с применением конструкций, изготавливаемых методом безопалубочного формования. //Отчет МИСИ им. В.В. Куйбышева, инв. № 02840002831. - М., - 1983. - 120 с.
171. Каландарбеков И. Железобетонные диски перекрытий многоэтажных каркасных зданий из плит безопалубочного формования. //Автореферат кандидата техн. наук. МИСИ им. В.В. Куйбышева. - М., - 1985. - 21 с.
172. Калманок А.С. Расчет балок-стенок. - М., - 1956. - 146 с.
173. Кальницкий А.А. Расчет статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий. - М.: Стройиздат. - 1970. - 168 с.
174. Камейко В.А. Несущая способность и деформации стыковых соединений панелей стен с плитами перекрытий. - В кн.: Прочность крупнопанельных конструкций. - М.: Стройиздат. – 1968. - С. 58-99. (ЦНИИСК).
175. Камейко В.А., Алексеев П.И. Исследование несущей способности стеновых панелей крупнопанельных зданий с учетом закреплений по контуру. - В кн.: Исследования конструкций крупнопанельных зданий. - М.: Стройиздат. – 1981. - С. 24-42. (ЦНИИСК).
176. Камейко В.А., Грановский А.В., Аграновский В.Д., Лишак В.И. Повышение Прочности платформенных стыков. //Бетон и железобетон. – 1983. - № 5. - С. 23-24.
177. Камейко В.А., Ломова Л.М. Прочность узлов сопряжения панелей стен с плитами перекрытий, закрепленных от горизонтальных перемещений. – В кн., Прочность крупнопанельных и каменных конструкций. – М.: Стройиздат. – 1972. – С. 35-44. (ЦНИИСК).

178. Карапетян С.Х., Давиденко А.И., Иванов А.П., Псюк В.В. Результаты экспериментальных исследований влияние многократно повторных нагрузжений на несущую способность внецентренно сжатых стоек // Міжвід. Науково-техн. Зб. Наук. Праць. «Будівельні конструкції». – Київ: НДІБК, 2005. – вип. 62. – С. 131-136.
179. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. - М.: Стройиздат. – 1976. - 204 с.
180. Карпенко Н.И. К расчету железобетонных платин и оболочек с учетом трещин. // Строит. механика и расчет сооружений. – 1991. - №1. – С. 7-13.
181. Карпенко Н.И., Балан Т.А., Леви М.В. Методы расчета монолитных стен и перекрытий. //На стройках России. – 1981. - № 7. – С. 49-51.
182. Карпенко Н.И., Ерышев В.А. Исследование деформаций железобетонных плит на ветвях разгрузки. – В кн.: Прочностные и деформационные характеристики элементов бетонных и железобетонных конструкций. – М., - 1981. – С. 106-127. (НИИЖБ).
183. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А. К расчету прочности нормальных сечений изгибаемых элементов. //Бетон и железобетон.-1983. - № 4. - С. 11-12.
184. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А. Определение кривизны и удлинения стержневых элементов с трещинами. //Бетон и железобетон. - 1981.- № 2. - С. 17-18.
185. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А, Диаграмма деформирования бетона при многократно повторных напряжениях. - В сб. ЦНИИЗП сельстроя. - М., - 1986.
186. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры. - В кн.: напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. - М.: НИИЖБ. - 1986. – С. 7-25.
187. Карпенко Н.И. К построению обобщенной зависимости для диаграммы деформирования бетона. //В кн.: Строительные конструкции. - Минск. – 1983. - С. 164-173.
188. Карпенко Н.И. К построению условия прочности бетонов при многоосных напряженных состояниях. //Бетон и железобетон.-1985. - № 10. - С. 35-37.
189. Карпенко Н.И., Ярин Л.И., Кукунаев В.С. Расчет элементов стен методом конечных разностей. – В кн.: Новое о прочности железобетона. – М.: Стройиздат. – 1977. – С. 141-165.
190. Карпенко Н.И. К построению общей ортотропной модели деформирования бетона // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. - №2. – С. 31-36.
191. Кашеев Г.В., Алексеев П.И. Прочность и податливость усовершенствованных стыков сборных диафрагм жесткости. - В кн.: Исследование конструкций крупнопанельных зданий. - М.: Стройиздат. – 1981. - С. 64-71. (ЦНИИСК).
192. Кашеев Г.В., Грановский А.В., Колчина О.Н. Жесткость железобетонных рам с учетом образования пластических шарниров в узлах. – В кн.:

- Исследование крупнопанельных конструкций зданий. – М.: Стройиздат. – 1981. – С. 80-86. (ЦНИИСК).
193. Каюми М.Ю. Сопротивление сборных железобетонных перекрытий в каркасных зданиях деформированию от плоскости при горизонтальных нагрузках. Автореферат дисс. на соис. уч. степ. канд. техн. наук. – М.: МИСИ. – 1986. – 21 с.
194. Кодекс - образец ЕКБ-ФИП для норм по железобетонным конструкциям. Том II. (пер. с фр.). - М.: НИИЖБ. - 1984. - 284 с.
195. Козачевский А.П. Модификация деформационной теории пластичности и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1963. - № 4. - С. 12-17.
196. Козачевский А.И. К расчету железобетонных конструкций с учетом их действительной работы. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев.: Будивельник. – 1970. - С. 117-120. (Киев ЗНИИЭП).
197. Козачевский А.И., Боднар И.Ф. Вопросы проектирования железобетонных каркасов с учетом перераспределения усилий. - В кн.; ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства, - Киев: Будивельник. - 1970. - С. 120-125. (Киев ЗНИИЗП).
198. Козачевский А.И. Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами. // Строительная механика и расчет сооружений. -1983. - № 4 - С. 12-16.
199. Козачевский А.И. К расчету сложных инженерных сооружений на ЕСЭВМ. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1981. – № 4. - С. 57-58.
200. Козачевский А.И. Численные методы расчета железобетонных конструкций с учетом неупругих свойств материалов и их приложение при автоматизированном проектировании. Дисс.док.техн. наук.-Киев.-1980.-461 с.
201. Кодыш Э.Н., Мамин А.Н., Долгова Т.Б. Расчетная модель для проектирования несущих систем и элементов. //Жилищное строительство. – 2003. № 11 - С. 9-15.
202. Коковин О.А. Учет неупругих свойств материалов при расчете статически неопределимых конструкций. - В кн.: Совершенствование расчета статически неопределимых железобетонных конструкций.- М.: Стройиздат. - 1968. - С. 195-210. (НИИЖБ).
203. Коковин О.А. Деформации изгибаемых и внецентренно сжатых элементов при кратковременно действующей нагрузке в стадиях, близких к разрушению. //Прочность и жесткость железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат. - 1968. - С. 104-172.
204. Коломиец В.П. Метод определения напряжений и деформаций в сечении балки при сложном нагружении с учетом действительной диаграммы ( $\sigma - \varepsilon$ ). //Изв. вузов, авиац.техника. - 1966. - № 1. - С. 63-71;

205. Кондратьев Р.Б. Нудельман Е.Г. О расчете диафрагм из сборных поэтажных элементов на горизонтальные узловые нагрузки. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1974. - № 1. - С. 45-49.
206. Коровкин В.С. Исследование прочности балок - стенок и узлов их опирания на колонны. //Прочность конструкций: Реферативный сб. - М.: ГОСИНТИ. - 1976. - С. 51-53.
207. Косицын Б.А. Статический расчет крупнопанельных и каркасных зданий. - М.: Стройиздат. – 1971. - 213 с.
208. Костенецкий В.И, Приближенное определение перемещений шарнирно-стержневых систем со сжато-изогнутыми элементами.- Известия вузов, сер. Строительство и архитектура. – 1981. - № 2. - С. 51-53.
209. Кочергин В.Д. Исследование влияния жесткости отдельных конструкций и их соединений между собой в пространственной коробке здания на его напряженное состояние при вертикальной нагрузке. - В кн.: Исследования по строительным конструкциям. - М., - 1970. - С. 45-53. (ЦНИИСК, вып. 12).
210. Кроль И.С. Эмпирические представления диаграммы сжатия бетона (обзор литературных источников). - В кн.: Исследования в области механических измерений. – М., - 1971. - вып. 8. – С. 38. (ВНИИФТРИ).
211. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерии прочности бетона в трехосном напряженном состоянии. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1987. - № 1. - С. 40-44.
212. Крылов С.М. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях. - М.: Стройиздат. - 1964. - 168 с.
213. Крылов С.М., Козачевский А.И. Расчет на ЭВМ железобетонных рам и заземленных балок с учетом трещинообразования и распорности. - В кн.: Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций. - М.: Стройиздат. - 1969. - С. 245-262. (Сб. тр. НИИЖБ).
214. Крылов С.М., Козачевский А.И., Пекарский А.Л. Влияние неупругих свойств железобетона на величину и распределение усилий в крупнопанельных системах на подрабатываемых территориях. - В кн.: Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат. – 1972. - С. 158-175.
215. Кудашев В.И., Устинов В.П. Расчет пространственных железобетонных конструкции с учетом физической нелинейности и трещинообразования. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. - № 4.
216. Кузьмичев А.Е. Исследование влияния пластических деформаций сжатого бетона на перераспределение усилий в железобетонных рамах.//Исследования по теории железобетона. - М.: Стройиздат. - 1960. - С. 178-209.
217. Куроедов В.В. О применении метода конечных элементов при решении физически нелинейных задач теории упругости. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1976. - № 5. - С. 73-75.

218. Лажечникова Е.К. Уточнение модели конечного элемента путем учета сдвиговой жесткости. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев. Будивельник. - 1972. - С. 118-130. (Киев ЗНИИЭП).
219. Лажечникова Е.К. К вопросу определения жесткостных характеристик панелей. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев. Будивельник. - 1970. - С. 134-141. (Киев ЗНИИЭП).
220. Лажечникова Е.К. Опыт применения программ расчета крупнопанельных зданий. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев. Будивельник. - 1970. - С. 130-134. (Киев ЗНИИЭП).
221. Левин В.М., Стебляко Л.В. Физические зависимости железобетона при плоском напряженном состоянии и заданных деформациях // Строительные конструкции: Сборник научных трудов Второй всеукраинской научно-практической конференции «Научно-практические проблемы современного железобетона». - К.: НИИСК, 1989. - С. 139-144.
222. Лейтес Е.С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь материала. - В кн.: Новые исследования элементов железобетонных конструкций при различных предельных состояниях. - М.: НИИЖБ. - 1982. - С. 24-32.
223. Лемыш Л.Л. Расчет железобетонных конструкций по деформациям и несущей способности с учетом полных диаграмм деформирования бетона и арматуры. // Железобетонные конструкции промышленных зданий. - М.: ЦНИИ промзданий. - 1984. - С. 74-88.
224. Л.Л. Лемыш, В.Я. Сухман. Определение деформаций железобетонных элементов при косом внецентренном сжатии на всех стадиях работы. Экспресс-информация ВНИИИС Госстроя СССР, серия 10. вып. 9. - 1986. - С. 8-12.
225. Леньшин В.П. К вопросу разработки и использования моделей деформирования железобетонных конструкций с трещинами. // Строительная механика и расчет сооружений. - 1980. - № 6. - С. 34-36.
226. Лепский В.И., Паньшин Л.Л., Кац Г.Л. Полносборные конструкции общественных зданий. - М.: Стройиздат. - 1986. - 233 с.
227. Лившиц Я.Д., Здоренко В.С. Учет продольного изгиба при расчете физически нелинейных систем. - В кн.: ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. - Киев: Будивельник. Киев ЗНИИЭП. - 1972. - С. 130-135.
228. Лившиц Я.Д. Расчет железобетонных преднапряженных в двух направлениях плит с учетом ползучести // Строительные конструкции, вып. IV. Киев: Будивельник. - 1966.
229. Лишак В.И. Расчет бескаркасных зданий с применением ЭВМ. - М., Стройиздат. - 1977. - 197 с.



230. Лужин О.В. Устойчивость упругих систем. – В кн.: Строительная механика. Издание седьмое. Переработанное и дополненное. – М.: Высшая школа. – 1976. – С. 486-506.
231. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. - М.: Стройиздат. - 1978. - 208 с.
232. Мадатян С.А. Диаграмма растяжения высокопрочной стали в состоянии поставки. //Бетон и железобетон. - 1985. - № 2. - С. 12-13.
233. Маилян Д.Р. Зависимость предельной деформативности бетона от армирования и эксцентриситета сжимающего усилия. //Бетон и железобетон. - 1980. - № 9. - С. 11-12.
234. Маилян Д.Р. Приближенный метод расчета неразрезных балок с учетом перераспределения усилий. //Бетон и железобетон. – 1983. -№ 8.-С. 35-36.
235. Маилян Д.Р. Несущая способность неразрезных балок с высокопрочной арматурой. //Бетон и железобетон. – 1982. - № 7. – С. 42-44.
236. Маилян Л.Р. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных балках. //Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. - 1983. - № 4. - С. 6-10.
237. Мамин А.Н., Карнет Ю.Н., Сопротивление перекрытий из плит безопалубочного формирования действию горизонтальной силы и крутящего момента. //Бетон и железобетон. - 1987. - № 1. - С. 40-41.
238. Мамин А.Н. Применение метода дискретных связей при нелинейных расчетах железобетонных конструкций. //Промышленное и гражданское строительство. – 2004. - № 6. - С. 27-29.
239. Манискевич Е.С. Жесткость и прочность сечения, стержня и стержневой системы. //Строительная механика и расчет сооружений. — 1983. - № 6. - С. 32-35.
240. Малашкин Ю.Н. Деформирование и разрушение бетона в условиях сложных напряженных состояний. Автореферат дисс. докт. техн. наук. - М., -1984. - 28 с.
241. Масленников А.М., Панин А.Н. Численное решение задач по расчету изгибаемых железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности материала. - В кн.: Статика и динамика сложных строительных конструкций. Межвуз. темат. сб.тр. 1. – Л.: ЛИСИ. - 1982.
242. Мастаченко В.Н., Мирвис Я.Г., Уколов В.Н. Автоматизация проектирования железобетонных конструкций. - Л.: Стройиздат. – 1982. - 224 с.
243. Матков Н.Г., Баранов Д.С. Изучение предельного состояния железобетонных элементов на моделях с автоматической записью полной диаграммы сжатия. ВНИИИС Госстроя СССР. – 1984. - серия 10. - вып.6.
244. Медведько В.Н. Использование матричного метода при изучении напряженно-деформированного состояния диафрагм зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1971. - № 6. - С. 9-13.
245. Медведько В.Н. Расчет диафрагм зданий повышенной этажности.- В кн.: Исследования по строительным конструкциям. - М., ЦНИИСК. - 1970. - вып. 12. - С. 59-66.

246. Меламут Л.Ш. Расчеты прогибов изгибаемых элементов постоянного сечения по приведенной жесткости. //Бетон и железобетон. - 1985. - № 12. - С. 21-23.
247. Михайлов А.А. Новые данные о жесткостных параметрах сборных перекрытий.- В ст.: Сейсмостойкость гидротехнических и портовых сооружений Приморья, Часть II. – Владивосток. – 1972. - С. 73-78.
248. Михайлов В.В., Емельянов М.П., Дудолодов Л.С., Митасов В.Н. Некоторые предложения по описанию диаграмм деформаций бетона при разрушении. //Известия вузов. Серия. Строительство и архитектура. - 1984. - № 2. - С. 23-27.
249. Михайлов К.В. Научно-технический прогресс в области бетона и железобетона и задачи научных организаций. //Бетон и железобетон. – 1983. - № 5. - С. 4-6.
250. Медетбеков А. Методы расчета на статические и сейсмические нагрузки неупругих железобетонных пластин. - Фрунзе: Илим. – 1979.
251. Мулин Н.М. Особенности деформаций изгибаемых элементов. - В кн.: Теория железобетона. - М.: Стройиздат. – 1972. - С.35-43.
252. Мулин Н.М., Гуца Ю.П., Мамедов Т.Н. Прочность балок и их деформации в стадии, близкой к разрушению. // Новое о прочности железобетона. - М.: Стройиздат. - 1977. - С. 30-47.
253. Мулин Н.М., Гуца С.П. Деформации железобетонных элементов при работе арматуры в упругопластической стадии. //Бетон и железобетон. – 1970. - № 3. - С. 24-26.
254. Мурашев В.И., Сигалов Э.Е., Байков В.Н. Железобетонные конструкции. - М., - 1962. - 658 с.
255. Мухамедшакирова Ш.А. Влияние геометрии плит на схему разрушений конструкций // Мухамедшакирова Ш., Саутбаева Г. // Перспективы развития студенческой науки: Тез. Докл. Студ. Науч.-практ. Конф. – Алматы, 1992. – С. 15-16.
256. Мухамедиев Т.А. Моделирование поведения изгибаемых железобетонных стержневых элементов на стадии, близкой к разрушению. - В кн.: Прочностные и деформационные характеристики элементов бетонных и железобетонных конструкций. - М., - 1981. - С. 126-139. (Сб.тр. НИИЖБ).
257. Назаренко В.Г., Масленников В.В. Расчет геометрически нелинейных железобетонных рам. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1975. – № 3. - С. 69-73.
258. Назаренко П.П., Али М.М. Численная модель контакта арматуры с бетоном при статическом нагружении. Научные труды общества железобетонщиков Сибири и Урала. Вып. 3. // - Новосибирск, СГАПС, 1995. – С. 107-110.
259. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). - Киев.: Будивельник. - 1980. - 231 с.

260. Немчинов Ю.И., Фролов А.В. Расчет зданий и сооружений методом пространственных конечных элементов. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. - № 5. - С. 29-33.
261. Никитин И.К. Учет продольного изгиба в колоннах многоэтажных зданий. //Бетон и железобетон. – 1970. - № 3.
262. Никифоров С.Н. Теория упругости и пластичности.- М., - 1955. – 284 с.
263. Николаев А.С. Сопrotивление сборных железобетонных перекрытий в их плоскости неравномерным смещениям многоэтажного каркаса. Автореф. канд. дисс. МИСИ им. В.В. Куйбышева. – 1987. - 21 с.
264. Нил Б.Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. - М.: Госстройиздат. - 1961. - 315 с.
265. Носарев А.В. Приближенные методы в теории армированных материалов и их приложение к расчету строительных конструкций - Автореф. дис. канд. техн. наук. – М., - 1973. - 31 с.
266. Обозов В.И. К расчету на ЭВМ железобетонных диафрагм с проемами. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. - № 6. - С. 7-9.
267. Обозов В.И. О некоторых свойствах метода упругих решений. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1984. - № 5 - С. 30-34.
268. Овечкин А.М. Определение перемещений в статически неопределимых железобетонных конструкциях в стадии предельного равновесия. - В кн.: Теория железобетона. - М.: Стройиздат. – 1972. - С. 146-155. (Сб.трудов НИИЖБ).
269. Оськин Б.И. Об устойчивости сжато-изогнутых стержней при различных схемах нагружений. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1970. - № 1. - С. 37-44.
270. Провести экспериментально-теоретические исследования и разработать рабочие чертежи пустотных настилов, изготавливаемых методом безопалубочного формования на технологических линиях "Макс Рот" для каркаса серии ИИ-04 на 1979-81 г.г. //Отчет. ЦНИИЭП ТБЗ и ТК, 79-1009-Н. – М.: - 1982. - 307 с.
271. Поляков С.В., Денисов Б.Е. Анализ работы крупнопан. зданий на действия гор. (сейсм., ветр.) нагрузок с использ. плоских и простр. моделей. //Строительство и архитектура Узбекистана. – 1967. - № 3.
272. Пак А.П., Трапезников Л.П., Яковлева Э.Н. Исследование характеристик трещиностойкости бетона при осевом растяжении и изгибе образцов с надрезами. - Известия ВНИИГ. – 1983. - С. 163.
273. Пак С.Н. Метод упругих сосредоточенных деформаций в задачах плоского напряженного состояния и изгиба пластин. Автореф. канд. дисс. - М., МИСИ им. В.В. Куйбышева. – 1984. – 24 с.
274. А.Н. Панин, Н.Х. Михно, ЛИСИ, Ленпромстройпроект. Численный расчет железобетонных и стержневых конструкций с произвольным поперечных сечений. //Современные методы расчета и исследования новых типов железобетонных конструкций. Минвуз. тем.сб.тр. – Л.: ЛИСИ. - 1985. - С. 83-89.
275. Паньшин Л.Л., Крашенинников М.В. Оценка эффективности неупругой деформационной модели при расчете нормальных сечений. //Бетон и железобетон. - 2003. - № 3. - С. 19 – 23.

276. Паньшин Л.Л. Оценка предельной нагрузки для каркасно-панельных зданий с учетом перераспределения усилий. //В кн.: Полносборные унифицированные конструкции в гражданском строительстве. - М., - 1981. - С. 12-31. (ЦНИИЭП торгово-бытовых зданий).
277. Паньшин Л.Л. Перераспределение усилий между элементами несущей системы каркасно-панельного здания. //Бетон и железобетон. - 1981. - № 7. - С. 30-31.
278. Паньшин Л.Л. Предельные состояния каркасно-связевых несущих систем. Автореф. докт. дисс. - М. МИСИ им. В.В. Куйбышева. – 1984. – 36 с.
279. Паньшин Л.Л. Прочность, устойчивость и деформации здания со связевым каркасом. // Бетон и железобетон. – 1976. - № 7. - С. 16-18.
280. Паньшин Л.Л. Расчет дисков перекрытий. -В кн.: Полносборные каркасные конструкции общественных зданий. - М.: Стройиздат.-1977.-С. 44-46.
281. Паньшин Л.Л., Карабанов Б.В. Приближенный метод определения предельной кривизны элементов. //Бетон и железобетон. - 1982.-№ 2. - С. 34.
282. Паньшин Л.Л. Автоматизированный расчет нормальных сечений железобетонных конструкций. - Сборник научных трудов. В кн.: Экспериментальные и теоретические исследования конструкций, полносборных общественных зданий. - М.: ЦНИИЭП жилища. - 1985. - С. 83-93.
283. Паньшин Л.Л. Диаграмма момент-кривизна при изгибе и внецентренном сжатии. //Бетон и железобетон. – 1985. - № 11.
284. Паньшин Л.Л., Карабанов Б.В. Практическая методика определения кривизны железобетонных стержневых элементов на стадии разрушения. //Экспресс-информация. ЦНТИ по гражданскому строительству и архитектуре. - М., - 1983. - С. 10-14.
285. Паршин Л.Ф., Смирнов О.Г. О расчете железобетонных стержневых систем по деформированной схеме. //Бетон и железобетон. – 1973. - № 6. - С. 21-24.
286. Пересыпкин Е.Н., Пузанков Ю.И., Починок В.П. Метод построения диаграмм деформирования сжато изгибаемых элементов. //Бетон и железобетон. - 1985. - № 5. - С. 31-32.
287. Пирадов А.Б., Аробелидзе В.И., Хуцишвили Т.Г. К расчету несущей способности внецентренно-сжатых элементов. //Бетон и железобетон. – 1986. № 1.
288. Подольский Д.М. Пространственный расчет зданий повышенной этажности. - М., Стройиздат. – 1975. - 157 с.
289. Попов Н.Н., Трекин Н.Н., Матков Н.Г. Влияние косвенного армирования на деформативность бетона. //Бетон и железобетон. -1986.-№ 11.-С. 33-34.
290. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Кумпяк О.Г. Расчет железобетонных элементов на кратковременные динамические нагрузки с учетом реальных свойств материалов.// Строительная механика и расчет сооружений. - 1979.- № 3. - С. 43-46.

291. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С. Расчет железобетонных элементов на кратковременные динамические нагрузки с учетом реальных свойств материалов. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. - № 3.
292. Потапов В.Н., Егоров М.И. Механика деформирования строительной стали при одноосном растяжении. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. - № 5. - С. 56-60.
293. Пресняков Н.И., Сенин Н.И. Кручение ядер жесткости высотных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. - № 5. - С. 72-74.
294. Прокопович А.А. К определению зависимости напряжение-деформация с ниспадающим участком для бетона при сжатии. //В кн.: Железобетонные конструкции. – К.: Куйбышевский ИСИ. - 1979. - С. 33-39.
295. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том I. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г.Пановко. - М. Издательство "Машиностроение". – 1968. – 829 с.
296. Проценко А.М. Теория упругих идеально-пластических систем. - М.: Наука. – 1982. - 287 с.
297. Рабинович Р.И., Богданов А.А., Карповский М.Б. Комбинированные перекрытия с применением стальных профилированных листов для тяжелых нагрузок. //Бетон и железобетон. - 1984 - № 11.
298. Расторгуев Б.С. Прочность железобетонных конструкций зданий взрывоопасных производств и специальных сооружений, подверженных кратковременным динамическим воздействием. Дисс. на уч. степень доктора техн. наук. – М., - 1988. – 320 с.
299. Ржаницын А.Р. Расчет сплошных конструкций методом упругих сосредоточенных деформаций. //Строительная механика и расчет сооружений. - 1980. - № 5. - С. 15-20.
300. Ржаницын А.Р. Строительная механика.-М.: Высшая школа.-1982.-399 с.
301. Ржаницын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций. - М.: Госстройиздат. - 1948. - 192 с.
302. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. - М.: Стройиздат. - 1986. - 316 с.
303. Ржаницын А.Р., Захаров В.М. Расчет составных стержней из неупругого материала с неупругими связями сдвига. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1974. - № 1. - С.16-18.
304. Раззаков С.Р. Поведение составных оболочек при высоких уровнях загрузки с учетом предыстории нагружения. //Бетон и железобетон. - 1992. - № 9. - С. 23 – 25.
305. Ржевский В.А. Упругопластические свойства железобетонных каркасных систем. // Строительство и архитектура Узбекистана. – 1981.-№ 7.- С.6-10.
306. Ржевский В.А., Аванесов Г.А. Параметры предельных состояний железобетонных элементов и рамных каркасов. //Бетон и железобетон. – 1979. - № 6. - С. 17-18.
307. Рискинд Б.Я. Применение высокопрочной сжатой арматура в железобетонных конструкциях. Обзорная информация, сер. 3. – 1980. – 15 с.

- 308. Розенберг М.Я. Деформации и прочность бетонных и железобетонных элементов стен зданий при плоском напряженном состоянии с учетом развития трещин. Диссерт. канд.техн.наук – М., - 1987. - 185 с.**
309. Рокач В.С. Деформации железобетонных изгибаемых элементов. - Киев. - Будивельник. - 1968. - 98 с.
310. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. - М.: Стройиздат. - 1977. - 128 с.
311. Руденко В.В. Работа внецентренно сжатых колонн. //Бетон и железобетон. – 1981. - № 5. - С. 5-6.
312. Руководство по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций. - М., Стройиздат. – 1975. - 193 с.
313. Рюш Г. Исследование работы изгибаемых элементов с учетом упруго-пластических деформаций бетона. Материалы международного совещания по расчету строительных конструкций. - Москва. Стройиздат. - 1961.- С. 183-199.
314. Сапожников А.П. Методы суперэлементов в статике и динамике панельных зданий. //Известия вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1980. - № 9. - С. 33-37.
315. Самуль В.М. О применении операционного исчисления к расчету тонких плит из упруго-вязкого материала // Труды ЛИСИ, вып.29. – Л. - 1958.
316. Семченков А.С., Демидов А.Р., Луговой А.В. Диаграммный метод расчета большепролетных многопустотных плит перекрытий. //Бетон и железобетон. - 2005. - № 6. - С. 5 – 9.
317. Сигалов Э.Е., Протасов В.А. К определению осредненной жесткости железобетонных внецентренно-сжатых элементов. //Бетон и железобетон. – 1971. - № 2. - С. 34-37.
318. Сидорович Е.М., Казачек В.Г., Крючков А.А., Чистяков Е.А. Принципы расчета физически и геометрически нелинейных железобетонных стержневых систем. //Вопросы строительства и архитектуры: Респ. межвед. сб. -Минск. – 1980. - вып. 15. - С. 32-36.
319. Складнев Н.Н.. Оптимальное проектирование железобетонных конструкций с учетом требований экономичности, технологичности, надежности, долговечности: Автор, докт.дисс. – М., - 1978. - 38 с.
320. Складиев Н.Н., Кривов О.Л. Исследование работы железобетонных колонн П-образного сечения. //Бетон и железобетон. – 1984. - С. 31.
321. Сточеляс В.В. расчет изгибаемых железобетонных элементов таврового и двутаврового сечений по деформациям в стадии, близкой к разрушению. //В кн.: Строительные конструкции, Минск, Ин-т стр-ва в арх. Госстроя БССР. – Минск. – 1979. - С. 92-98.
322. Сливкер В.И. К расчету нелинейно-упругих стержневых систем. //Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. - № 6. - С. 2-7.

323. Смирнов Н.В., Гамаюнов Е.И. К расчету центрально сжатых железобетонных элементов. //Бетон и железобетон. - 1973. - № 11. - С. 34-36.
324. Смирнов О.Г. О влиянии кручения перекрытий на прочность и устойчивость многоэтажных зданий. //Строительная механика и расчет сооружений. – М., - 1973. - № 5. – С. 15-18.
325. Смирнов О.Г. Расчет железобетонных конструкций каркасно-панельных зданий на устойчивость и по деформированной схеме. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. - М., МИСИ им. В.В. Куйбышева. – 1973. – 15 с.
326. СНиП 2.03.01-84\*. Железобетонные конструкции. Нормы проектирования. - М.: Стройиздат. - 1985. - 79 с.
327. СНиП 2.01.07-84 Строительные нормы и правила. Нормы проектирования. Нагрузки и воздействия. - М., - 1986. - 34 с.
328. Соколов М.Е., Аграновский В.Д. Прочность и трещиностойкость железобетонных перемычек панельных стен при действии поперечных сил. //Бетон и железобетон. – 1971. - № 11. - С. 22-24.
329. Соколов М.Е., Шустерман М.Я. Экспериментальные исследования работы перемычек наружных стеновых панелей. //В кн.: Работа конструкций жилых зданий из крупноразмерных элементов. - М.: Стройиздат. Сб.тр. ЦИИЭП жилища. – 1971. - С. 215-223.
330. Семенюк С.Д. К Расчету прочности пространственных сечений железобетонных элементов прямоугольного профиля // Зб. наукових праць РДТУ: Ресурсо-економні матеріали, будівлі та споруди, вып. 7, - Рівне, 2001 – с. 198 - 206.
331. Сенин Н.И., Кияшко В.Ю. Исследования плит, опертых по контуру в условиях обжатия в своей плоскости // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. - №3. – С. 20-22.
332. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. Кн. I. Под ред. А.А.Уманского. Изд. 2-е. – М.: Стройиздат. – 1972. - 600 с.
333. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. В двух книгах. Кн. 2. Под ред. А.А. Уманского. Изд. 2-е, прераб. и доп. - М., Стройиздат. – 1973. - 416 с.
334. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. –М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. - 1960. - 1040 с.
335. Супоницкий Л.И. Расчет методом конечных элементов тонких железобетонных пластин и оболочек в физически нелинейной постановке. //Составные железобетонные оболочки.-М., МНИИТЭП.- 1983. - С. 74-90.

336. Темикеев К. исследование деформативности сборных перекрытий в своей плоскости, как горизонтальных диафрагм многоэтажных каркасных зданий. Автореф. канд.дисс.–М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева.-1974.-18 с.
337. Темикеев К. К вопросу расчета составных стержней строительных конструкций. //В кн.:железобетонные конструкции в сейсмостойком строительстве. – Фрунзе. Сборник трудов ФПИ. – 1980. – С.25-29.
338. Темикеев К., Джансериков Т.Д., Жумуков С. Аналитическое представление диаграмм работы бетона при различных длительностях загрузки. //Научно-периодическое издание «Вестник» КГУСТА им. Н. Исанова. № 2. – Бишкек. – 2009. – С. 45-49.
339. Темикеев К., Стамалиев А.К. Экспериментальные исследования пространственной работы плит перекрытий при действиях вертикальной нагрузке. //Сборник трудов КАСИ. № 2. – Бишкек. – 1994. – С. 38-43.
340. Темикеев К.Т., Адыракаева Г.Д. Экспериментально-теоретические исследования предельных состояний ячейки сборного железобетонного перекрытия при перекосе. //Строительная наука. Проблемы и решения. Сборник научных трудов КыргызНИИПстр-ва. – Бишкек. - Илим. – 2000. – С. 78-82.
341. Темикеев К.Т., Адыракаева Г.Д. Экспериментально-теоретические исследования предельных состояний диска перекрытия с учетом реальных диаграмм деформирования бетона. //Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Материалы международного научно – практического конференции посвященной к 45 – летию образ. Строительного факультета. Часть I. – Бишкек. – 2000. – С. 38-41.
342. Темикеев К.Т., Адыракаева Г.Д. Экспериментально-теоретическое исследование работы фрагмента междуэтажного перекрытия как горизонтальной диафрагмы жесткости. //Современное состояние и перспективы развития строительной науки. Часть II. – Бишкек. – 2000. – С. 66-69.
343. Темикеев К.Т., Джансериков Т.Д. Исследование предельных состояний железобетонных плит при длительном действии нагрузки. //Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Материалы международного научно – практического конференции посвященной к 45 – летию образ. Строительного факультета. Часть II. – Бишкек. – 2000. – С. 52-59.
344. Темикеев К.Т. К вопросу учета длительности действия нагрузки при определении прогиба железобетонных изгибаемых элементов // Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. - Бишкек. – 2000. – С. 17-19.
345. Темикеев К.Т., Стамалиев А.К. К вопросу определения физико-механических характеристик бетона железобетонных конструкций комплексным методом. //Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Материалы международного научно – практического конференции посвященной к 45 – летию образ. Строительного факультета. Часть II. – Бишкек. – 2000. – С. 31-34.



346. Темикеев К.Т. Расчет горизонтальных диафрагм (перекрытий) многоэтажных каркасных зданий как многопролетных неразрезных составных балок. //Труды ФПИ. Вып. № 110. – Фрунзе. – 1978. – С. 3-10.
347. Темикеев К.Т. Совместная работа сборных железобетонных перекрытий, опертых по контуру. //Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Материалы международного научно – практического конференции посвященной к 45 – летию образ. Строительного факультета. Часть II. – Бишкек. – 2000. – С. 25-30.
348. Темикеев К.Т., Стамалиев А.К. Исследование предельных состояний плит перекрытий при совместном действии изгиба с кручением. //Современное состояние и перспективы развития строительной науки. Часть II. – Бишкек. – 2000. – С. 14-18.
349. Ханджи В.В. Расчет многоэтажных зданий со связевым каркасом. – М.: Стройиздат. – 1977. – 187 с.
350. Чирков В.П. К расчету статически неопределимых армополимеробетонных и железобетонных балок с применением случайных функций. //Межвузовский сборник. – М.: МИИТ. – 1984. - № 752. – С. 55-61.
351. Шубик А.В., Чистяков Е.А. Деформации и несущая способность сжатых элементов при длительном действии нагрузки. //В кн.: Предельные состояния элементов железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат. НИИЖБ. - 1976. - С. 175-193.
352. Шишов И.И. Определение жесткостей железобетонной плиты. //Бетон и железобетон. - 2006. - № 2. - С. 23 – 28.
353. Фролов А.К., Кондратьев В.А., Гассан Башир. Перераспределение усилий в неразрезных железобетонных плитах покрытий // Бетон и железобетон. М., - 1991. – С. 12-15..
354. Янкелевич М.А., Михайличенко А.В. Экспериментальные исследования железобетонных плит со смешанным армированием из бетона на ВНВ // Материалы XXIII Международной конференции в области бетона и железобетона. – М.: Стройиздат. 1991. – С. 424 – 425.
355. Янкелевич М.а. Железобетонные изгибаемые элементы со смешанным армированием (экспериментальные исследования, расчет, оптимизация) / Киев. НИИСП. – 1990. – 35 с.
356. Яров В.А. Влияние сопротивления перекрытий деформированию из плоскости на работу несущей системы многоэтажного здания. Канд. дисс., - М.: МИСИ. – 1977. - 160 с.
357. Яшин А.В. Некоторые данные о деформациях и структурных изменениях бетона при осевом сжатии. //Новое о прочности железобетона. - М.: Стройиздат. - 1977. - С. 17-30.
358. Яшин А.В. Рекомендации по определению прочности и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях. - М.: НИИЖБ. - 1985. - 72 с.
359. Яшин А.В. Прочность и деформации бетона при различных скоростях нагружения. - В кн.: Воздействие статических, динамических и

- многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций. - М.: НИИЖБ. - 1972. – С. 25-30.
360. Ящук В.Е. К описанию диаграммы сжатия и разгрузки бетона. //Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1982. – С. 35-42.
361. Ashour H.A., Sobel L.H. Buckling of prismatic structures under biaxial loading. //Computers and structures. – 1980. - v. 12. – N. 5. - p. 749-758.
362. Basu A.K., Nagpal A.K. Frame-wall systems with rigidity jointed link beams. //Proceedings of the American Society of Civil Engineers. - 1980. - v. 106. - NST. 5. - p. 1175-1190.
363. Beal A.N. The Design of slender Columns. //Proceeding of the Institution of Civil Engineers. – 1986. - v. 81, part 2, September. - p. 397-414.
364. Cakiroglu A. Zur Berechnung von durchbrochenen tragenolen Wänden unter horisontaler Belastung. //Beton-und stahlbetonbau. – 1974. – N. 6. - s. 143-148.
365. Chan H.C., Cheung Y.K. Lateral and torsional analysis of spatial wall systems using higher order elements. //Structural Engineer. – 1980. - v. 58 B. – N. 3. - p. 67-70.
366. Chan P.C., Foutch D.A. Static and Dynamic Modeling and Analysis of Tube Frames. //J. Of Structural Engineering. – 1984. - v.110. – N. 12. - p.2955-2975.
367. Chan P.S.K., Tso W.K., Heidebrecht A.C. Effect of normal frames and shear walls. //Building Science. – 1974. - v. 9. - N. 3. - p.197-210.
368. Cheung-Tzu Thomas, Mirsa M., Saeed, SeaG.S. Sunny. Nonlinear analysis of reinforced concrete frames. //Comp. And Struck. – 1981. – N. 3. - p.223-227.
369. Cheng-Tzu-Hsu, M.Sand Mirsa. An Experimental-Analysis Study load Deformation Characteristics of Concrete Compression Members. //Symposium Design and Safety of Reinforced Concrete Compression Member, October. – 1977. – N. 16. – p. 113-118.
370. Choi C.K., Kim E.D. Multistory Frames under secvertical Gravity Loads. //J. of. Structural Engineering. – 1985. - v. 111. – N. 11. - p.2373-2384.
371. Coull A., Chouldhary J.R. Stresses and deflections in coupled shear walls. //J. of the American Concrete Institute. – 1967. - v. 64. – N. 2. - p.65-72.
372. Coull A. Interaction between coupled shear walls and cantilevered cores in threedimensional regular simmetrical crosswall structures. //Proceeding of the Institution of Civil Engineers. – 1973. - v. 55. – N. 12. - p.827-840.
373. Coull A. Pierced shears walls of stepwise variable thickness. //Proceedings of the American Society of Civil Engineers. – 1974. - v. 100. – NST. 5. - p. 1157-1161.
374. Coull A. Irwin A.W. Analysis of load distribution in multistory shear walls structures. //The Structural Engineer. – 1970. - v. 48. – N. 8. - p.301-306.
375. Coull A., Low C.K. Analisis of stiffened nonlanar conpled shear walls. //Proceedings of the Institution of Civil Engineers. – 1979. - v. 67. - part 2. - p.971-986.
376. Dimitrijevic R. Sisteme „ouvert“ precontraint yougoslave. //Batiment internacional. – 1978. - v. 6. – N. 4. - p. 244-249.

377. Drosdow P.F., Dodonow M.J., Kiersztiejn S.J. Statika Budunku trzonowego ze Wspotpracnjacymi stupami. //Warschawa, Inzynieria i Budovnictwo. – 1976. – N. 9. - p. 343-347.
378. Dundar G., Mengi Y., Kirai E. A Higher order continuum Model for the dynamic Shear Behavior of multistory Frames. //Earthquake Engineering & Structural Dynamics. – 1984. - v. 12. – N. 6. - p. 761-77.
379. Elkelish S., Robinson H. Effective width of composite beams with ribled metal deck. //Canadian J. of Civil engineering. – 1986. - v. 13. – N. 5. - p. 575-582.
380. Emori K. Schonobrich W.C. Inelastic behavior of concrete frame-wall structures. //Proceedings of the American Society of Civil Engineers. – 1981. - v. 107. - NST. 1. - p. 145-164.
381. Ford J.C., Chang D.C., Breen J.E. Behavior of concrete columns under controlled lateral deformations. //Journal of the American Concrete Institute. – 1981. - v. 78. – N. 1. - p. 3-20.
382. Ford J.C., Chang D.C., Breen J.E. Behavior of unbraced multipanel concrete frames. //Journal of the American Concrete Institute. – 1981. - v. 78. – N. 2. - p. 99-115.
383. Franchi A., Cohn M.Z. Computer Analysis of Elastic-Plastic Structures. //Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 1980. - v. 21. – N. 3. - p. 271-294.
384. Graubner C.A., Scholz U. Zum Knicksicherheitsnachweis Stahlbetondruckglieder mit Knicklangenbeiwert  $\beta$  2. //Beton – und stahlbetonbau. – 1986. – N. 8. - s. 217-220.
385. Hähner I., Pietsch W. Stahlbetonskelettbauserie SKBS 75 Durchführung und Auswärtung desMuster – und Experimentalbaus. //Bauplanung-Bautecnic. – 1977. – N. 1. - s. 18-22.
386. Horacek E. Räumliche Scheiben-systeme mit Öffnungsreihen bei Hochbauten. //Der Bauingenieur. – 1970. - N 12. – 1974. – N. 3.
387. Korriaff A.R., Fenves S.J. Symbolic of finite elements stiffness matrices. //Computer and structures. – 1979. - v. 12. – N. 1-2.
388. Kuhn H. Nen-und Weiterentwickelte Fertigteilsortimente des VEB Betonleichtbaukombinat-eis. Beitrag zur weiteren Intensivierung. //Bauplanung-Bautechnik. - 1986. – N. 4. - s. 162-165.
389. Moudarres F.R., Coull A. Stiffening of linked shear walls. //J. of Engineering Mechanics. – 1986. - v. 112. – N. 3. - p. 223-237.
390. Rad F.N., Furlong R.W. Rehavior of unbraced Concrete Frames. //J. Amer. Concr. Inst. – 1980. - v. 77. – N. 4. - p. 269-278.
391. Rash C. Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannugsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanten Dehngeschwindigkeit. //Deutscher Ausschuss für sthlbeton. - N. 154. – Berlin. – 1962. – 72 p.
392. Rosman R. Stabilität im Grundriß unszmmetrischer stütyen und Wandscheibensysteme. //Bautechnik. – 1980. – N. 1. - s. 21-32.
393. Rosman R. Beitrag zur Erfassung des Einflusses der Schlankheit und Lotobweichung bei Grundriß symmetrischen scheidensystemen des Hochbaues. //Beton-und stahlbetonbau. – 1971. – N. 12. - s. 295-298.

394. Rubin H. Das Drehverschiebungsverfahren zur Vereinfachten Berechnung verchieblicher Stockwerkpaßmennach Theorie I. Und II Ordnung. //Bauingenier. - 1984. – N. 12. - s. 467-476.
395. Rutenberg A., Sharkman M., Eisenberger M. Torsional Analysis Methods for perforated Cores. //J. of structural Engineering. – 1986. - v. 112. – N. 6. - p. 1207-1227.
396. Sakai K., Kakuta Y. Moment-Curvature relationships of Reinforced concrete. //Journ. Amer. Concrete Inst. – 1980. - v.77. – N. 3. - p. 336-342.
397. Scordelis A.C. Computer Models for nonlinear analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures. //J. of. Prestressed Concrete Inst. – 1984. - v. 29. – N. 6. - p. 116-132.
398. Simites J.G., Vlahios A.S., Simites G.J. Sway Buckling of unbaced Multistorey Frames. //Computers and Structures. – 1986. - v. 22. – N. 6. - p. 1047-1054.
399. Thomas W., Fest E. Spannbetonriegel der SKBS 75 mit nachtraglichem Verbund. //Betontechnik. – 1986. – N. 2. - s. 45-46.
400. Twelmeier H., Bauch S. Versuche zum Grenzverformungsvermögen von stahlbetonrahmen. //Bauingenieur. – 1980. – N. 11. - s. 409-417.
401. Wieja K. Einheitliches Konstruktives System für gesellschaftliche Bauten auf der Grundlage SKBS 75 /WBS 70. //Bauinformation. DDR. – 1976. – N. 36. - s. 25-30.
402. Wood B.R., Adams P.F. Column desing by P-delta method. //Proc. Amer. Soc. Civil bngrs. – 1976. – 11. - v. 102. – NST. 2. - p. 411-427.