Министерство образования и науки Кыргызской Республики
Кыргызский Технический Университет им. И.Раззакова
Кафедра “Механика”

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов заочного обучения энергетических, электроприборостроения и автоматизации, менеджмента и технологических специальностей.

Бишкек 2012

Составители: ПОПОВ Б.Г., ЧЫНЫБАЕВ М.К., БЕРДИКОЖОЕВ К.Б.

Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов заочного обучения энергетических, электроприборостроения и автоматизации, менеджмента и технологических специальностей (переработанное издание)

Ил. - 15, табл. - 9, список лит-ры – 9 наим.

Рецензент: профессор кафедры механики Кыргызко – Российского (Славянского) Университета, д.ф.-м.н. Рычков Б.А.

Рассмотрено
на заседании кафедры
механики
Пр.№ 13 от. 29.06.2012

Одобрено
Методическим советом
Факультета транспорта
и машиностроения
Пр №_от.__________

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика является одной из фундаментальных общенаучных дисциплин инженерного образования.

Преподавание теоретической механики в вузе преследует широкие цели.

Во-первых, теоретическая механика наряду с математикой и физикой способствует формированию у студентов научного мировоззрения, развивает их логическое мышление, приводит к пониманию весьма широкого круга явлений, относящихся к одной из основных форм движения материи - механическому движению. Теоретическая механика впервые дала возможность раскрывать и познавать реальные явления, происходящие в окружающем нас мире. Благодаря теоретической механике получили развитие многие другие области физики, математики, что оказало влияние и на развитие химии, биологии, геологии и других наук, в результате чего роль теоретической механики особенно велика в развитии техники.

Во-вторых, теоретическая механика и рассматриваемые в ней задачи тесно связаны с применением математического аппарата, что способствуют развитию математического мышления студентов и приобретению ими практических навыков, умению пользоваться ЭВМ. Курс теоретической механики - это, по - существу, первый курс в учебном плане вуза, где студенты учатся понимать столь важные, хотя внешне, может быть, простые физические процессы и явления, где они впервые видят, как, используя соответствующий математический аппарат, можно решить конкретные задачи, связанные с техникой. Здесь студенты приобретают навыки качественно и количественно оценивать рассматриваемые явления и процессы, учатся упрощать задачу, сохраняя ее основное содержание.

В-третьих, теоретическая механика является базой современной техники, законы и методы теоретической механики служат фундаментом многих практических исследований. Теоретическая механика формирует инженерное мышление студента, наводит своеобразный мост между прикладными науками, физикой и математикой. Ныне все отрасли техники быстро развиваются и непрерывно обогащаются все новыми и новыми объектами, для освоения которых инженер должен иметь не столько узкую специальную практику, сколько подготовку в области фундаментальных общетеоретических дисциплин, в том числе и в области теоретической механики. Это особенно ощущается в разделах специальных инженерных дисциплин, в которых изучаются электрические машины, станции и подстанции, процессы обработки металлов давлением, вопросы автоматического управления, автоматизации и комплексной механизации различных производств, проблемы осуществления различных технологических процессов и управления ИМИ, и многих других технических направлений.

2. ПРОГРАММА КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. Введение. Предмет и задачи механики. Механическое движение как одна из форм движения материи. Математическое моделирование как метод исследования механического движения и механического, взаимодействия материальных тел. Основные модели реал тел - материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная среда. Содержание разделов механики. Теоретическая механика как одна из фундаментальных физико-математических наук; ее мировоззренческое значение и место среди других естественных и технических наук. Значение теоретической механики как научной базы большинства областей современной техники. Значение механики для специалистов данного профиля (детализируется в рабочей программе). Основные исторические этапы раз вития механики.

РАЗДЕЛ I. КИНЕМАТИКА

2. Предмет кинематики. Пространство и время классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки

3. Три способа задания движения точки - векторный, координатный, естественный. Кинематические уравнения движения точки при векторном, координатном и естественном способах движения, определение траектории точки.

Кинематические параметры движения точки — скорость и ускорение. Вычисление скорости и ускорения точки при различных способах задания ее движения. Естественные оси. Касательное и нормальное ускорения и их физический смысл. Классификация движений точки по ее ускорению.

Кинематика твердого тела

5. Задачи кинематики твердого тела. Виды движений твердого тела. Теорема о равенстве проекций скоростей точек тела как следствие модели абсолютно твердого тела.

6. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела при поступательном движении.

7. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнения вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорости и ускорения точек вращающегося тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Векторные выражения скорости и ускорения вращающегося тела.

8. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Свойства плоского движения тела и его уравнения движения. Разложение плоского движения тела на поступательное и вращательное; независимость угловой скорости тела от выбора полюса. Определение скорости точек тела при плоском движении. Мгновенный центр скоростей (МЦС) и способы его определения. Применение МЦС для нахождения мгновенной угловой скорости тела и скоростей точек тела. Определение ускорений точек тела при плоском движении.

Кинематика сложного движения точки

9. Анализ и синтез движений. Абсолютное, относительное и переносное движения. Задача кинематики сложного движения точки. Производная от вектора, заданного в подвижной системе отсчета. Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений. Кориолисово ускорение.

РАЗДЕЛ II. КИНЕТИКА

10. Предмет кинетики. Основные понятия: масса, материальная точка, пара сил, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая. Аксиома параллелограмма сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Связи и реакции связей. Аксиома освобождаемости от связей. Понятие о силах трения.

Динамика абсолютного движения материальной точки

11. Предмет динамики. Основные законы динамики. Инерциальная система отсчета. Динамические уравнения движения материальной точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения, Две основные задачи динамики. Решение прямой и обратной задач динамики. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям.

Динамика относительного движения материальной точки

12. Динамические уравнения относительного движения материальной точки. Особенности описания движения точки в неинерциальных системах отсчета. Переносная и Кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Введение в динамику системы

13. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему. Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Метод сечений для определения внутренних сил.

14. Момент силы относительно точки и оси. Зависимость между моментом силы относительно оси и точки, лежащей на этой оси. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Распределенные нагрузки. Пара сил и ее свойства. Момент пары как свободный вектор.

15. Масса системы. Центр масс и центр тяжести. Осевые моменты инерции. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Моменты инерция простейших однородных тел.

Общие теоремы динамики.

16. Динамическое уравнение движения механической системы. Теорема о движении центра масс системы. Закон сохранения движения центра масс.

17. Количество движения материальной точки, твердого тела и механической системы. Элементарный и полный импульс силы. Теорема об изменении количества движения системы. Закон сохранения количества движения механической системы.

18. Кинетический момент материальной точки, твердого тела и механической системы относительно полюса и оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента.

19. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движениях тела. Элементарная работа силы и работа силы на конечном пути. Аналитическое выражение элементарной работы силы при векторном координатном и естественном способах описания движения. Работа силы тяжести силы упругости и силы тяготения. Мощность силы. Работа и мощность силы, приложенной к вращающемуся телу. Работа и мощность пары сил. Теорема об изменении кинетической энергии системы. Работа внутренних сил абсолютно твердого тела.

20. Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном Силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей. Закон сохранения механической энергии консервативной механической системы.

Динамика твердого тела

21. Динамические уравнения поступательного движения тела. Динамическое уравнение вращательного движения тела. Теорема о зависимости между кинетическими моментами абсолютного и относительного движений тела. Теорема об изменении кинетического момента тела в относительном движении по отношению к центру масс. Динамические уравнения плоского движения твердого тела.

Статика твердого тела

22. Задача статики. Условия и уравнения равновесия. Зависимость между числом степеней свободы и условиями равновесия. Статически определимые и статически неопределимые задачи.

23. Необходимые и достаточные условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия систем, сходящихся и параллельных сил. Различные формы условий равновесия плоской системы сил. Равновесие системы тел.

24. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Метод кинетостатики. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции.

Элементы аналитической механики

25. Уравнения связей. Классификация связей по виду уравнений голономные, стационарные, удерживающие. Возможные (виртуальные) перемещения системы. Число степеней свободы системы. Виртуальная работа силы в пары сил. Идеальные связи.

26. Принцип возможных перемещений; общее уравнение статики. Принцип Даламбера-Лагранжа; общее Уравнение динамики.

27. Обобщенные координаты и обобщенные скорости. Выражение элементарной работы силы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и способы их вычисления. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах - уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа для консервативной системы. Кинетический потенциал.

Линейные колебания системы

28. Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле: Собственные колебания механической системы с одной степенью свободы и их свойства.

29. Вынужденные колебания системы при гармонической возмущающей силе. Коэффициент динамичности. Явление резонанса.

30. Влияние сил линейного сопротивления на собственные и вынужденные колебания системы. Апериодическое движение.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Выбор вариантов и порядок выполнения работ

Студенты обучающиеся по сокращенной программе выполняют одну контрольную работу: задачи С1, К2, Д1,Д4.

Остальные задачи выдаются дополнительно на усмотрение преподавателя.

К каждой задаче даются рисунки и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последний; например, если шифр оканчивается числом 46, то берет рис.4 и условия №6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной станице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывать). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получится более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие этим требованиям, проверяться не будут, и будут возвращаться для переоформления.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

СТАТИКА

Задача С1. Определение реакций опор твердого тела

Жесткая рама (рис. С1.0-С1.9, табл. С1 закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню ВВ,, или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

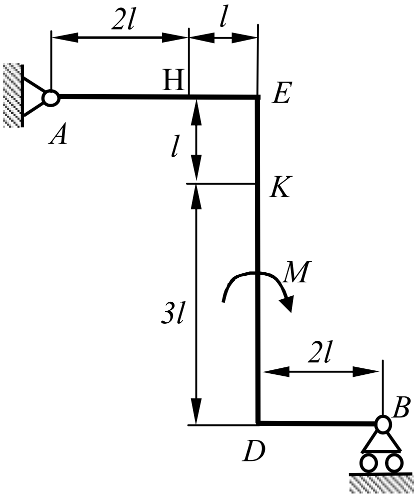


Рис. С1.0

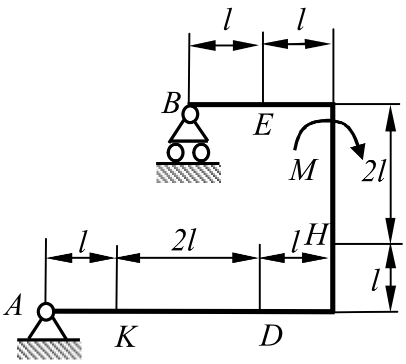


Рис. С1.1

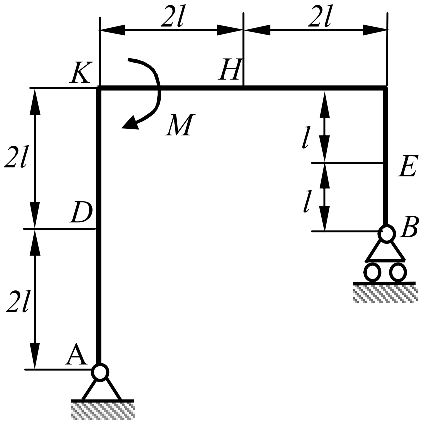


Рис. С1.2

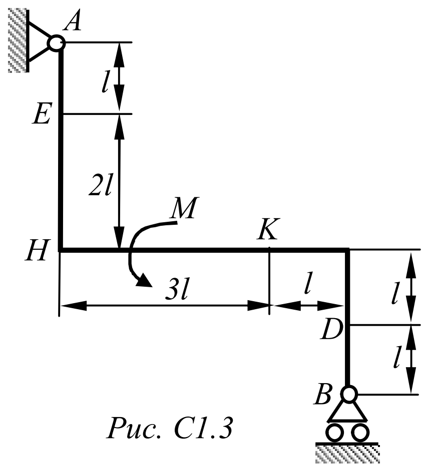


Рис. С1.3

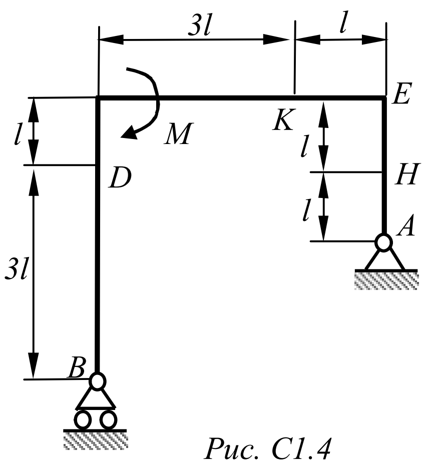


Рис. С1.4

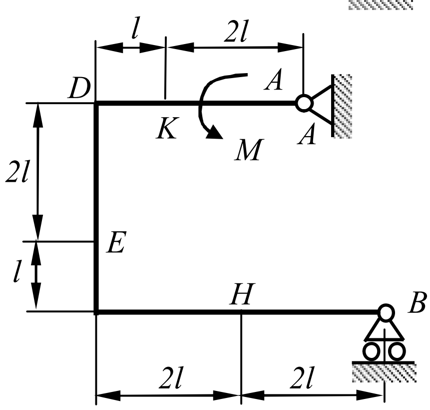


Рис. С1.5

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

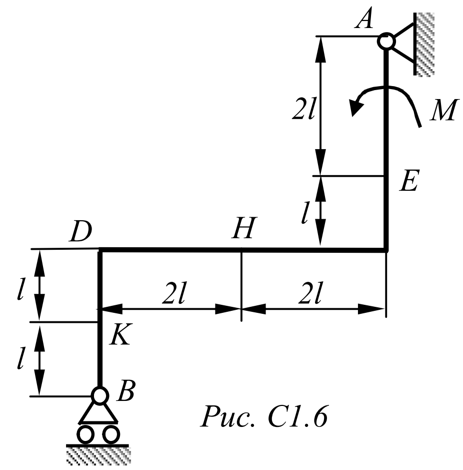


Рис. С1.6

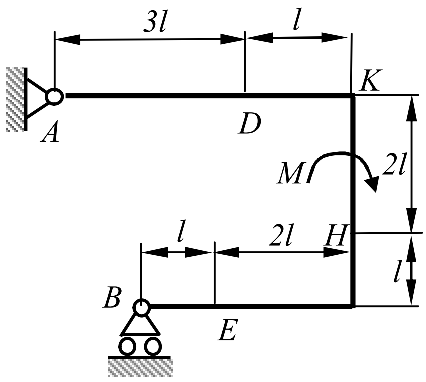


Рис. С1.7

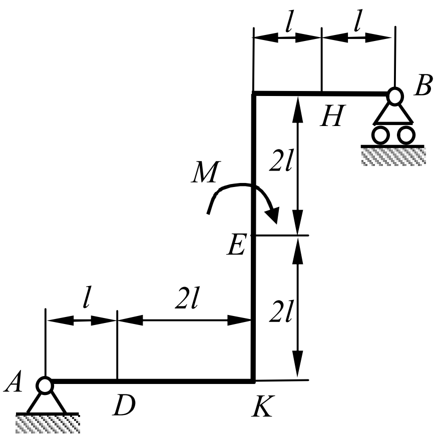


Рис. С1.8

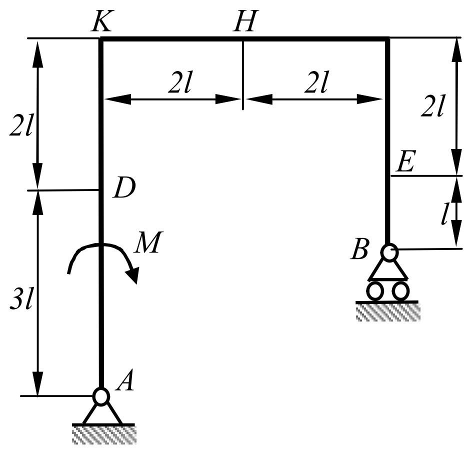
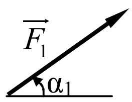
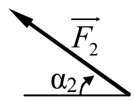
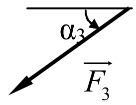
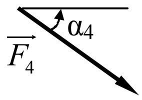


Рис. С1.9

Таблица С1

Сила								
	F_1 =10 Н		F_2 =20 Н		F_3 =30 Н		F_4 =40 Н	
Номер условия	Точка прилож.	α_1°	Точка прилож.	α_2°	Точка прилож.	α_3°	Точка прилож.	α_4°
0	-	-	*D*	60	*E*	45	-	-
1	*K*	30	-	-	-	-	*H*	60
2	-	-	*H*	45	*K*	30	-	-
3	*D*	60	-	-	-	-	*E*	30
4	-	-	*K*	30	*E*	60	-	-
5	*H*	60	-	-	*D*	30	-	-
6	-	-	*E*	30	-	-	*K*	45
7	*D*	45	-	-	*H*	60	-	-
8	-	-	*H*	60	-	-	*D*	30
9	*E*	30	-	-	-	-	*K*	60

На раму действуют пара сил с моментом M = 100 Н·м и две силы, значения которых, направления и точки приложения указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила F_1 = 10 Н под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке K, и сила F_4 =40 Н под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке H).

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять l = 0,5 м.

Указания. Задача С1 - на равновесие тела под действием плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данном случае относительно точки A). При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на составляющие F' и F'', для которых плечи легко вычисляются, в частности на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться теоремой

Вариньона; тогда $m_O(\vec{F}) = m_O(\vec{F'}) + m_O(\vec{F''})$

Пример С1. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. С1) имеет в точкой неподвижную шарнирную опору, а в точке В - подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

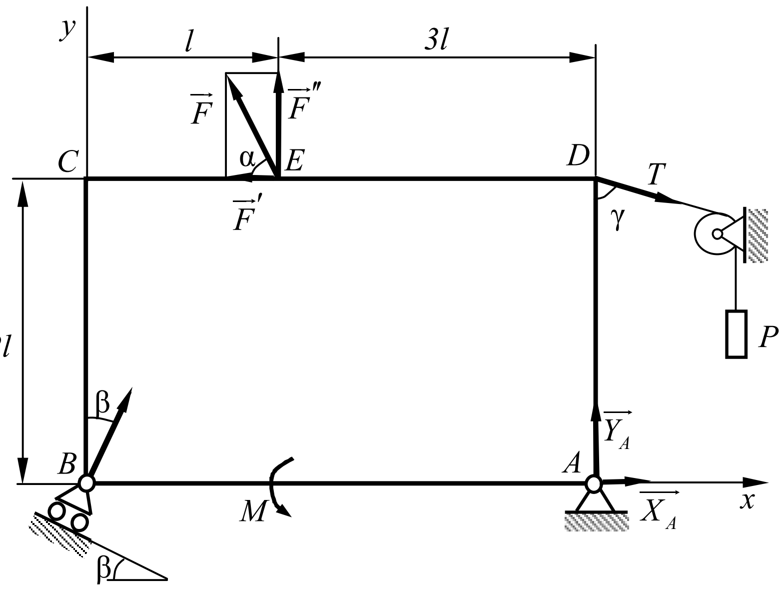


Рис. С1

Дано: F =25 кН, α = 60°, P = 18 кН, γ = 75°, M = 50 кН·м, β=30°, l = 0,5 м.

Определить: реакции в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу F, пару сил с моментом М, натяжение троса T (по модулю $T = P$) и реакции связей X_A, $У_A$, R_B (реакцию неподвижной шарнирной опоры А изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры (на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости,).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы F относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу F на составляющие F' F'' ($F'=F\cos\alpha$, $F''=F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F'}) + m_A(\vec{F''})$. Получим

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad M - R_B \cos\beta \cdot 4l + F\cos\alpha \cdot 2l - F\sin\alpha \cdot 3l - T\sin\gamma \cdot 2l = 0 \qquad (3)$$

Подставив в составленные уравнения, числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: X_A = -8,5 кН, Y_A = -23,3 кН, R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы X_A и Y_A направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С2. Определение реакций опор твердого тела.

Однородная прямоугольная плита весом *P*=5 кН со сторонами *AB=3l*, *BC=2l* закреплена в точке *A* сферическим шарниром, а в точке *B* цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем *CC′* (рис. С2.0-С2.9).

На плиту действует пара сил с моментом *M*=6 кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указанны в табл. С2; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости *xy*, сила $\overline{F}_2$ - в плоскости, параллельной *xz*, сила $\overline{F}_3$ - в плоскости, параллельной *yz*. Точки приложения сил (*D, E, H*) находятся в серединах сторон плиты.

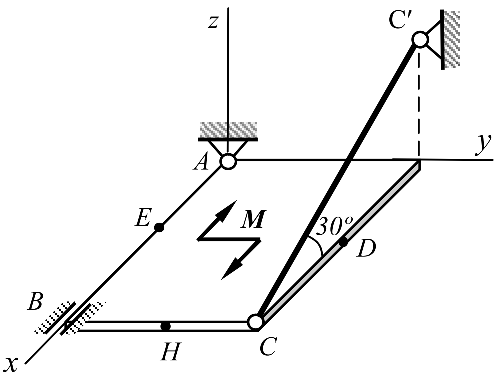


Рис. С2.0

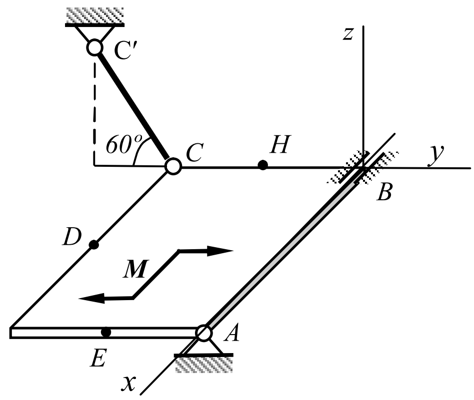


Рис. С2.1

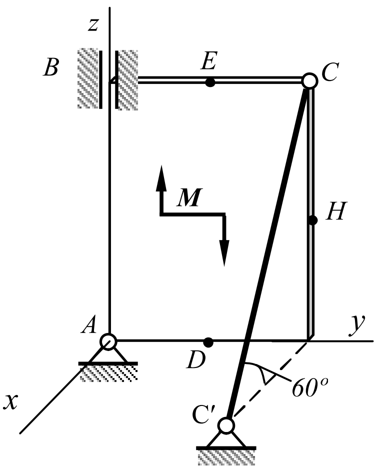


Рис. С2.2

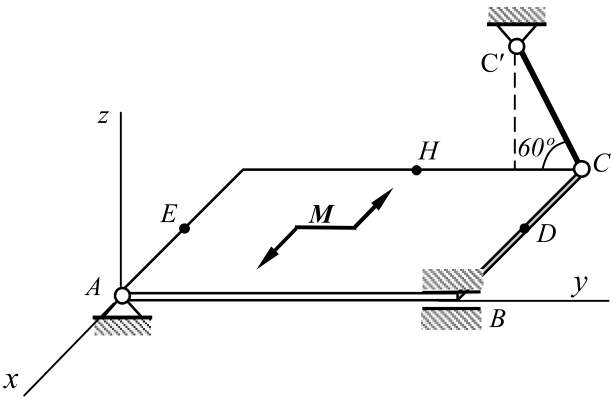


Рис. С2.3

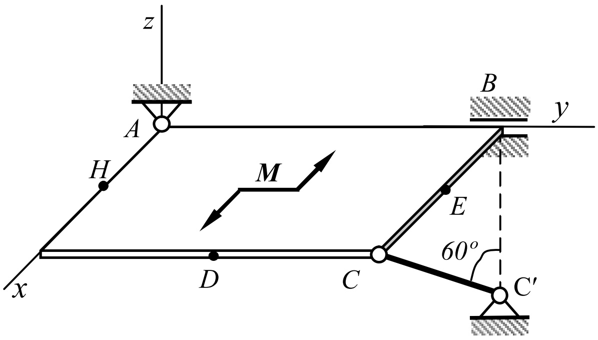


Рис. С2.4

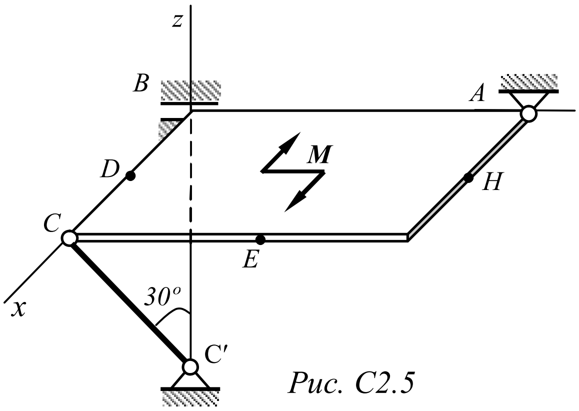


Рис. С2.5

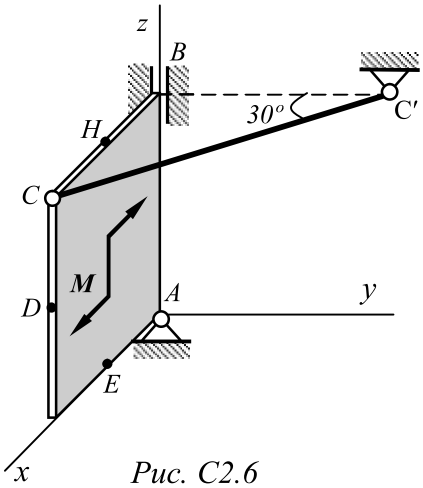


Рис. С2.6

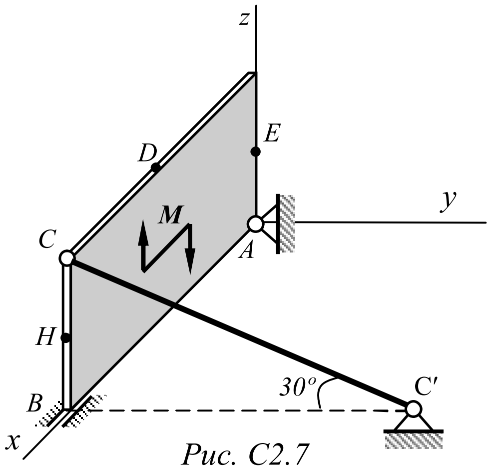


Рис. С2.7

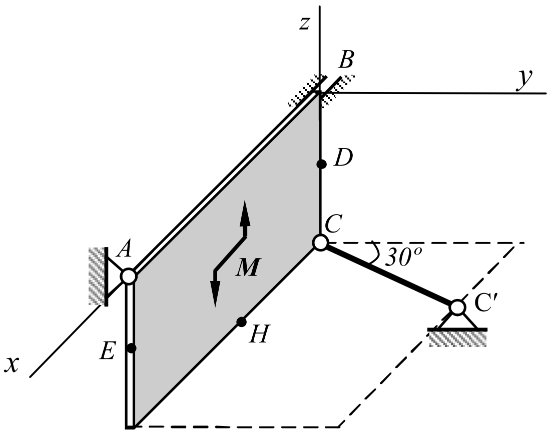


Рис. С2.8

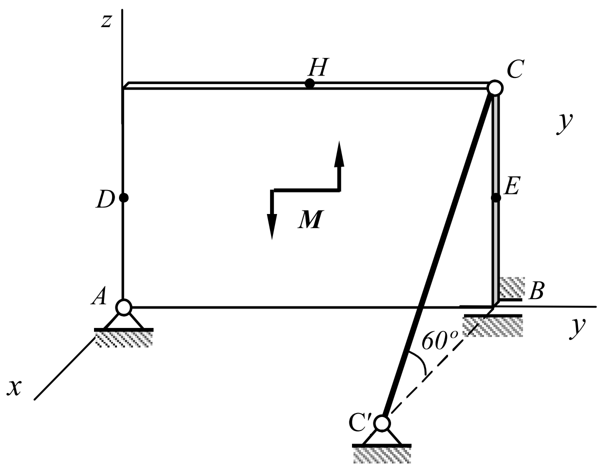


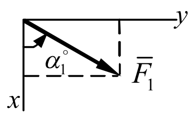
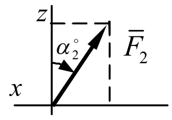
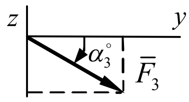
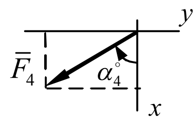
Рис. С2.9

Определить реакции связей в точках A, B и C. При подсчетах принять l=0,8м.

Указания. Задача С2 – на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие, а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов сил $\overline{F}$ тоже часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям; тогда, по теореме Вариньона: $m_x\left(\bar{F}\right) = m_x\left(\bar{F}'\right) + m_x\left(\bar{F}''\right)$ и т.д.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Таблица С2

Сила								
Номер условия	F_1=4 кН		F_2=4 кН		F_3=4 кН		F_4=4 кН	
	Точка прилож.	α_1°	Точка прилож.	α_2°	Точка прилож.	α_3°	Точка прилож.	α_4°
0	*D*	60	-	-	*E*	0	-	-
1	*H*	90	*D*	30	-	-	-	-
2	-	-	*E*	60	-	-	*D*	90
3	-	-	-	-	*E*	30	*H*	0
4	*E*	0	-	-	*H*	60	-	-
5	-	-	*D*	60	*H*	0	-	-
6	-	-	*H*	30	-	-	*D*	90
7	*E*	30	*H*	90	-	-	-	-
8	-	-	-	-	*D*	0	*E*	60
9	-	-	*E*	90	*D*	30	-	-

Пример С2. Вертикальная прямоугольная плита весом *P* (рис. С2) закреплена сферическим шарниром в точке *A*, цилиндрическим (подшипником) в точке *B* и невесомым стержнем *DD'*, лежащим в плоскости, параллельной плоскости *yz*. На плиту действует сила $\bar{F}_1$ (в плоскости xz), сила $\bar{F}_2$ (параллельная оси y) и пара сил с моментом M (в плоскости плиты).

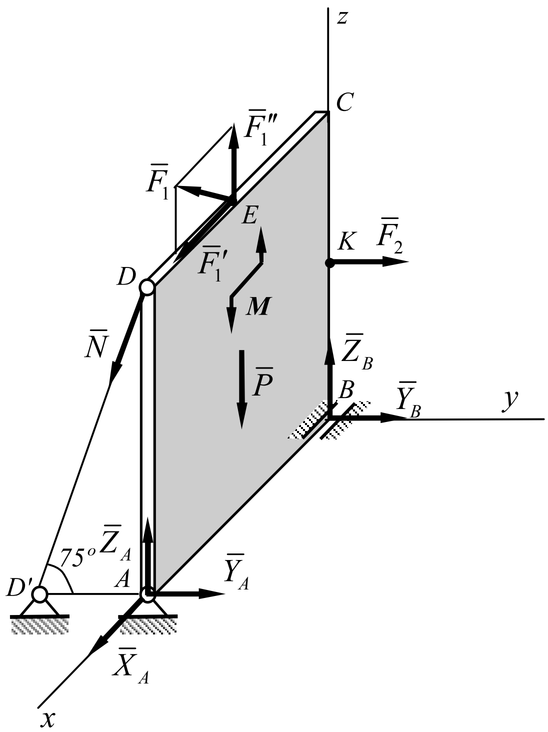


Рис. С2

Дано: *P* = 5 кН, *M* =3 кН·м, F_1=6 кН, F_2=75 кН, α=30º, *AB* = 1 м, *BC* = 2 м, *CE*=0,5*AB*, *BК* = 0,5 *BC*.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы $\bar{P}, \bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и пара сил с моментом, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\bar{Y}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\bar{N}$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + F_1 \cos\alpha = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B + F_2 - P - N\sin 75^\circ + F_1 \sin\alpha = 0, \tag{3}$$

$$\sum m_x\left(\bar{F}_k\right) = 0, \quad -F_2 \cdot BK + N\cos 75^\circ \cdot BC = 0, \tag{4}$$

$$\sum m_y\left(\bar{F}_k\right) = 0, \quad P\frac{AB}{2} + F_1\cos\alpha \cdot BC + F_1 \sin\alpha \cdot \frac{AB}{2} - \tag{5}$$

$$-Z_A \cdot AB + N\sin 75^\circ \cdot AB + M \ =0,$$

$$\sum m_z\left(\bar{F}_k\right) = 0, \quad Y_A \cdot AB - N\cos 75^\circ \cdot AB = 0. \tag{6}$$

Для определения момента силы $\bar{F}_1$ относительно оси y разлагаем $\bar{F}_1$ на составляющие $\bar{F}_1'$ и $\bar{F}_1''$, параллельные осям x и z ($F_1' = F\cos\alpha$, $F_1'' = F_1 \sin\alpha$), и применим теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения, числовые значения всех заданных величин и решив затем эти уравнения, найдем, чему равны искомые реакции.

Ответ: X_A = -5,2 кН, Y_A = 3,8 кН, Z_A = 28,4 кН, Y_B = -7,5 кН, Z_B = -12,4 кН, N = 14,5кН. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A, \bar{Y}_B$ и $\bar{Z}_B$ направлены противоположно показанным на рис. С2.

КИНЕМАТИКА

Задача К1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Точка В движется в плоскости *xy* (рис. К1.0-К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t*- в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0-2 в столбце 2, для рис. 3-6 в столбце 3, для рис. 7—9 в столбце 4). Как и в задачах Cl, С2, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 - по последней.

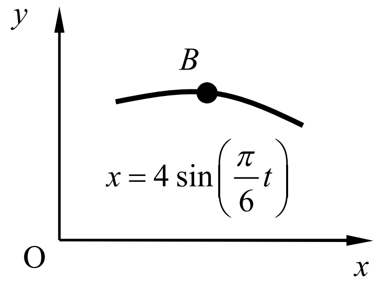


Рис. К1.0

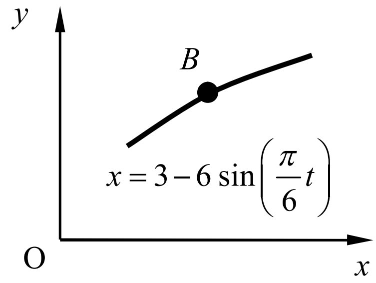


Рис. К1.1

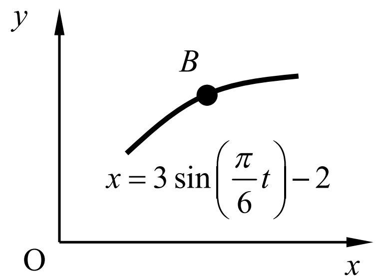


Рис. К1.2

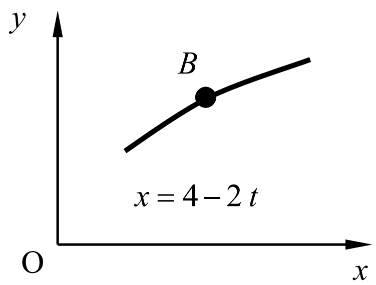


Рис. К1.3

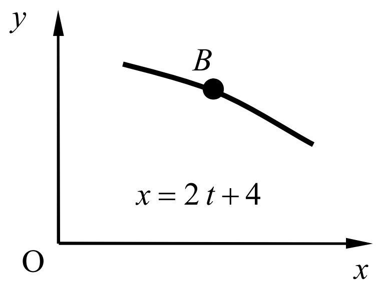


Рис. К1.4

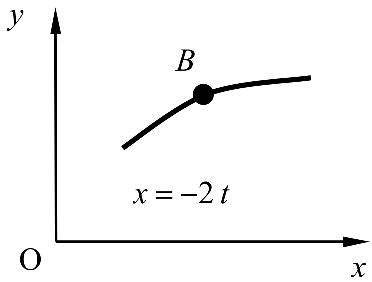


Рис. К1.5

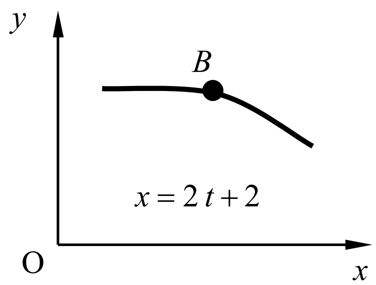


Рис. К1.6

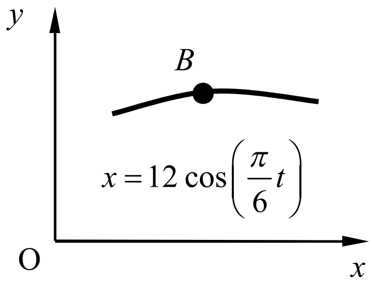


Рис. К1.7

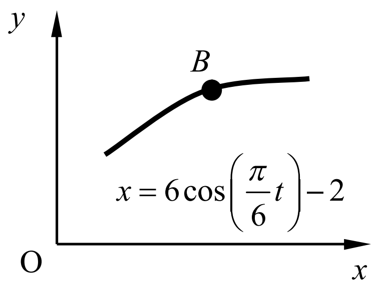


Рис. К1.8

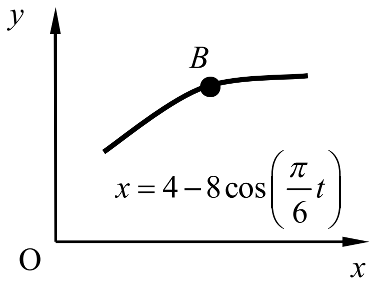


Рис. К1.9

Таблица 1

Номер условия	$y=f_2(t)$		
	Рис. 0-2	Рис. 3-6	Рис. 7-9
1	2	3	4
0	$4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	t^2-2	$-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
1	$2-3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$4-6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4+2t^2$	$12\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2(t+1)^2$	$2-4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+13$
5	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-2$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)-14$
7	$-9\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3-4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-4$	$2t^3$	$4-9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+6$

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1=1с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Пример К1. Даны уравнения движения точки в плоскости *xy*:

$$x=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+3,\quad y=2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)-1$$

(*x, y* - в сантиметрах, *t* - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время *t*. Поскольку *t* входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right) \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (парабола, рис. К1):

$$x = (y+1)^2 + 1 \tag{2}$$

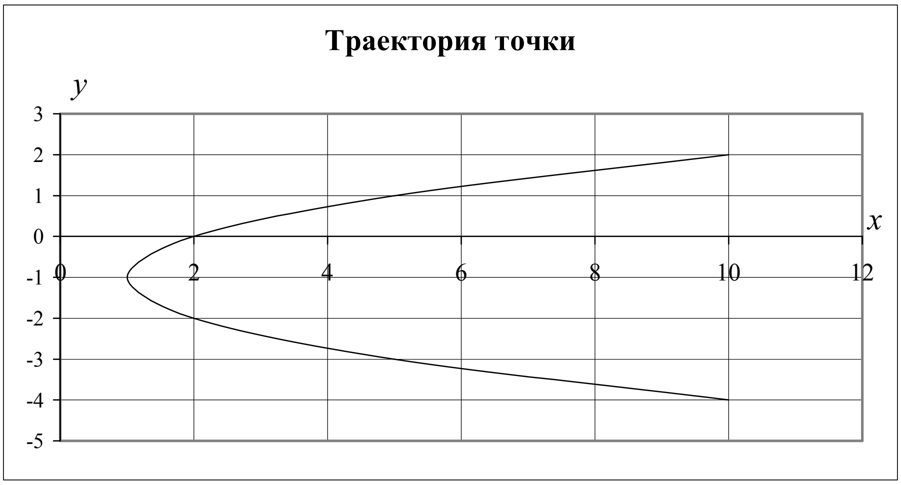


Рис. К1

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$V_x = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

и при t = 1 с

V_{1x}=1,11 см/с, V_{1y}=0,73 см/с, V_1=1,33 см/с. (3)

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при t = 1 с

a_{1x}=0,87 см/с^2, a_{1y} = -0,12 см/с^2, a_1 = 0,88 см/с^2. (4)

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $V^2 = V_x^2 + V_y^2$. Получим

$$2V\frac{dV}{dt} = 2V_x\frac{dV_x}{dt} + 2V_y\frac{dV_y}{dt} \quad \text{и}$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \tag{5}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5) определены и даются равенствами (3) и (4) . Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при t_1=1с $a_{1\tau}$= 0,66 см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1, и $a_{1\tau}$, получим, что при t_1 = 1с a_{1n} = 0,58 см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = V^2 / a_n$. Подставляя сюда числовые значения V_1 и a_{1n}, найдем, что при t_l=1 с ρ_1 = 3,05 см.

Ответ: V_1 = 1,33 см/с, a_1 = 0,88 см/с^2, $a_{1\tau}$ = 0,66 см/с^2, a_{1n} = 0,58 см/с^2, ρ_1= 3,05 см.

Задача К2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0-К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1- r_1=2 см, R_1=4см, у колеса 2 – r_2=6см, R_2=8см, у колеса 3 – r_3=12 см, R_3=16 см. На ободьях колес расположены точки *A*, *B* и *C*.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $V_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, *s* – в сантиметрах, *t*- в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и V_4, V_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1=2с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (*V*-линейные, ω - угловые) и ускорения (*a* – линейные, ε - угловые) соответствующих точек или тел (V_5 – скорость груза 5 и т.д.).

Указания. Задача К2 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связанны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_2, a_A, a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\dot{\varphi}_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

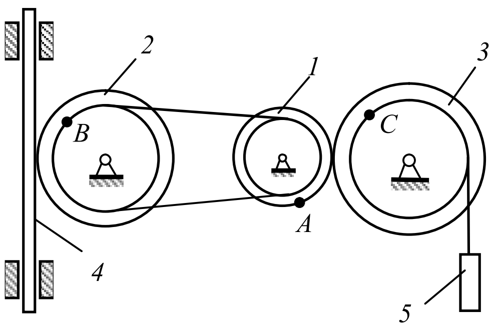


Рис. К2.0

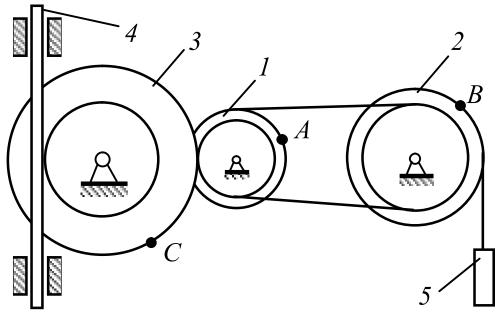


Рис. К2.1

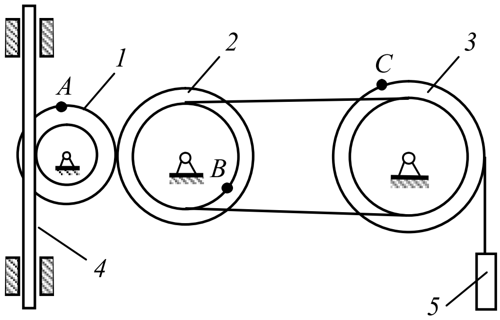


Рис. К2.2

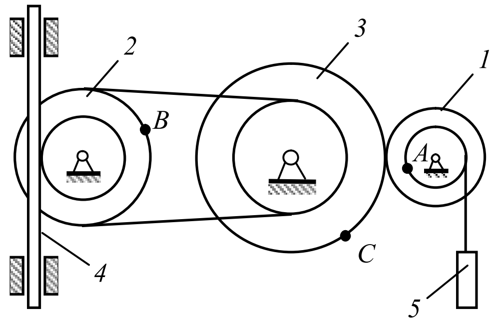


Рис. К2.3

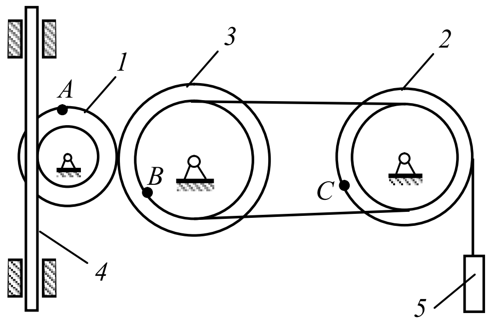


Рис. К2.4

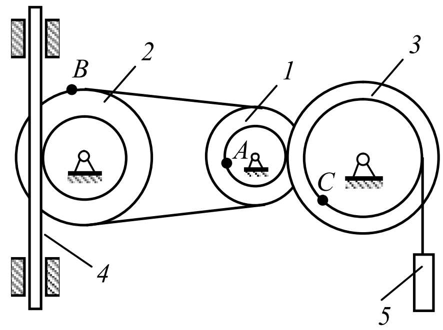


Рис. К2.5

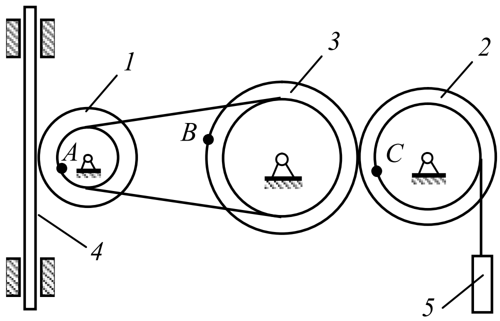


Рис. К2.6

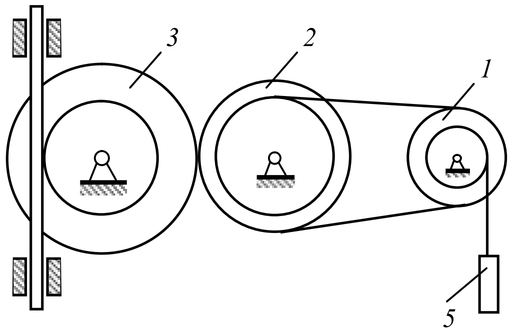


Рис. К2.7

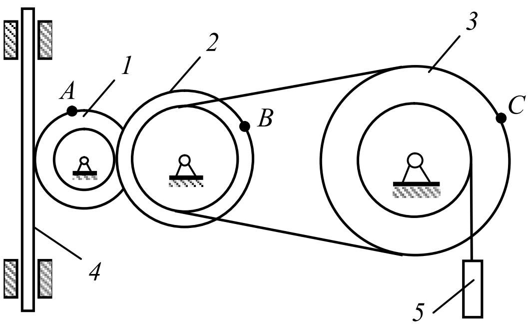


Рис. К2.8

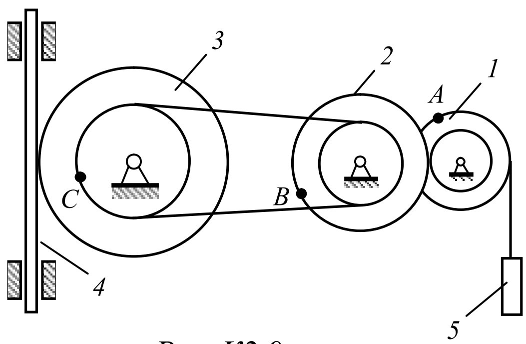


Рис. К2.9

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Пример К2. Рейка 1, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2 и колесо *3* радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находится в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. К2). Рейка движется по закону $s_1=f(t)$.

Дано: R_2=6см, r_2=4см, R_3=8см, r_3 =см, $s_1=3t^3$ (*s* – в сантиметрах, *t* – в секундах), *A* – точка обода колеса *3*, t_1=3с. Определить ω_3, V_4, ε_3, a_A в момент времени $t=t_1$.

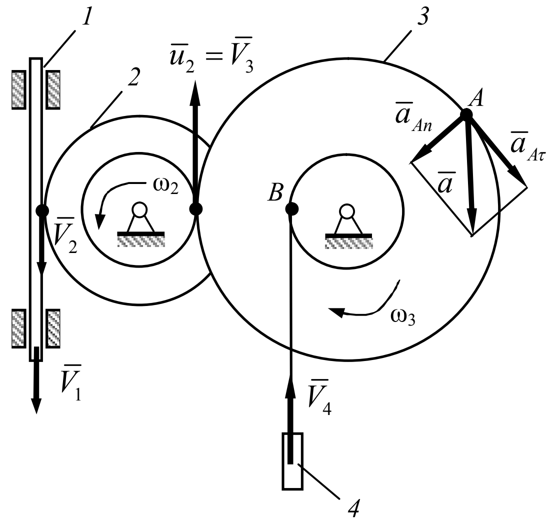


Рис. К2

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через V_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), через u_i.

1. Определим сначала угловые скорости всех колес как функции от времени *t*. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1 = \dot{s}_1 = 9t^2 \qquad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находится в зацеплении, то $V_2=V_1$ или $\omega_2R_2=V_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2=V_3$ или $\omega_2r_2=\omega_3R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2 \qquad (2)$$

Тогда для момента времени t_1=3с получим ω_3=6,75с$^{-1}$.

2. Определим V_4. Так как $V_4=V_B=\omega_3r_3$, то при t_1=3с V_4=20,25 см/с.
3. Определим ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$. Тогда при t_1=3с ε_3=4,5 с$^{-2}$.
4. Определим a_A. Для точки А $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$.

Тогда для момента времени t_1=3с имеем

$$a_{A\tau} = 36\ см/c^2, \quad a_{An} = 364{,}5 \quad см/c^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3 \quad см/c^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.

Ответ: $\omega_3 = 6{,}75\ c^{-1}$; $V_4 = 20{,}25\ см/c$; $\varepsilon_3 = 4{,}5\ c^{-2}$; $a_A = 366{,}3\ см/c^2$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

ДИНАМИКА

Задача Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Груз D массой m, получив в точке А начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0-Д1.9, табл. Д1). На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила Q (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды R, зависящая от скорости V груза (направлена против движения).

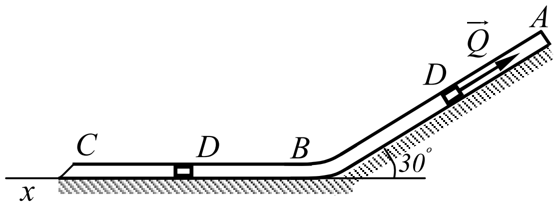


Рис. Д1.0

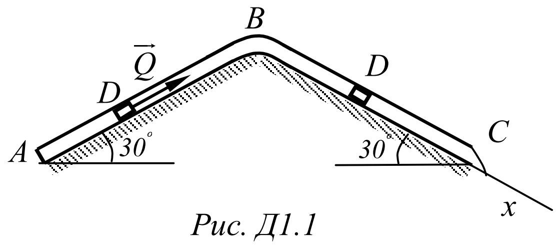


Рис. Д1.1

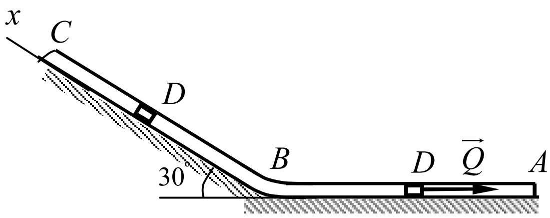


Рис. Д1.2

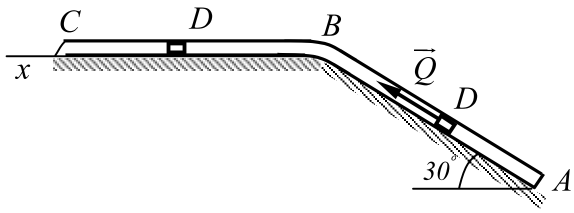


Рис. Д1.3

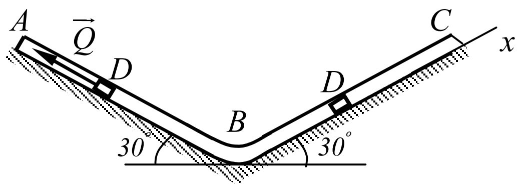


Рис. Д1.4

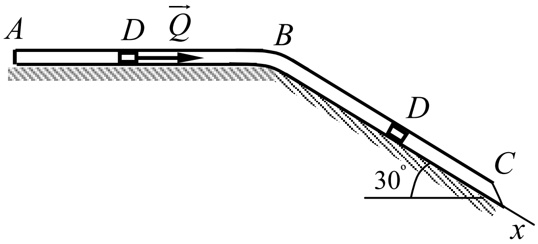


Рис. Д1.5

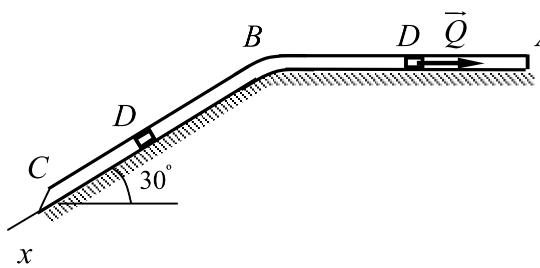


Рис. Д1.6

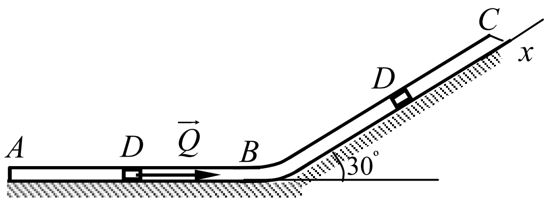


Рис. Д1.7

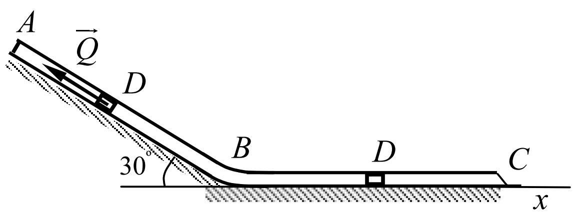


Рис. Д1.8

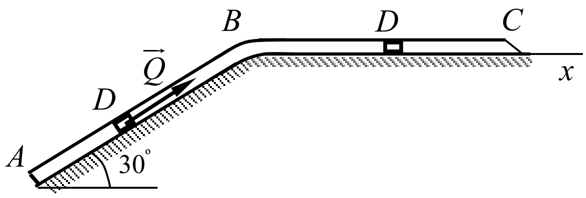


Рис. Д1.9

Таблица Д1

Номер условия	*m, кг*	*V_0, м/с*	*Q, Н*	*R, Н*	*l, м*	*t_1, с*	*F_x, Н*
0	2,4	12	5	$0,8\ V^2$	1,5	-	$4\sin(4t)$
1	2	20	6	$0,4\ V^2$	-	2,5	$-5\cos(4t)$
2	8	10	16	$0,5\ V^2$	4	-	$6t^2$
3	1,8	24	5	$0,3\ V^2$	-	2	$-2\cos(2t)$
4	6	15	12	$0,6\ V^2$	5	-	$-5\sin(2t)$
5	4,5	22	9	$0,5\ V^2$	-	3	$3t$
6	4	12	10	$0,8\ V^2$	2,5	-	$6\cos(4t)$
7	1,6	18	4	$0,4\ V^2$	-	2	$-3\sin(4t)$
8	4,8	10	10	$0,2\ V^2$	4	-	$4\cos(2t)$
9	3	22	9	$0,5\ V^2$	-	3	$4\sin(2t)$

В точке *B* груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила *F*, проекция которой F_x на ось *x* задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки *A* до точки *B*, найти закон движения груза на участке *BC*, т.е. $x=f(t)$, где $x = BD$. Трением груза о трубу пренебречь.

Указания. Задача Д1 - на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке *AB*, учтя начальные условия. Затем, зная время движения на участке *AB* или его длину, определить, какую скорость будет иметь груз в точке *B*. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *BC*. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC* тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B*, и полагая, что в этот момент времени $t=0$. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина *l* участка, целесообразно перейти в уравнении к переменному *x*, учтя, что

$$\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}$$

Пример Д1. На вертикальном участке АВ трубы (рис. Д1) на груз D массой *m* действуют сила тяжести и сила сопротивления *R*; расстояние от точки А, где $V_0=V$, до точки В равно *l*. На наклонном участке ВС на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: m = 2 кг, $R = \mu V^2$, где μ = 0,4 кг/м, V_0= 2,5 м/с, l= 2,5 м, $F_x=16\sin(4t)$.

Определить: $x=f(t)$ - закон движения груза на участке ВС.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке АВ, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $P=mg$ и *R*. Проводим ось *Az* и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

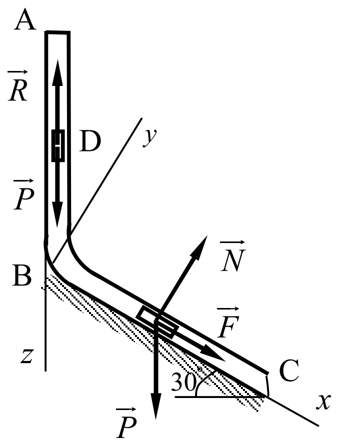


Рис. Д1

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kx} \quad \text{или} \quad mV_z\frac{dV_z}{dz} = P_z + R_z \tag{1}$$

Далее находим: $P_z=P=mg$, $R_z=-R=-\mu V^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $V_z=V$, получим

$$m\frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \quad \text{или} \quad V_z\frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - V^2\right) \tag{2}$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2\ м^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50\ м^2/с^2 \tag{3}$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2V\frac{dV}{dz} = -2k\left(V^2 - n\right) \tag{4}$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2VdV}{V^2 - n} = -2kdz \quad \text{и} \quad \ln\left(V^2 - n\right) = -2kz + C_1 \tag{5}$$

По начальным условиям при $z = 0$ $V_0=V$, что дает $C_1 = \ln\left(V_0^2 - n\right)$, и из равенства (5) находим $\ln\left(V^2 - n\right) = -2kz + \ln\left(V_0^2 - n\right)$ или $\ln\left(V^2 - n\right) - \ln\left(V_0^2 - n\right) = -2kz$.

Отсюда

$$\ln\frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = -2kz \quad \text{и} \quad \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = e^{-2kz}$$

В результате находим

$$V^2 = n + \left(V_0^2 - n\right)e^{-2kz} \tag{6}$$

Полагая в равенстве (6) z = l = 2,5 м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость V_B груза в точке В (V_0 = 5 м/с, число е = 2,7) :

$$V_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \quad \text{и} \quad V_B = 6{,}4\ м/с \tag{7}$$

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке BC; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0=V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $P = mg$, N и F.

Проведем из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_x \tag{8}$$

Так как $P_x = P \sin 30° = 0,5\, mg$, $Nx = O$, $Fx = 16 \sin(4t)$, то уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dV_x}{dt} = 0,5\,mg + 16\sin(4t) \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на m=2 кг и полагая опять g=10 м/с^2, получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 5 + 8\sin(4t) \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$V_x = 5t - 2\cos(4t) + C_2 \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t=0$. Тогда при $t=0$ $V_x = V_0 = V_B$, где V_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$C_2 = V_B + 2\cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4.$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 5t - 2\cos(4t) + 8,4 \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 2,5t^2 - 0,5\sin(4t) + 8,4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 2,5t^2 + 8,4t - 0,5\sin(4t) \qquad (14)$$

где x - в метрах, t- в секундах.

Задача Д2. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система состоит из грузов *1* и *2* (коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1), цилиндрического сплошного однородного катка *3* и ступенчатых шкивов *4* и *5* с радиусами ступеней R_4 = 0,3 м, r_4 = 0,1 м, R_5 = 0,2 м, r_5 = 0,1 м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) (рис. Д2.О-Д2.9, табл. Д2). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям

Таблица Д2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н·м	M_5, Н·м	$F = f(s)$, Н	s_1, м	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2+3s)$	1,0	V_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5+2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3+4s)$	0,8	V_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4+5s)$	0,6	V_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3+2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3+5s)$	1,6	V_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2+5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8+3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2+5s)$	1,6	V_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3+2s)$	1,4	V_2

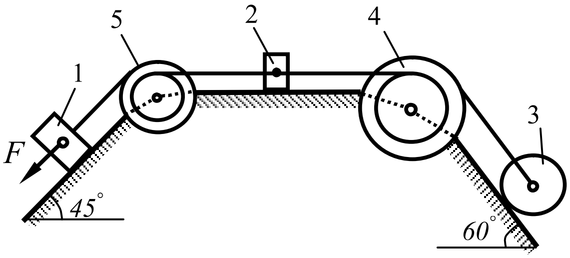


Рис. Д2.0

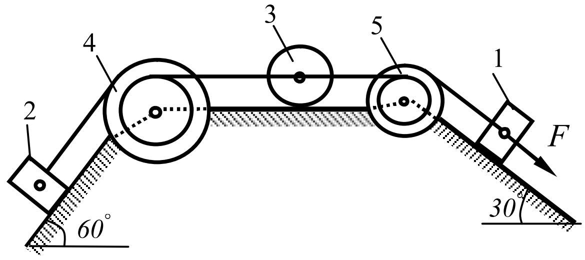


Рис. Д2.1

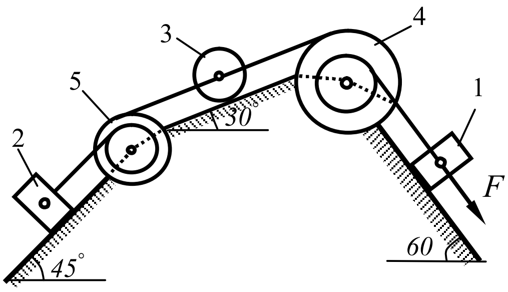


Рис. Д2.2

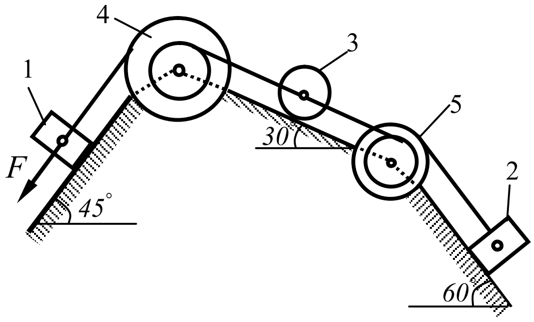


Рис. Д2.3

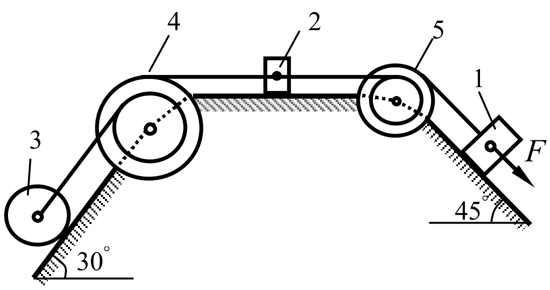


Рис. Д2.4

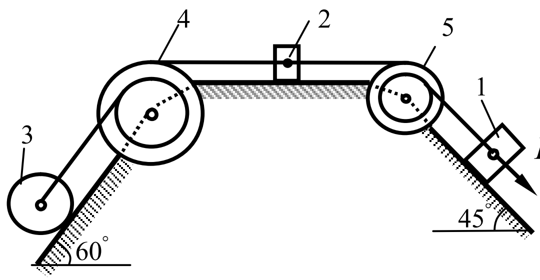


Рис. Д2.5

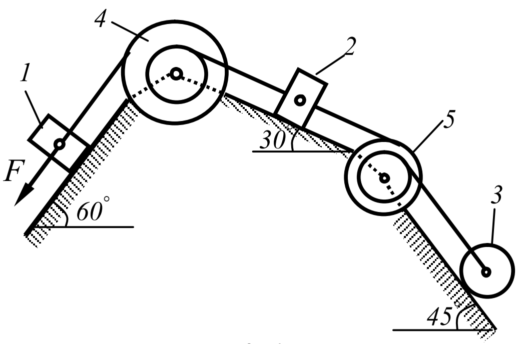


Рис. Д2.6

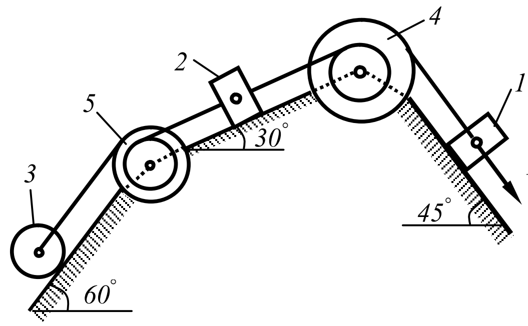


Рис. Д2.7

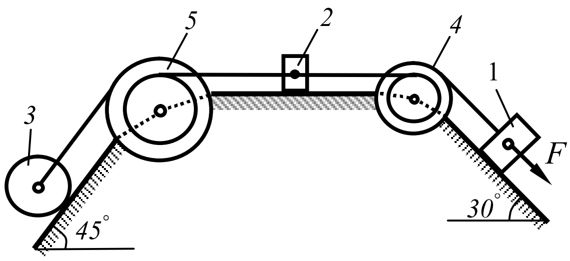


Рис. Д2.8

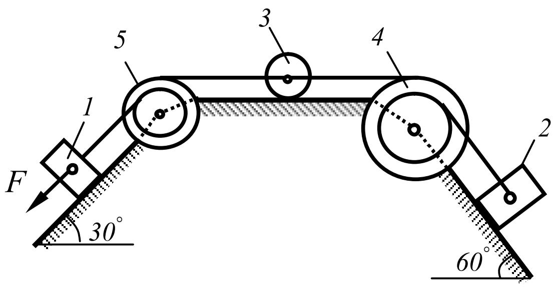


Рис. Д2.9

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы *4* и *5* действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_4 и M_5,.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1. Искомая величина указана в столбце "Найти" таблицы, где обозначено: V_1 - скорость груза *1*, V_{C3}- скорость центра масс катка 3, ω_4 - угловая скорость тела 4 и т.д.

Указания. Задача Д2 - на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел: эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Когда по данным таблицы $m_2 = 0$, груз 2 на чертеже не изображать; шкивы 4 и 5 всегда входят в систему.

Пример Д2. Механическая система (рис. Д3) состоит из сплошного цилиндрического катка *1*, ступенчатого шкива *2* с радиусами ступеней R_2 и r_2 (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза *3* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движения из состояния покоя. При движении на шкив *2* действует постоянный момент M_2 сил сопротивления.

Дано: m_1=4 кг, m_2= 10кг, m_3 = 8 кг, R_2 = 0,2 м, r_2 = 0,1 м, f = 0,2, M_2 = 0,6 Н • м, $F=2(1 + 2s)$ Н, s_1 = 2 м.

Определить: скорость V_{C1} центра масс катка, когда $s = s_1$,.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные F, P_1, P_2, P_3, момент сопротивления M_2, реакции N_1, N_2, N_3 и силы трения $F_{1тр}$ и $F_{3тр}$.

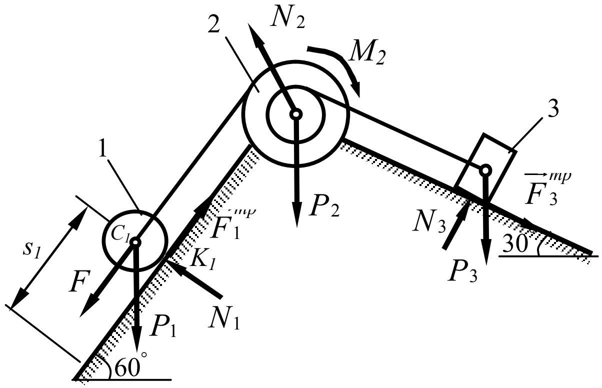


Рис. Д2

Для определения V_{C1} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T=T_1+T_2+T_3 \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *3* - поступательно, а тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1}\omega_1^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую V_{C1}. Приняв во внимание, что точка K_1 - мгновенный центр скоростей катка *1*, и обозначив радиус катка через r_1, получим

$$\omega_1 = \frac{V_{C1}}{K_1C_1} = \frac{V_{C1}}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{V_{C1}}{R_2}, \quad V_3 = \omega_2 r_2 = V_{C1}\frac{r_2}{R_2} \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5\, m_1 r_1^2, \quad I_2 = m_2 R_2^2 \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенство (3), а затем используя равенство (2). получим окончательно:

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}\right) V_{C_1}^2 \qquad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1. Одновременно все перемещения следует выразить через заданную величину s_1, для чего учтем, что здесь зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями в равенствах (4), т.е. $\varphi_2 = s_1 / R_2 \quad s_3 = s_1(r_2/R_2)$. В результате получим:

$$A(\vec{F}) = \int_0^{s_1} 2(1+2s)\,ds = 2(s_1 + s_1^2)$$

$$A(\vec{P_1}) = P_1 s_1 \sin 60^\circ, \quad A(M_2) = -M_2\varphi_2 = -M_2\frac{s_1}{R_2}$$

$$A(\vec{P_3}) = -P_3 s_3 \sin 30^\circ = -P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2}\sin 30^\circ$$

$$A(\overrightarrow{F_3^{mp}}) = -F_3^{mp} s_3 = -fN_3 s_3 = -fP_3\cos 30^\circ \cdot s_1\frac{r_2}{R_2}$$

Работа остальных сил равна нулю, так как точка K_1, где приложены N_1, и F_1^{mp} - мгновенный центр скоростей, точка О, где приложены P_2 и N_2, неподвижна, а реакция N_3 перпендикулярна перемещению груза *3*. Тогда окончательно

$$\sum A_k^e = 2(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - M_2\frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1 \frac{r_2}{R_2}(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ) \qquad (7)$$

4. Подставив выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0=0$, получим

$$\left(\frac{3}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}\right)\cdot V_{C1}^2 = 2(s_1 + s_1^2) + P_2 s_1 \sin 60^\circ - $$
$$-M_2\frac{s_1}{R_2} - P_3 s_1\frac{r_2}{R_2}(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ) \qquad (8)$$

При числовых значениях, которые имеют заданные величины, равенство (8) дает

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$9V_{C1}^2 = 21{,}1$

Отсюда находим искомую скорость.

Ответ: V_{C1} = 1,53м/с.

Задача Д3. Применение принципа Даламбера при изучении движения материальной системы

Вертикальный вал АК (рис. Д3.0-Д3.9 табл. Д3), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω=10 $с^{-1}$, закреплён подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д3 в столбце 2 ($AB=BD=DE=EK=b$). К валу жестко прикреплены невесомый стержень *1* длинной l =0,4 м с точечной массой m_1=6кг на конце и однородный стержень *2* длинной l_2=0,6 м, имеющий массу m_2=4кг; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержня к валу указаны в таблицах *3* и *4*, а углы α и β - в столбцах 5 и 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных подсчетах принять b=0,4 м.

Указания. Задача Д3 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задачи стержня *2*) имеют равнодействующую $\overline{R}^{и}$,то численно $R^{и} = ma_C$, где a_C - ускорение центра масс С стержня, но линия действия $\overline{R}^{и}$ в общем случае не проходит через точку С (см. пример Д3).

Таблица Д3

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня 1 в точек	Крепление стержня 2 в точек	α°	β°	Номер условия	Подшипник в точке	Крепление стержня 1 в точек	Крепление стержня 2 в точек	α°	β°
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
0	*B*	*D*	*K*	30	45	5	*D*	*K*	*B*	*30*	45
1	*D*	*B*	*E*	45	60	6	*E*	*B*	*K*	*45*	30
2	*E*	*D*	*B*	60	75	7	*K*	*E*	*B*	*60*	75
3	*K*	*D*	*E*	75	30	8	*D*	*E*	*K*	*75*	60
4	*B*	*E*	*D*	90	60	9	*E*	*K*	*D*	*90*	45

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

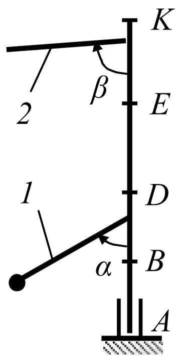


Рис. Д3.0

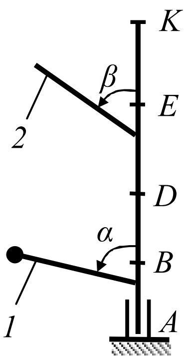


Рис. Д3.1

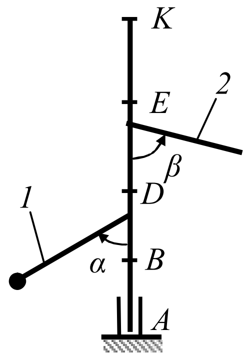


Рис. Д3.2

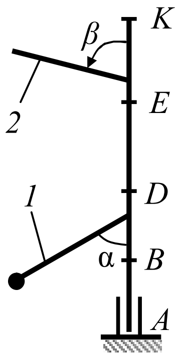


Рис. Д3.3

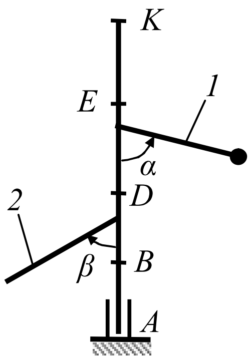


Рис. Д3.4

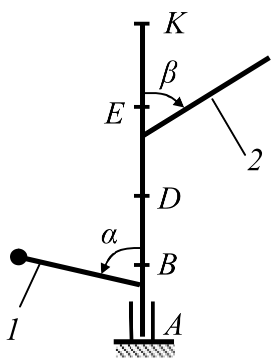


Рис. Д3.5

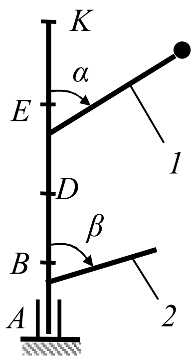


Рис. Д3.6

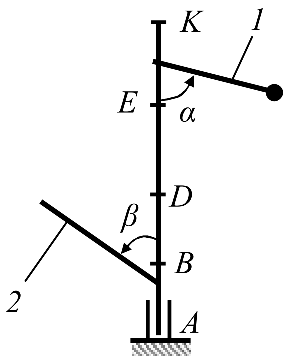


Рис. Д3.7

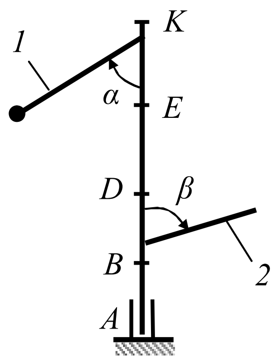


Рис. Д3.8

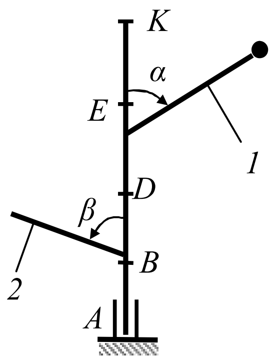


Рис. Д3.6

Пример Д3. С невесомым валом *AB*, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплён стержень OD длинной l и массой m_1, имеющий на конце груз массой m_2 (рис. Д3).

Дано:. b_1 =0,6м, b_2 =0,2 м, α=30º, l=0,5 м , m_1=3кг , m_2=2кг , ω=6 $с^{-1}$.

Определить: реакции подпятника *A* и подшипника *B*.

Решение: Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала *AB*, и стержня *OD* и груза, и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси *Axy* так чтобы стержень лежал в плоскости *xy*, и изобразим действующие на систему внешние силы; силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2$,составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ реакции подпятника и реакцию $\bar{X}_B$ подшипника.

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно (ω=const), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $\bar{a}_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k - расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\bar{R}_k^и$ будут направлены от оси вращения и численно $F_k^и = \Delta m a_{nk} = \Delta m\omega^2 h_k$, где Δm - масса элемента. Поскольку все $\bar{R}_k^и$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\bar{R}_1^и$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии H_1 от вершины O,

где $H_1 = \dfrac{2}{3}H_2 \quad (H_2 = l\cos\alpha)$.

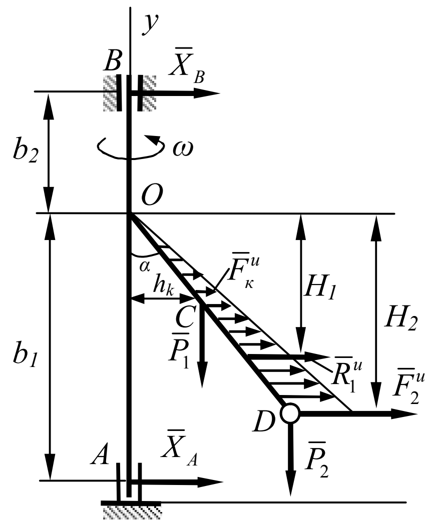


Рис. Д3

Но, как известно, равнодействующая любой системы сил равна её главному вектору, а численно главный вектор сил инерции стержня $R_1^и = m_1 a_C$, где a_C - ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента стержня,

$a_C = a_{Cn} = \omega^2 h_C \quad \omega^2 \cdot OC\sin\alpha \quad (OC = l/2)$. В результате получим

$$R_1^и = m_1\omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha = 13{,}5\,H.$$

Аналогично для силы инерции $\bar{F}_2^и$ груза найдём, что она тоже направлена от оси вращения, а численно $F_2^и = m_2\omega^2 l\sin\alpha = 18\,H$.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости xy, то и реакции подпятника A и подшипника B тоже лежат в этой плоскости, что было уточнено при их изображении.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + R_1^и + F_2^и = 0, \qquad (1)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\sum F_{ky}=0;\quad Y_A-P_1-P_2=0, \tag{2}$$

$$\sum m_B\left(\bar{F}_k\right)=0;\quad X_A\left(b_1+b_2\right)-P_1\left(l/2\right)\sin\alpha-P_2 l\sin\alpha+$$
$$+R_1^{и}\left(H_1+b_2\right)+F_2^{и}\left(H_2+b_2\right)=0 \tag{3}$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин, и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ; X_A=-11,8 Н, Y_A=49,1 Н X_B= -19,7 Н.

Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{X}_B$ направлены противоположно показанным на рис. Д3.

Задача Д4. Применение уравнения Лагранжа II рода к изучению движения механической системы с одной степенью свободы

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов *1* и *2* весом P_1 и P_2 с радиусами ступеней $R_1=R$, $r_1=0{,}4R$; $R_2=R$, $r_2=0{,}8R$ (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу); грузов *3*, *4* и сплошного однородного цилиндрического катка *5* весом P_3,P_4,P_5 соответственно (рис. Д4.0-Д4.9, табл. Д4). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения, а катки катятся без скольжения.

Таблица Д4

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	M_1	M_2	F	Найти
0	*12P*	*0*	*P*	*0*	*3P*	*0,2PR*	*0*	*8P*	a_3
1	*0*	*10P*	*0*	*4P*	*2P*	*0*	*0,3PR*	*6P*	ε_3
2	*10P*	*0*	*0*	*2P*	*P*	*0,3PR*	*0*	*4P*	ε_1
3	*0*	*12P*	*2P*	*0*	*3P*	*0*	*0,2PR*	*10P*	a_3
4	*8P*	*10P*	*0*	*0*	*2P*	*0*	*0,3PR*	*5P*	a_{C3}
5	*12P*	*0*	*2P*	*0*	*P*	*0*	*0,4PR*	*8P*	ε_1
6	*0*	*12P*	*0*	*3P*	*4P*	*0,2PR*	*0*	*6P*	a_4
7	*10P*	*8P*	*0*	*0*	*2P*	*0,3PR*	*0*	*5P*	ε_2
8	*12P*	*0*	*0*	*5P*	*4P*	*0*	*0,2PR*	*6P*	a_4
9	*0*	*12P*	*2P*	*0*	*3P*	*0,2PR*	*0*	*10P*	a_{C5}

Кроме сил тяжести на одно из тел системы действует постоянная сила F, а на шкивы *1* а *2* при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_1, и M_2.

Составить для данной системы уравнение Лагранжа и определить из него величину, указанную в таблице в столбце "Найти", где обозначено: ε_1, ε_2 - угловые ускорения шкивов *1* и *2*, a_3, a_4, a_{C5} - ускорения грузов 3, 4 и центра масс катка *5* соответственно. Когда в задаче надо определить ε_1 или ε_2, считать R = 0,25 м.

Тот из грузов *3*, *4*, вес которого равен нулю, на чертеже не изображать. Шкивы *1* и *2* всегда входят в систему.

Указания. Задача Д4 - на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

За обобщенную координату q принять: в задачах, где требуется определить a_3, a_4 или a_{C5}- перемещение x соответствующего груза или центра масс C_5 катка *5*; в задачах, где требуется определить ε_1, или ε_2, -угол поворота φ соответствующего шкива.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

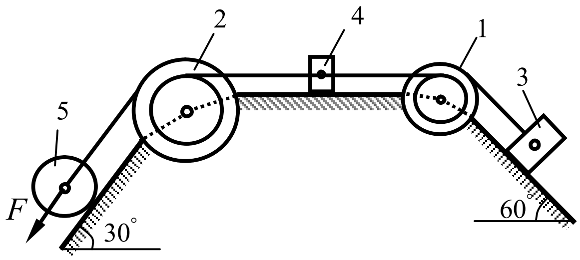


Рис. Д4.0

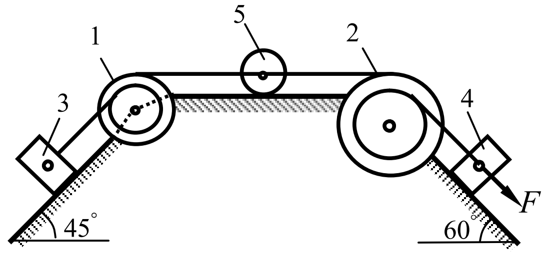


Рис. Д4.1

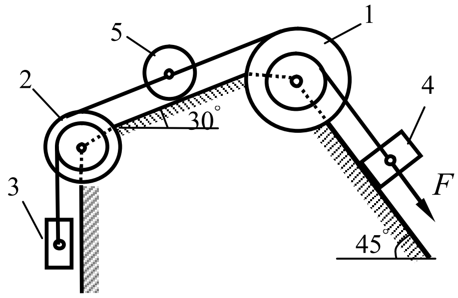


Рис. Д4.2

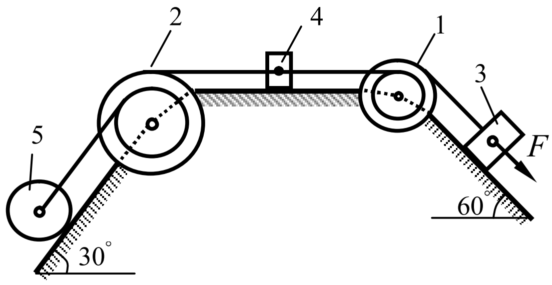


Рис. Д4.3

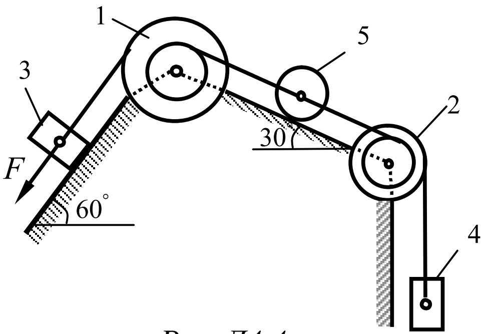


Рис. Д4.4

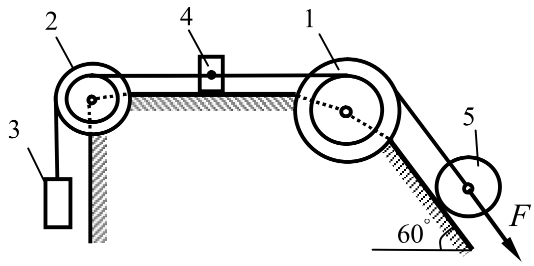


Рис. Д4.5

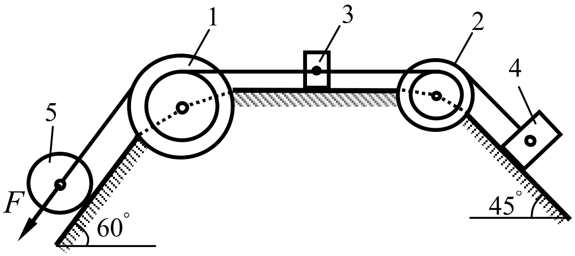


Рис. Д4.6

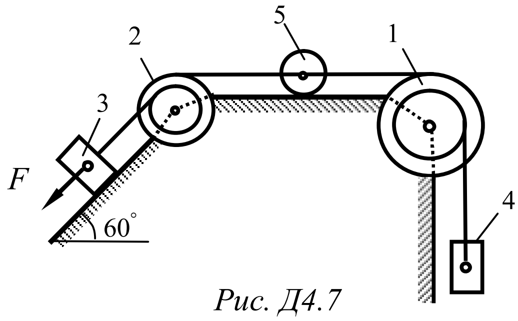


Рис. Д4.7

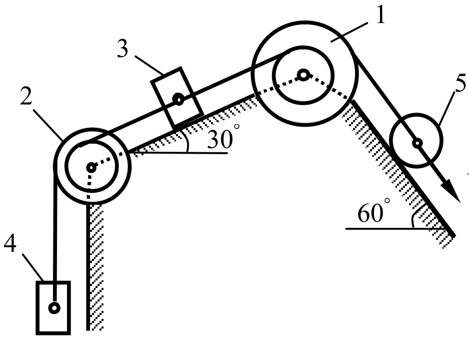


Рис. Д4.8

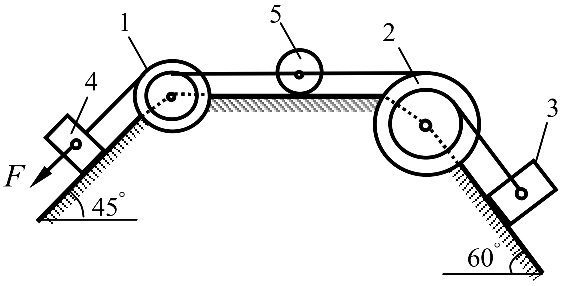


Рис. Д4.9

Для составления уравнения вычислить сначала кинетическую энергию T системы (как в задаче Д2) и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость, т.е. через $\dot{x}$, если обобщенная координата x, или через $\dot{\varphi}$, если обобщенная координата φ. Затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого сообщить системе возможное (малое) перемещение, при котором выбранная координата, т.е. x (или φ), получает положительное приращение δx (или $\delta\varphi$), и вычислить сумму элементарных работ всех сил на этом перемещении; в полученном равенстве надо все другие элементарные перемещения выразить через δx (или через $\delta\varphi$, если обобщенная координата φ) и вынести δx (или $\delta\varphi$) за скобки. Коэффициент при δx (или $\delta\varphi$) и будет обобщенной силой Q (см. еще пример Д4).

Пример Д4. Механическая система состоит из ступенчатого шкива *2* (радиусы ступеней R_2 и r_2), груза *1* и сплошного катка *3*, прикрепленных к концам нитей, намотанных на ступени шкива (рис. Д4). На шкив при его вращении действует момент сил сопротивления M_2,. Массу шкива считать равномерно распределенной по внешнему ободу.

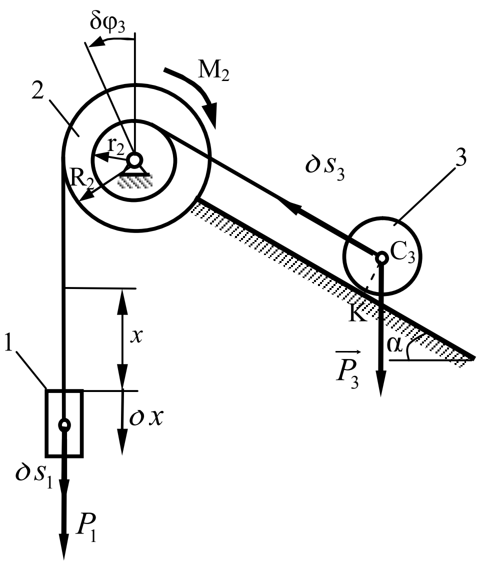


Рис. Д4

Дано: $R_2, = R$, $r_2 = 0{,}6R$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 5P$, $M_2 = 0{,}2PR$, $\alpha = 30°$.
Определить: a, - ускорение груза /.
Решение. 1. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение x груза *1* ($q=x$), полагая, что груз движется вниз, и, отсчитывая x в сторону движения. Составим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (2)$$

Так как груз *1* движется поступательно, шкив *2* вращается вокруг неподвижной оси, а каток *3* движется плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{P_1}{2g}V_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2, \quad T_3 = \frac{P_3}{2g}V_{C3}^2 + \frac{1}{2}I_{C3}\omega_3^2 \qquad (3)$$

где, поскольку масса шкива считается распределенной по внешнему ободу, а каток сплошной (его радиус обозначим r_3),

$$I_2 = \frac{P_2}{g}R^2, \quad I_{C3} = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}r_3^2 \tag{4}$$

3. Все скорости, входящие в T_1, T_2 и T_3, выразим через обобщенную скорость $\dot{x}$, равную очевидно, V_1. Если при этом учесть, что $V_1=\omega_2 R_2$, а $V_{C3}=\omega_2 r_2$ и что точка K является для катка 3 мгновенным центром скоростей, то получим:

$$V_1 = \dot{x}, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{R} = \frac{\dot{x}}{R}, \quad V_{C3} = \omega_2 r_2 = \frac{r_2}{R}\dot{x}$$

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{KC_3} = \frac{V_{C3}}{r_3} = \frac{r_2}{r_3 R}\dot{x} \tag{5}$$

Подставляя значения величин (5) и (4) в равенства (3), а затем значения T_1, T_2 и T_3 в равенство (2), найдем окончательно, что

$$T = \frac{1}{2g}\left(P_1 + P_2 + \frac{3}{2}\frac{r_2^2}{R^2}P_3\right)\dot{x}^2, \quad \text{или} \quad T = \frac{11{,}7P}{2g}\dot{x}^2 \tag{6}$$

Так как здесь T зависит только от $\dot{x}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 11{,}7\frac{P}{g}\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad и \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 11{,}7\frac{P}{g}\ddot{x} \tag{7}$$

4. Найдем обобщенную силу Q. Для этого изобразим силы, совершающие при движении системы работу, т.е. силы P_1, P_3 и момент сил сопротивления M_2, направленный против вращения шкива. Затем сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата x получает положительное приращение δx, и покажем перемещения каждого из тел; для груза *1* это будет $\delta s_1 = \delta x$, для шкива *2* - поворот на угол $\delta\varphi_2$, для катка *3* – перемещение δs_3 его центра. После этого вычислим сумму элементарных работ сил и момента на данных перемещениях. Получим

$$\delta A = P_1\delta s_1 - M_2\delta\varphi_2 - P_3 \sin\alpha \; \delta s_3 \tag{8}$$

Все входящие сюда перемещения надо выразить через δx. Учтя, что зависимости между элементарными перемещениями здесь аналогичны зависимостям (5) между соответствующими скоростями, получим

$$\delta s_1 = \delta x, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{R}, \quad \delta s_3 = r_2\delta\varphi_2 = \frac{r_2}{R}\delta x \tag{9}$$

Подставляя эти значения в равенство (8) и вынося δx за скобки, найдем, что

$$\delta A = \left(P_1 - \frac{M_2}{R} - \frac{r_2}{R}P_3\sin\alpha\right)\delta x \tag{10}$$

Коэффициент при δx в полученном выражении и будет обобщенной силой Q. Следовательно,

$$Q = P_1 - \frac{M_2}{R} - P_3\frac{r_2}{R}\sin\alpha \quad \text{или} \quad Q = 4{,}3P \tag{11}$$

5. Подставляя найденные величины (7) и (11) в уравнение (1), получим

$$11{,}7\frac{P}{g}\ddot{x} = 4{,}3P$$

Отсюда находим искомое ускорение $a_1 = \ddot{x}$.

Ответ: $a_1 = 0{,}37g$.

Примечание. Если в ответе получится, а < 0 (или ε < 0) , то это означает, что система движется не в ту сторону, куда было предположено. Тогда у момента M_2, направленного против вращения шкива, изменится направление и, следовательно, как видно из равенства (11), изменится величина Q, для которой надо найти новое верное значение.

Список литературы

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3-х т.- М.: Наука, I97I-I973,- Т.I.-512с; Т.2.- 624с; Т.З.- 487с.
2. Лойцянский Л. Г., Лурье А.Н. Курс теоретической механики: в 2-х т. М.: Наука, 1984.- Т.I.- 352с; Т. 2.- 640с.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике,- М.: Наука, 1986.- 448с.
4. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 592 стр.
5. Программа: по теоретической механике/ Под. ред. Т.О. Ормонбекова. – Б.: 1996
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1974.- 400с.
7. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников/ Под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1988.-64 с.: ил.
8. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: В 2-х т.- М.: ВШ, 1977-1978.- Т.I.- 431с; Т. 2.- 430с.
9. Яблонский А.А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике,- М.: ВШ, 1985,- 337с.

Оглавление