



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

**Кафедра «АВТОМАТИЗАЦИЯ И РОБОТОТЕХНИКА»**

## **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ САУ**

Методические указания к лабораторным работам по «Теория автоматического управления» для студентов специальностей 550202.01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 553302.02 «Мехатроника и робототехника» 552902.01 «Технология машиностроения» всех форм обучения

Бишкек 2012



**«Рассмотрено»**  
на заседании кафедры  
«Автоматизация и робототехника»  
Прот. № 9 от 06.03.2012г.



**«Рекомендовано»**  
Методическим советом  
ФТиМ  
Прот. № от 2012г.

Составитель: САРТОВ Т.Э.

## **УДК 681.5**

Методические указания к лабораторным работам для студентов специальностей 550202.01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 553302.02 «Мехатроника и робототехника» 552902.01 «Технология машиностроения» всех форм обучения./ Кырг. гос. техн. ун-т; Сост. Сартов Т.Э., Б.: ИЦ «Текник», 2012г. – 61 с.

Предназначена для студентов направления 550202.01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 553302.02 «Мехатроника и робототехника» 552902.01 «Технология машиностроения» всех форм обучения

Приведены краткие теоретические сведения, цели, программы выполнения и контрольные вопросы цикла лабораторных работ к дисциплине «Теория автоматического управления».

Изложена методика моделирования и исследования динамических линейных систем автоматического управления с помощью средств интегрированной системы MATLAB.

Для студентов машиностроительных и приборостроительных направлений, изучающих курсы «Управление в технических системах», «Основы теории автоматического управления», «Системы автоматического управления».

Табл. 20

Ил. 22

Библиог.: 18 назв.

Рецензент: к.т.н., доцент Самсалиев А.А.



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>Лабораторная работа №1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> ....	5
<b>Лабораторная работа № 2 ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> .....	8
<b>Лабораторная работа № 3 АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> .....	15
<b>Лабораторная работа № 4 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> .....	23
<b>Лабораторная работа № 5 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОЛЮСОВ И НУЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ</b> .....	27
<b>Лабораторная работа № 6 ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПО ПЕРЕХОДНОМУ ПРОЦЕССУ</b> .....	32
<b>Лабораторная работа № 7 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ</b> .....	35
<b>Лабораторная работа № 8 ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ</b> .....	40
<b>Лабораторная работа № 9 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА</b> .....	46
<b>Лабораторная работа № 10 ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ</b> .....	50
Библиографический список.....	53
Приложение.....	54 - 61



## ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания призваны проиллюстрировать в учебном процессе применение современных программных продуктов в практике регулирования и управления.

Пособие содержит методические указания к проведению практических занятий и лабораторного практикума для курсов «Управление в технических системах», «Основы теории автоматического управления», «Теория автоматического управления», «Системы автоматического управления», а также будет полезно для целого ряда специальных управленческих курсов.

Здесь кратко изложены существо обсуждаемых методов и основные расчетные соотношения, что позволяет пользоваться методическим пособием, не прибегая к дополнительным литературным источникам. Это, конечно, ни в коей мере не отрицает необходимости лекционных курсов и соответствующих учебников.

Реализация алгоритмов управления, как правило, осуществляется в рамках пакетов прикладных программ. Строго говоря, основные расчетные соотношения могут быть реализованы в различных программных продуктах, но на сегодняшний день наиболее развитой и широко распространенной как в нашей стране, так и за рубежом, является интегрированная среда MATLAB с огромным набором инструментальных средств.

Все излагаемые в учебных курсах по теории управления методы оформлены в этой среде в виде стандартных процедур. Простые языковые средства позволяют выстраивать эти процедуры для решения любых методических задач.

Пособие предназначено как для студентов, изучающих соответствующие дисциплины, так и для преподавателей, ведущих указанные курсы. Преподаватели могут использовать предлагаемый материал непосредственно или модифицировать его, руководствуясь личными методическими предпочтениями.



## Лабораторная работа №1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомиться с пакетом моделирования MATLAB. Освоить основные приемы моделирования систем автоматического управления.

### 2. УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

До начала работы необходимо по литературе [1], [2] и по данным методическим указаниям ознакомиться с основными компонентами, измерительными приборами и возможностями прикладного пакета программ Electronics Workbench, а также с методом математического моделирования САУ путем понижения порядка дифференциального уравнения.

### 3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Поведение динамической линейной системы автоматического управления может быть описано скалярным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \quad (1.1)$$

где  $y$  – выходная переменная;  $u$  – входной сигнал;  $m$  – порядок производной входного сигнала;  $a_i$  и  $b_j$  – постоянные коэффициенты.

При условии, что  $m < n$ , уравнение (1.1) можно записать в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot x_n + \beta_1 \cdot u, \\ x_2^{(1)} = \alpha_{211} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot x_n + \beta_2 \cdot u, \\ \dots \\ x_n^{(1)} = \alpha_{n1} \cdot x_1 + \alpha_{n2} \cdot x_2 + \dots + \alpha_{nn} \cdot x_n + \beta_n \cdot u, \\ y = C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + \dots + C_n \cdot x_n, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $x_i$  – координаты вектора состояния,  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_i$  – постоянные коэффициенты.

Система уравнений (1.2) может быть представлена в компактной векторно-матричной форме.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $A$  –  $n \times n$  – мерная матрица постоянных коэффициентов системы;  $B$  –  $n \times 1$  – мерная матрица постоянных коэффициентов входа;  $C$  –  $1 \times n$  – мерная матрица



постоянных коэффициентов выхода;  $X$  –  $n$ -мерный вектор состояния.

#### 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Ознакомиться с пакетом прикладных программ MATLAB-Simulink (см. Приложение А).

4.2. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1.1) построить схему моделирования линейной системы автоматического управления, используя уравнение (1.1.- 1.3).

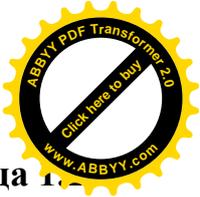
4.3. Осуществить моделирование системы при двух видах входных воздействий:  $u = 1(t)$  и  $u = 2\sin t$ . Начальные условия нулевые. На монитор выводить графики сигналов  $y(t)$  и  $u(t)$ . Продолжительности интервалов наблюдения выбрать самостоятельно.

4.4. Осуществить моделирование свободного движения системы с нулевыми и ненулевыми начальными условиями (см. табл.1.2). Снять выходные характеристики  $y(t)$  системы автоматического управления. Получить фазовый портрет.

**Таблица 1.1**

**Варианты параметров моделей**

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
порядок модели $n$	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$a_0$	9	5	5	8	7	15	7	2	1	25	30	0,12
$a_1$	6	4	4	6	5	5	3	0,5	0,5	1	0,8	1
$a_2$	3	3	2	2	10	-	-	-	-	-	-	-
$b_0$	12	2,5	7,5	12	10	15	10	4	2	25	30	0,1
$b_1$	2	2	0	1	3	0,5	6	2	2	2	3	2
$b_2$	0,1	3	5	10	1,5	1	0	0	0	0	0	0



## Варианты начальных условий моделей

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Порядок модели $n$	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$y(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$y^{(1)}(0)$	0,5	-0,2	-0,4	0,1	-0,5	0,5	0,4	1	-0,5	0	0,5	0
$y^{(2)}(0)$	0	0,1	0,2	-0,1	0	0,1	-	-	-	-	-	-

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать следующие разделы:

1. Цель работы.
2. Порядок выполнения работы.
3. Математическая модель динамической системы.
4. Расчет начальных условий интеграторов.
5. Графики переходных процессов.
6. Выводы.

## 6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

- 6.1. Составьте схему моделирования уравнения  $y^{(1)} + 3y = 2u^{(1)} + 5u$ .
- 6.2. Назовите виды математических моделей?
- 6.3. Почему для моделирования динамических систем используются блоки интегрирования?
- 6.4. Поясните принцип составления модели вход – выход.



## Лабораторная работа № 2

### ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование переходных характеристик и динамических свойств типовых звеньев систем автоматического управления.

#### 2. УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

При подготовке к лабораторной работе необходимо изучить тему: «Типовые динамические звенья» по литературе [1], [2]. Составить схемы моделей динамических звеньев в соответствии с вариантом задания.

#### 3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Типовыми динамическими звеньями называются простейшие составные части систем автоматического управления, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями не выше 2-ого порядка:

$$a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)} + b_0 u, \quad (2.1)$$

где  $y$  и  $u$  – соответственно выходная переменная и управляющее воздействие звена;  $a_i$  и  $b_i$  – постоянные коэффициенты.

С использованием оператора дифференцирования  $p = d/dt$  уравнение (2.1) имеет вид:

$$a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_1 p u + b_0 u, \quad (2.2)$$

Определяем передаточную функцию  $W(p)$  звена, учитывая при этом, что начальные условия для уравнения (2.2) нулевые

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (2.3)$$

Динамические свойства звеньев определяются по их реакции на типовое входное воздействие. Наиболее простым типовым воздействием является единичная ступенчатая функция  $1(t)$ , удовлетворяющая условиям

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ 1, & \text{если } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Одной из реакций звена является переходная функция  $h(t)$  – изменение выходной переменной во времени при подаче на вход звена единичной ступенчатой функции  $1(t)$ . Переходная функция характеризует переход звена (системы) от одного равновесного состояния или установившегося режима к другому.



По графику  $h(t)$  можно определить математическую модель исследуемого динамического звена и его параметры.

Интегрирующее звено

Описывается уравнениями:

$$y^{(1)} = ku \text{ или } y = \frac{k}{p} u,$$

(2.5)

где  $k$  – постоянный коэффициент.

Переходная функция звена

$$h(t) = kt \cdot 1(t) \tag{2.6}$$

Интегрирующее звено с замедлением

Описывается уравнениями

$$Ty^{(2)} + y^{(1)} = ku \text{ или } y = \frac{k}{p(Tp + 1)} u, \tag{2.7}$$

где  $T$  – постоянная времени.

Переходная функция звена

$$h(t) = k[t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})] \cdot 1(t) \tag{2.8}$$

Графики переходных функций интегрирующих звеньев показаны на рис. 2.1.

Изодромное звено

Описывается уравнениями

$$y^{(1)} = k(Tu^{(1)} + u) \text{ или } y = \frac{k(Tp + 1)}{p} \cdot u, \tag{2.9}$$

его переходная функция

$$h(t) = k(t + T) \cdot 1(t).$$

Реальное дифференцирующее звено

Описывается уравнениями

$$Ty^{(1)} + y = ku^{(1)} \text{ или } y = \frac{kp}{Tp + 1} \cdot u,$$

(2.10)

его переходная функция

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t). \tag{2.11}$$

Графики переходных функций изодромного и реального дифференцирующего звеньев изображены на рис. 2.

Апериодическое звено первого порядка

Описывается уравнениями



$$Ty^{(1)} + y = ku \text{ или } y = \frac{k}{Tp+1} \cdot u, \quad (2.12)$$

его переходная функция

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t) \quad (2.13)$$

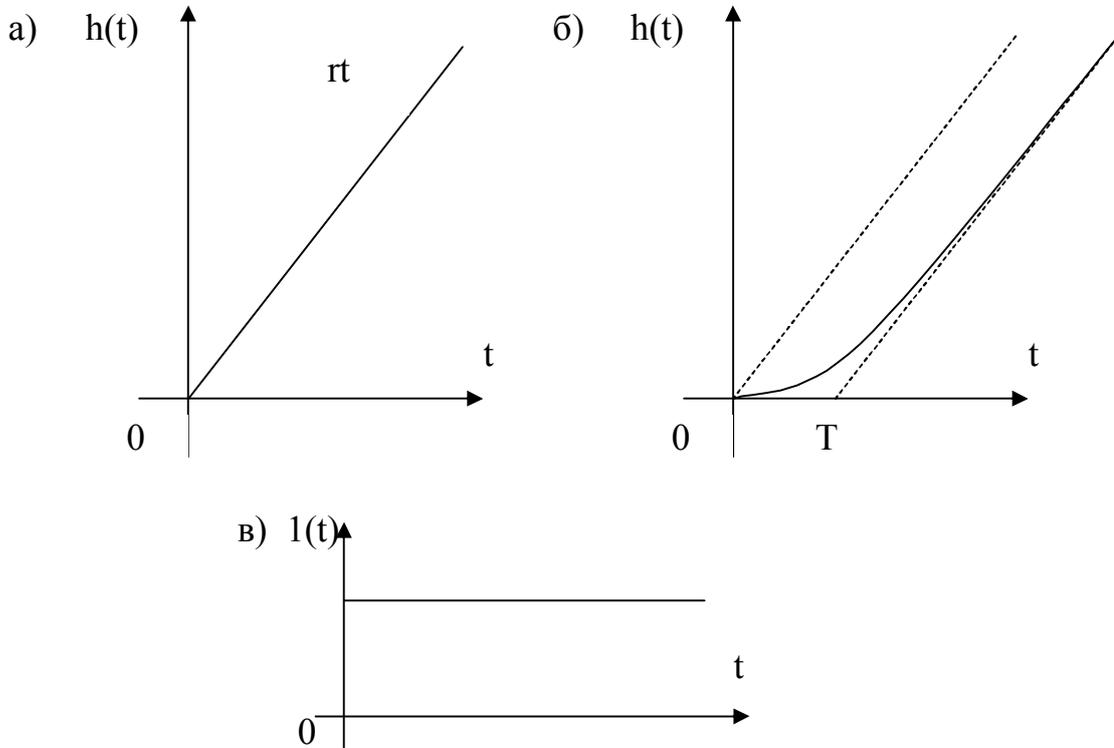


Рис.2.1. Графики переходных функций интегрирующего звена (а) и интегрирующего звена с замедлением (б).  
Единичная ступенчатая функция  $l(t)$  - (в).

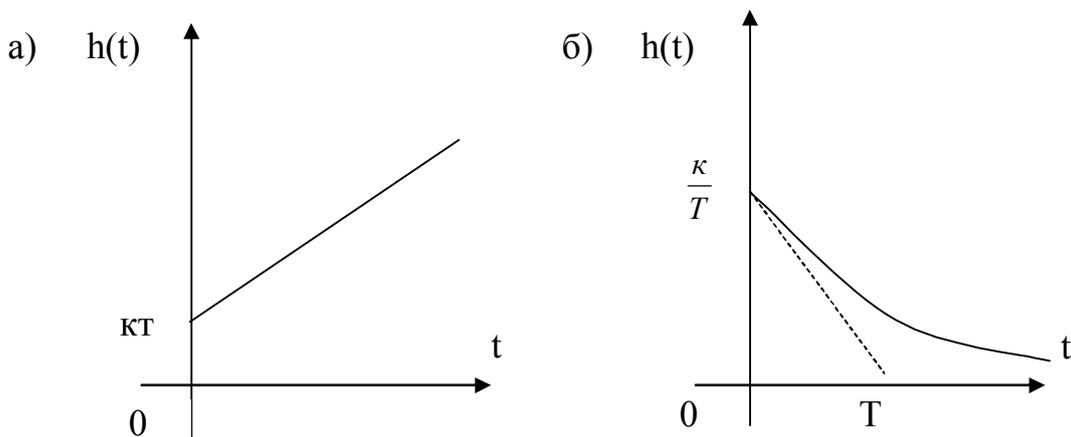


Рис.2.2. Графики переходных функций издромного (а) и реального дифференцирующего (б) звеньев.

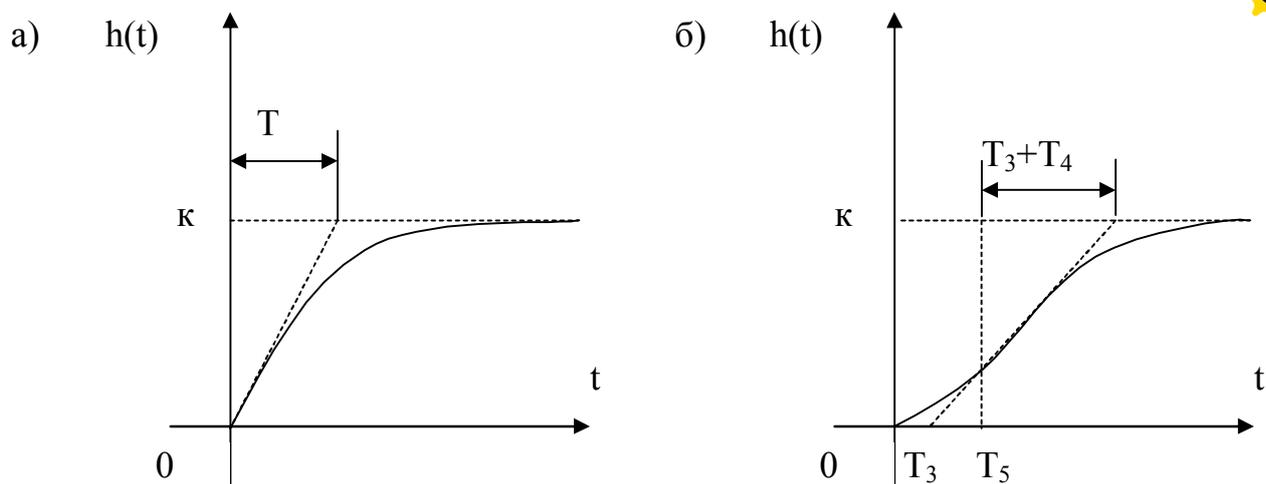


Рис. 2.3. Графики переходных функций аperiodических звеньев первого порядка (а) и второго порядка (б)

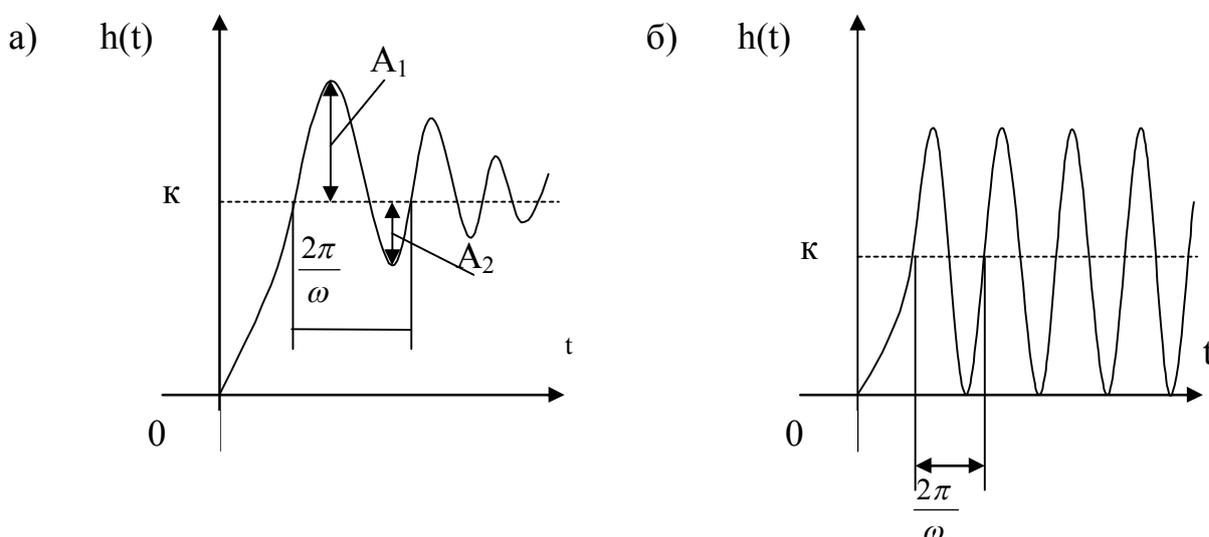


Рис. 2.4. Графики переходных функций колебательного (а) и консервативного (б) звеньев

### Аperiodическое звено 2-ого порядка

Описывается уравнениями

$$T_2^2 y^{(2)} + T_1 y^{(1)} + y = ku \quad \text{или} \quad y = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} u, \quad (2.14)$$

где  $T_1, T_2$  – постоянные времена ( $T_1 > 2T_2$ ). При этом корни характеристического уравнения  $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$  являются вещественными и отрицательными. Знаменатель передаточной функции аperiodического звена 2-ого порядка может быть разложен на множители



$$y = \frac{\kappa}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)} u, \quad (2.15)$$

$$\text{где } T_3 = \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}; \quad T_4 = \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

В связи с этим, апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум апериодическим звеньям первого порядка, соединенным последовательно между собой и имеющим коэффициент усиления  $\kappa$  и постоянные времени  $T_3$  и  $T_4$ .

Переходная функция апериодического звена второго порядка имеет

вид

$$h(t) = \kappa \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t) \quad (2.16)$$

Графики переходных функций апериодических звеньев показаны на

рис. 2.3., а

$$T_5 = \frac{T_3 T_4}{T_3 + T_4} \ln \left( \frac{T_3}{T_4} \right).$$

### Колебательное звено

Описывается дифференциальным уравнением, что и апериодическое звено второго порядка. Однако корни характеристического уравнения являются комплексными. Уравнение и передаточная функция колебательного звена представляются в виде

$$T^2 y^{(2)} + 2\xi T y^{(1)} + y = \kappa u, \quad (2.17)$$

$$W(p) = \frac{\kappa}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{\kappa \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2}, \quad (2.18)$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  – частота свободных колебаний при отсутствии затухания;  $\zeta$  – коэффициент затухания ( $0 < \zeta < 1$ )

Переходная функция колебательного звена:

$$h(t) = \kappa \left[ 1 - e^{-\gamma t} \left( \cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right) \right] \cdot 1(t) \quad (2.19)$$



$$\gamma = \frac{\omega}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2};$$

$$\gamma = \xi \omega_0;$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Параметры выражения (2.19) можно легко определить по графику переходной функции (см. рис. 2.4а).

### Консервативное звено

Может быть получено из колебательного звена, если  $\zeta=0$ . В этом случае корни характеристического уравнения  $T^2 p^2 + 1 = 0$  будут чисто мнимые.

Передающая функция консервативного звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1},$$

(2.20)

а его переходная функция

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t) \cdot 1(t) \quad (2.21)$$

Графики переходных функций колебательного и консервативного

звеньев показаны на рис. 2.4.

## 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Построить схемы моделирования динамических звеньев:

- интегрирующего;
- интегрирующего с запаздыванием;
- изотропного;
- реального дифференцирующего
- апериодического первого порядка;
- апериодического второго порядка;
- колебательного;
- консервативного.

Параметры звеньев установить в соответствии с вариантом задания (см. табл. 2.1.)

4.2. Осуществить моделирование и снять переходные характеристики типовых динамических звеньев.

4.3. Для колебательного звена определить значение коэффициента затухания  $\zeta$ , при котором время переходного процесса будет минимальным.

4.4. Сделать сравнительный анализ результатов моделирования



Таблица 2.1

### Параметры динамических звеньев

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k$	5	1	10	4	1,5	3	10	14	5	4	1	2
$T$	2	0,1	5	1	0,2	3	5	5	1	0,4	0,2	0,2
$T_1$	3	0,2	4	2	0,4	6	3	6	2	0,2	0,3	0,25
$T_2$	1,3	0,8	1	0,8	0,45	1	1,1	1,41	1	0,3	0,35	0,3
$\zeta$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,25	0,2	0,25	0,3	0,4	0,6	0,5	0,55

### 5. УКАЗАНИЯ И ПОЯСНЕНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Моделирование (сборку схем и снятие переходных характеристик) проводите в последовательности, рассмотренной в лабораторной работе №1 «Моделирование линейных систем автоматического управления».

### 6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать следующие разделы:

1. Цель работы.
2. Порядок выполнения работы.
3. Математические модели динамических звеньев
4. Кривые переходных характеристик (8 графиков переходных процессов).
5. Выводы. Сравнительный анализ результатов моделирования.

### 7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7.1. Назовите типовое динамическое звено, у которого корни знаменателя передаточной функции чисто мнимые, а числитель передаточной функции вещественная постоянная величина?

7.2. Какому динамическому звену соответствует переходная функция  $h(t) = (1 - 2e^{-0.5t} + e^{-t}) \cdot 1(t)$ .

Определить параметры этого звена.

7.3. Динамическое звено описывается дифференциальным уравнением  $4y^{(2)} + ay^{(1)} + y = 3u$ .

Найти значение параметра  $a$ , при котором звено будет колебательным.

7.4. Нарисовать электрическую схему дифференцирующего звена.

7.5. Определить переходную функцию  $h(t)$  динамического звена, заданного уравнением:  $y^{(1)} + 2y = 1.5u$ .



## Лабораторная работа № 3

# АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование точности систем автоматического регулирования в различных типовых режимах.

### 2. УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

При подготовке к лабораторной работе необходимо изучить тему: «Точность систем автоматического управления в типовых режимах» [1], [2]. В соответствии с вариантом задания составить схемы моделей и произвести расчет параметров систем автоматического регулирования.

### 3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Точность работы любой системы автоматического управления наиболее полно характеризуется мгновенным значением *ошибки рассогласования*  $\varepsilon(t)$ , равной разности между заданной  $g(t)$  и действительной  $y(t)$  значениями регулируемой переменной в соответствии с уравнением

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t). \quad (3.1)$$

При этом значение  $\varepsilon(t)$  оценивается при типовых входных воздействиях: постоянном, линейно или квадратично нарастающим.

Для характеристики точностных свойств систем управления используется понятие установившейся ошибки слежения. Установившаяся ошибка  $\varepsilon_y(t)$ , представляет собой функцию времени, удовлетворяющую условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t) - \varepsilon_y(t)] = 0 \quad (3.2)$$

для любых начальных условий и заданного воздействия, т.е. она характеризует ошибку слежения, установившуюся после завершения переходного процесса. Предельное значение установившейся ошибки определяется выражением:

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \quad (3.3)$$

Величина предельного значения установившейся ошибки при типовом воздействии (табл. 3.1) наиболее просто может быть рассчитана, если использовать передаточную функцию замкнутой системы по ошибке рассогласования:

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1+W(p)}, \quad (3.4)$$

где  $E(p)$  и  $G(p)$  – соответственно изображения величины рассогласования и задающего воздействия;  $W(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы, включающая в себя передаточные функции объекта регулирования  $W_0(p)$  и регулятора  $R(p)$  (рис. 3.1).

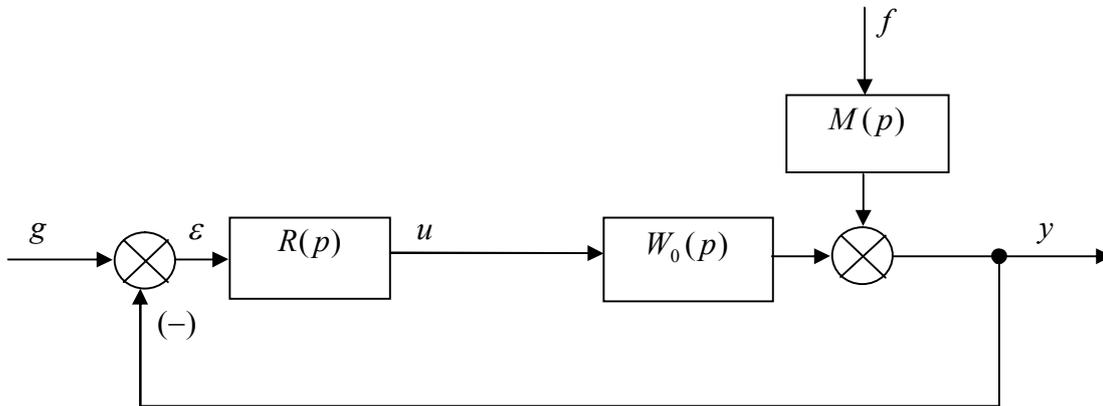


Рис. 3.1 Система автоматического управления:  $u$  – управление;  $f$  – возмущающее воздействие;  $M(p)$  – передаточная функция для введения в систему возмущения

Значение установившейся ошибки определяется согласно теореме о конечном значении:

$$\varepsilon_y = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Phi_\varepsilon(p) \cdot G(p) \quad (3.5)$$

Разложим  $\Phi_\varepsilon(p)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $p=0$

$$\Phi_\varepsilon(p) = C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \frac{C_3}{3!} p^3 + \dots, \quad (3.6)$$

где

$$c_i = \left[ \frac{d^i}{dp^i} \Phi_\varepsilon(p) \right]_{p=0}; i = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя (3.6) в (3.5) и переходя во временную область, получаем выражение установившейся ошибки при произвольном входном воздействии

$$\varepsilon_y(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{d}{dt} g(t) + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} g(t) + \frac{c_3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} g(t) + \dots \quad (3.7)$$

Здесь постоянные  $c_i$  носят название *коэффициентов ошибок*. Если  $g(t)$  изменяется *достаточно медленно*, то для приближенной оценки  $\varepsilon_y(t)$  можно использовать конечное число членов ряда (3.7).

Точность работы системы связана с *порядком астатизма*. Система называется ***статической***, если она имеет нулевой порядок астатизма, т.е.



в выражении (3.7)  $c_0 \neq 0$ . В общем случае, если система имеет  $K$ -й порядок астатизма, то  $c_i = 0$  для всех  $0 \leq i < K$  и  $c_K \neq 0$ .

Таблица 3.1

Типовые задающие воздействия

Изображение типового задающего воздействия	Постоянное $g(t) = A$	Линейно нарастающее $g(t) = V \cdot t$	Квадратично нарастающее $g(t) = \frac{at^2}{2}$
$G(p)$	$\frac{A}{P}$	$\frac{V}{P^2}$	$\frac{a}{p^3}$

Порядок астатизма системы управления устанавливается на основе анализа структурных свойств схемы. Так, система (рис. 3.1) является статической, т.е. она имеет нулевой порядок астатизма, если выполняется условие

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = K < \infty, \tag{3.8}$$

где  $K$  – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Для статической системы **при постоянном входном воздействии**  $g(t) = A$  имеем:

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1+W(p)} \cdot \frac{A}{P} = \frac{A}{1+K} \tag{3.9}$$

Последнее выражение означает, что постоянное входное воздействие обрабатывается с установившейся ошибкой, которую принято называть **статической ошибкой**. Для уменьшения статической ошибки необходимо увеличивать коэффициент усиления разомкнутой системы  $K$ .

**При линейно нарастающем задающем входном воздействии**  $g(t) = V \cdot t$  имеем:

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1+W(p)} \cdot \frac{V}{p^2} = \infty \tag{3.10}$$

Из полученного выражения следует, что линейно нарастающее воздействие обрабатывается статической системой с неограниченно растущей ошибкой.

**Система автоматического управления (рис. 3.1) является астатической, если**

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = \infty \tag{3.11}$$

и передаточная функция разомкнутой системы  $W(p)$  может быть представлена в виде

$$W^*(p) = \frac{1}{p^r} \cdot W(p), \tag{3.12}$$



где  $W(p)$ - передаточная функция статической системы, для которой выполняется условие (3.8);  $r$  – порядок астатизма системы.

Для астатической системы первого порядка при постоянном задающем воздействии  $g(t) = A$  имеем:

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{W(p)}{P}} \cdot \frac{A}{P} = 0 \quad (3.13)$$

При линейно нарастающем задающем воздействии  $g(t) = V \cdot t$

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{W(p)}{P}} \cdot \frac{V}{P^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P}{P + K} \cdot \frac{V}{P} = \frac{V}{K} \quad (3.14)$$

Установившиеся ошибки автоматического управления различного астатизма при типовых задающих воздействиях приведены в таблице 3.2.

**Таблица 3.2**

**Установившиеся ошибки систем**

Порядок астатизма	$g(t) = A$	$g(t) = V \cdot t$	$g(t) = \frac{at^2}{2}$
0	$\frac{A}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{V}{K}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{a}{K}$

Аналогичным образом может быть введено понятие порядка астатизма по возмущающему воздействию. При этом следует отметить, что порядок астатизма по возмущающему воздействию не соответствует порядку астатизма по задающему воздействию.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации величины  $y(t)$  системы, представленной на рис. 3.1.

На основе структурной схемы системы получаем при  $g(t) = 0$ :

$$y = W_0(p) \cdot R(p) \cdot (-y) + M(p)F, \quad (3.15)$$

где  $Y$ ,  $F$  – соответственно изображения регулируемой величины и возмущающего воздействия.

Так как  $W_0(p)R(p) = W(p)$ , можно определить передаточную функцию замкнутой системы по возмущающему воздействию:

$$\Phi_f(p) \equiv \frac{y}{F} = \frac{M(p)}{1 + W(p)} \quad (3.16)$$

При единичной отрицательной обратной связи и при  $g(t) = 0$  имеем –  $Y = E$ , тогда передаточная функция замкнутой системы для ошибки по



возмущающему воздействию будет иметь тот же вид, что и для регулируемой величины, т. е.

$$\Phi_{\varepsilon f}(p) = \frac{E}{F} - \Phi_f(p). \quad (3.17)$$

Таким образом, возмущающее воздействие  $f$  дает статическую ошибку

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ -p \frac{M(p)}{1+W(p)} \cdot F \right] = -\frac{A}{1+K}, \quad (3.18)$$

где  $M(p)=1$ ;  $F = \frac{A}{p}$ ;  $\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = K$ .

#### 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Исследовать систему с астатизмом нулевого порядка. Структурная схема системы представлена на рис. 3.2, где  $R(p)=K$ . Варианты передаточной функции  $W_0(p)$  объекта управления и характеристики задающего воздействия  $g(t)$  приведены в таблице 3.3.

4.1.1. Получить кривые переходного процесса для трех значений  $K (K=1, 5, 10)$  при подаче на вход системы сигнала  $g(t)=A$  и определить предельные значения установившейся ошибки.

4.1.2. Получить кривые переходного процесса при подаче на вход системы линейно нарастающего воздействия  $g(t)=V \cdot t$ .

4.2. Исследовать систему с астатизмом первого порядка. В схеме (см. рис. 3.2) принять  $R(p)=K/p$ . Варианты передаточной функции  $W_0(p)$  даны в табл. 3.4, а характеристики заданного воздействия  $g(t)$  приведены в таблицах 3.3 и 3.4.

4.2.1. Получить кривые переходного процесса при подаче на вход системы задающего воздействия  $g(t)=A$  (см. табл. 3.3).

4.2.2. Получить кривые переходного процесса при подаче на вход системы линейно нарастающего воздействия  $g(t)=V \cdot t$  (см. табл. 3.3). Определить предельные значения установившейся ошибки для различных значений коэффициента  $K (K=1, 5, 10)$ .

4.2.3. Получить кривые переходного процесса при подаче на вход системы квадратично нарастающего воздействия  $g(t)=a \cdot t^2/2$  (см. табл. 3.4).

4.3. Исследовать влияние внешнего возмущения.

4.3.1. В соответствии с вариантом (см. табл. 3.5 и рис. 3.3) собрать схему моделирования системы. При этом вид передаточной функции  $W_0(p)$  взять из табл. 3.3.

4.3.2. Получить кривые переходного процесса и определить предельное значение установившейся ошибки ( $g(t)=0$ ,  $f(t)=1(t)$ ) и  $R(p)=K$ ,  $R(p)=K/p$ .

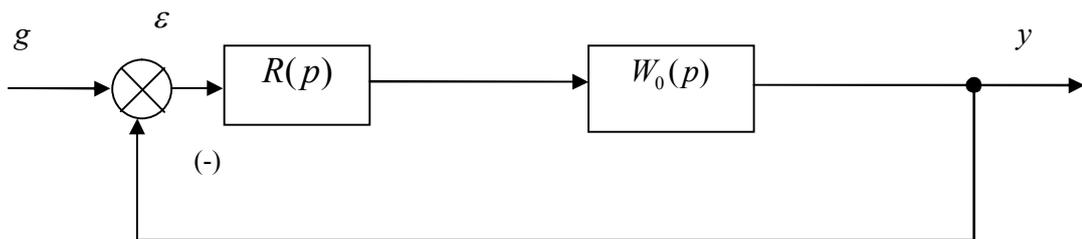


Рис. 3.2. Структурная схема системы

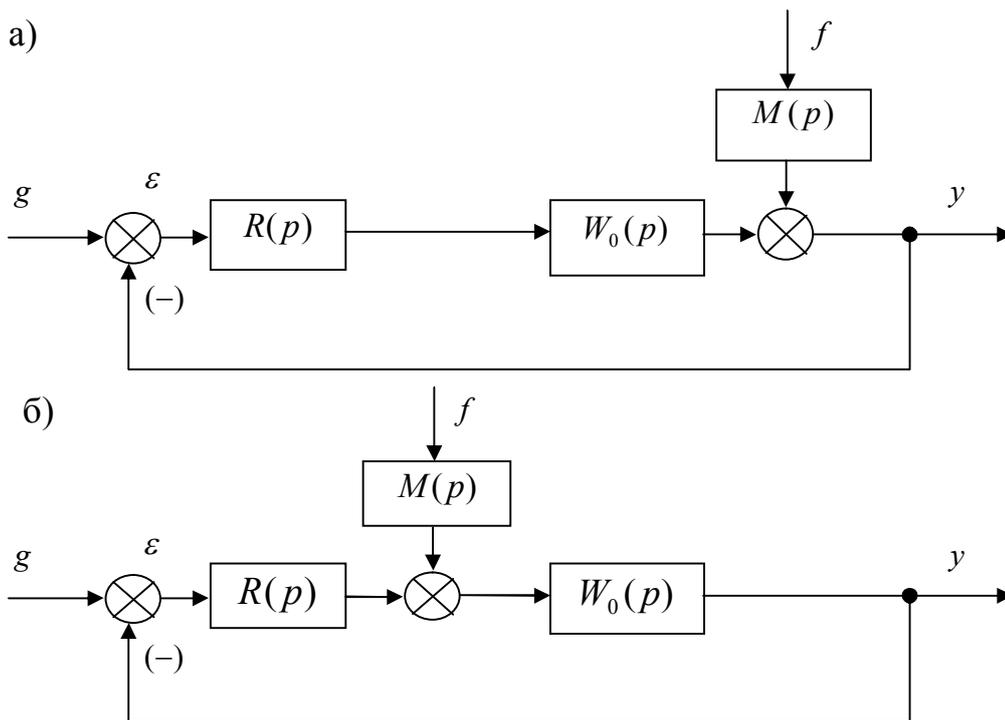


Рис. 3.3. Структурная схема системы при наличии возмущений

Таблица 3.3

**Варианты параметров систем с нулевым порядком астатизма**

Вариант	$W_0(p)$	$g=A$	$g=V \cdot t$	Вариант	$W_0(p)$	$g=A$	$g=V \cdot t$
1	$\frac{2}{3p+1}$	1	0,5t	7	$\frac{1}{2p^2+3p+1}$	1	1,5t
2	$\frac{3}{2,5p+1}$	2	2t	8	$\frac{2}{0,5p^2+2p+1}$	1	2t
3	$\frac{1,5}{0,5p+1}$	2	4t	9	$\frac{2}{0,5p^2+p+2}$	2	2t
4	$\frac{1,5}{p^2+2p+1}$	1	t	10	$\frac{8}{0,5p^2+2p+8}$	2	t
5	$\frac{1}{p^2+p+2}$	2	2t	11	$\frac{1}{0,5p^2+p+1}$	2	2t
6	$\frac{5}{p^2+5p+6}$	1	t	12	$\frac{1}{0,1p^2+0,7p+1}$	4	2t



Таблица 3.4

**Варианты параметров астатических систем**

Вариант	$W_0(p)$	$g = at^2/2$	Вариант	$W_0(p)$	$g = at^2/2$
1	$\frac{2}{3p+1}$	$0,2t^2$	7	$\frac{p+1}{2p^2+3p+1}$	$0,25t^2$
2	$\frac{3}{2,5p+1}$	$0,5t^2$	8	$\frac{p+2}{0,5p^2+2p+1}$	$0,2t^2$
3	$\frac{1,5}{0,5p}$	$0,2t^2$	9	$\frac{p+2}{0,5p^2+p+2}$	$0,5t^2$
4	$\frac{p+1,5}{p^2+2p+1}$	$0,4t^2$	10	$\frac{1,5p+8}{0,5p^2+2p+8}$	$0,3t^2$
5	$\frac{p+1}{p^2+p+2}$	$0,3t^2$	11	$\frac{p+1}{0,5p^2+p+1}$	$0,45t^2$
6	$\frac{p+5}{p^2+5p+6}$	$0,45t^2$	12	$\frac{p+1}{0,1p^2+0,7p+1}$	$0,4t^2$

Таблица 3.5

**Варианты параметров систем с возмущением**

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Схема системы (№ рис.)	<i>a</i>	<i>б</i>										
$M(p)$	0,5	0,5	1	2	0,5	2	1	2	2	1	0,5	1
$f$	2	2	-0,5	1	2	1	1	0,75	-0,75	2	-1	0,5

**5. УКАЗАНИЯ И ПОЯСНЕНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ**

5.1. Для «сборки» схемы моделирования системы с астатизмом нулевого порядка разместите на рабочем поле пакета SIMULINK усилитель, формирователь передаточных характеристик (Transfer function Block) и сумматор. Соедините компоненты как показано на структурной схеме (рис. 3.2). Установите параметры компонентов в соответствии с вариантом задания.

5.2. Для исследования точности статической системы при постоянном входном воздействии подключите к входу системы генератор сигналов из поля источников питания (Sources). Задайте нужное значение входного воздействия. Расположите осциллограф на рабочем поле пакета. На один вход осциллографа подайте задающее воздействие  $g(t)$ , на другой – ошибку  $\varepsilon(t)$ . Снимите зависимости  $g(t)$  и  $\varepsilon(t)$  для разных значений коэффициентов  $K$ .

5.3. Для исследования точности статической системы при линейно нарастающем входном воздействии включите последовательно с источником



питания интегратор (Integrator). Задайте нужное значение скорости нарастания входного сигнала. Снимите зависимости  $g(t)$  и  $\varepsilon(t)$  для разных значений коэффициентов  $K$ .

5.4. При исследовании точности астатической системы первого порядка включите интегратор в структуру схемы модели последовательно с формирователем передаточных характеристик. Снимите зависимости  $g(t)$  и  $\varepsilon(t)$  при подаче на вход системы постоянного, линейно и квадратично нарастающих сигналов. **Квадратично нарастающее входное воздействие можно получить, если включить последовательно с источником питания два интегратора.**

5.5. Аналогично исследуйте влияние внешнего возмущающего воздействия на точность системы с астатизмом нулевого и первого порядков.

5.6. Сделайте выводы.

## 6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать следующие разделы:

1. Цель работы.
2. Порядок выполнения работы.
3. Математические модели исследуемых систем и кривые переходных процессов.
4. Графики экспериментально полученных зависимостей предельных значений установившихся ошибок  $\varepsilon$  в зависимости от коэффициента  $K$ .
5. Аналитический расчет установившихся ошибок систем.
6. Выводы

## 7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7.1. Определить порядок астатизма системы автоматического управления (см. рис. 3.2).

7.2. Чему равен коэффициент  $c_o$  в формуле (3.6) для системы с нулевым порядком астатизма?

7.3. Определить связь коэффициента усиления разомкнутой системы с предельным значением установившейся ошибки по задающему воздействию.

7.4. Можно ли компенсировать ошибку от возмущения, повысив порядок астатизма по задающему воздействию?

7.5. Определить порядок астатизма системы автоматического управления (см. рис. 3.3).



## Лабораторная работа №4

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментальное построение областей устойчивости линейных систем автоматического управления и изучение влияния на устойчивость системы ее параметров.

### 2. УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

При подготовке к данной лабораторной работе необходимо изучить тему «Устойчивость систем автоматического управления».

### 3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

*Под устойчивостью САУ понимается способность системы возвращаться в заданное состояние или к заданному закону движения после отклонений, вызванными внешними возмущающими воздействиями.*

Физической причиной неустойчивости замкнутых систем является инерционность их элементов, из-за чего воздействие обратной связи, направленное на ликвидацию отклонения, запаздывает и поступает на вход объекта регулирования, когда отклонение уже изменилось. Этот процесс протекает либо в виде непрерывно возрастающего отклонения от заданного закона движения, либо в виде колебаний вокруг заданного значения выходной величины.

Устойчивость системы зависит от знака вещественных частей корней характеристического уравнения замкнутой системы:

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{D(p)}$$

$$D(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0$$

Кроме этого корневого критерия устойчивости существуют **косвенные критерии**: алгебраические – Гаусса и Гурвица, частотные – Михайлова и Найквиста.

С повышением точности САУ, т.е. с увеличением коэффициента усиления, система становится менее устойчивой. Это объясняется тем, что с ростом коэффициента усиления на объект управления обратная связь действует сильнее. При этом увеличиваются отклонения под действием запаздывающего сигнала обратной связи.

Максимальный коэффициент, при котором система сохраняет устойчивость, называется критическим (*Ккр*).



Кроме коэффициента усиления, устойчивость зависит от инерционных свойств звеньев системы: постоянных времени и постоянных запаздывания. Поэтому устойчивость часто рассматривают как функцию двух или нескольких параметров. Обычно это – коэффициент усиления и постоянная времени одного из звеньев. На основании любого критерия устойчивости могут быть получены области устойчивости в плоскости двух параметров.

Под областью устойчивости в пространстве параметров понимается множество значений параметров, при которых система является асимптотически устойчивой.

Под областью неустойчивости, соответственно, понимается множество значений параметров, при которых система является неустойчивой. Области устойчивости и неустойчивости отделены друг от друга так называемыми границами устойчивости.

Граница устойчивости связывает выбранные параметры в предельном режиме перехода к неустойчивости, так что  $K_{кр}=f(T)$ .

Эта зависимость может быть получена расчетным путем на основе любого критерия устойчивости.

Например, по критерию устойчивости Михайлова система находится на границе устойчивости, если годограф

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega)$$

проходит через начало координат.

Таким образом, уравнение границы устойчивости в пространстве варьируемых параметров  $K$  и  $T$ , согласно этому критерию примет вид:

$$U_D(K, T, \omega) = 0$$

$$V_D(K, T, \omega) = 0$$

Исключив из уравнения  $\omega$ , можно вывести уравнение границы устойчивости, связывающее параметры  $T$  и  $K_{кр}$ .

Зависимость  $K_{кр}=f(T)$  в данной работе определяется экспериментальным путем.

#### 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Собрать схему модели системы в соответствии с вариантом задания.

4.2. Экспериментальным путем получить границу устойчивости системы  $K_{кр}=f(T)$ .

4.3. Выбрать точку на графике  $K_{кр}=f(T)$ . Построить годограф Михайлова для системы с выбранными параметрами.

4.4. Сравнить результаты эксперимента и расчета.



## 5. УКАЗАНИЯ И ПОЯСНЕНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

5.1. Соберите схему моделирования системы, представленной на рис.4.1. Моделирование (сборку схемы и снятие переходных характеристик) проводите в последовательности, рассмотренной в лабораторной работе № 1 «Моделирование линейных систем автоматического управления».

5.2. Установите значение постоянной времени  $T_I$  в соответствии заданным вариантом (см. табл. 4.1).

5.3. Установите значение постоянной времени  $T$  равное  $0,1c$ .

5.4. Изменяя коэффициент усиления  $K$ , подберите такое его значение, при котором система находится на границе устойчивости. Тип устойчивости системы определяется по виду переходного процесса при нулевом входном воздействии  $g(t)=0$  и при нулевом значении выходной переменной  $y(0)=0$ .

5.5. Для получения следующей точки границы устойчивости измените значение постоянной времени  $T$ . Количество точек, необходимых для построения границы устойчивости, должно быть не менее 10. Диапазон изменения постоянной времени  $T$  – от  $0,1c$ . до  $5c$ . Результаты эксперимента занесите в таблицу 4.2. Постройте график  $K_{кр}=f(T)$ .

5.6. Выберите точку на графике  $K_{кр}=f(T)$ . Для выбранных параметров системы постройте годограф Михайлова.

5.7. Сравните результаты расчета и эксперимента.

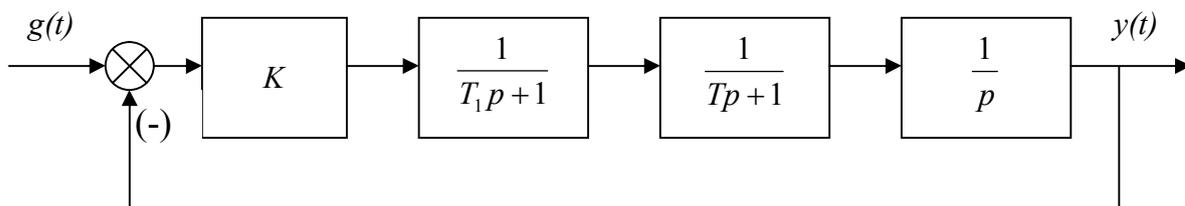


Рис. 4.1. Структурная схема линейной системы автоматического управления

Таблица 4.1.

### Варианты задания

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_I, c$	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0	0,25

Таблица 4.2.

### Граница устойчивости

$T, c$	0,1											5
$K_{кр}$												



## 6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать следующие разделы:

1. Цель работы.
2. Порядок выполнения работы.
3. Результаты работы.

Примечание: этот раздел должен содержать структурную схему, схему модели системы, экспериментальную зависимость  $K_{кр}=f(T)$ , годограф Михайлова.

4. Выводы.
5. Используемая литература.

## 7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7.1. Сформулировать критерии устойчивости Гурвица, Михайлова, Найквиста, логарифмический критерий.

7.2. Как по логарифмическому критерию устойчивости определить  $K_{кр}$  и  $\omega_{кр}$ ?

7.3. Как построить  $K_{кр}(T)$ , используя критерий устойчивости Гурвица?

7.4. Сформулируйте корневой критерий устойчивости.

7.5. Постройте, используя любой критерий устойчивости, зависимость  $K_{кр}=f(T)$  для варианта системы, передаточная функция которой имеет вид, указанный в таблице 4.3.

**Таблица 4.3.**

№ варианта	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$W(p) = \frac{K}{p \cdot (T \cdot p + 1)(T_1 \cdot p + 1)}$
2	$W(p) = \frac{K}{(T \cdot p + 1) \cdot [(T_1)^2 \cdot p + T_2 \cdot p + 1]}$
3	$W(p) = \frac{K}{p \cdot [(T_1)^2 \cdot p^2 + T \cdot p + 1]}$
4	$W(p) = \frac{K}{(T \cdot p + 1) \cdot (T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}$



## Лабораторная работа № 5

# АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОЛЮСОВ И НУЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ

### 1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование связи динамических свойств системы управления с распределением полюсов и нулей ее передаточной функции.

### 2. УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

При подготовке к лабораторной работе необходимо изучить тему: «Влияние нулей и полюсов передаточной функции на динамические свойства системы автоматического управления». К занятию составить схемы моделирования исследуемых систем в соответствии с вариантом задания.

### 3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В общем случае поведение системы описывается линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (5.1)$$

где  $y$  – выходная переменная;  $u$  – управляющее воздействие.

Передаточная функция системы представляет собой дробно-рациональную функцию аргумента  $p$  полиномов  $B(p)$  и  $A(p)$ .

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (5.2)$$

где  $a_0, \dots, a_{n-1}; b_0, \dots, b_{m-1}$  – постоянные параметры системы;  $a_0=K$  – для астатических и  $a_0=I+K$  – для статических систем.

Следует отметить, что в реальных системах всегда  $m < n$ .

Передаточную функцию можно представить в виде:

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

(5.3)

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  – корни уравнения  $B(p)=0$  или нули передаточной функции  $\Phi(p)$ ;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни уравнения  $A(p)=0$  или полюсы передаточной функции  $\Phi(p)$ .

Характер переходного процесса зависит как от знаменателя, так и от числителя передаточной функции системы. Полный анализ качества, поэтому может быть произведен лишь на основе анализа распределения не только полюсов передаточной функции (корней ее знаменателя), но и нулей (корней числителя). При анализе распределения полюсов и нулей необходимо определить:



- 1) связь параметров с распределением полюсов и нулей;
- 2) связь распределения полюсов и нулей с переходной функцией и ее основными показателями.

Если числитель передаточной функции не имеет нулей, т.е. равен постоянной величине, определяют только распределение полюсов. В этом случае передаточную функцию можно представить выражением

$$\Phi(p) = \frac{b}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}. \quad (5.4)$$

Полюсы передаточной функции (5.4) определяют вид переходной функции  $h(t)$  системы и, следовательно, такие динамические показатели, как время переходного процесса  $t_n$  и перерегулирование  $\sigma$ . При этом установившееся значение переходной функции рассчитывается по формуле  $h(\infty) = b/a_0 = K$

Используя понятие *среднегеометрического корня*

$$\omega = \sqrt[n]{|p_1 p_2 \dots p_n|} = \sqrt[n]{a_0} \quad (5.5)$$

можно характеристический полином передаточной функции (5.4) представить в виде:

$$A(p) = p^n + \alpha_{n-1}\omega p^{n-1} + \dots + \alpha_1\omega^{n-1}p + \omega^n \quad (5.6)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  – коэффициенты, определяемые по формуле:  $\alpha_i = \frac{a_i}{\omega^{n-i}}$

Среднегеометрический корень  $\omega$  служит мерой быстродействия протекания переходных процессов. Если увеличить  $\omega$  в 10 раз, то переходный процесс будет протекать в 10 раз быстрее. В связи с этим, при  $\omega=1$  полином (5.6) следует рассматривать как *нормированный полином*, которому соответствует *нормированная переходная функция  $h(\tau)$*  и *нормированное время переходного процесса  $\tau$* . Если качество переходного процесса, с точки зрения перерегулирования, является приемлемым, то требуемое время переходного процесса  $t_n$  можно обеспечить соответствующим выбором величины  $\omega$ .

Для обеспечения требуемого значения перерегулирования необходимо задаться определенным распределением корней нормированного полинома, например, биномиальным распределением Ньютона или распределением Баттерворта.

### **Распределение Ньютона.**

Выражение полинома Ньютона представим в виде:

$$A(p) = (p + \omega)^n = p^n + \alpha_{n-1}\omega p^{n-1} + \dots + \alpha_1\omega^{n-1}p + \omega^n, \quad (5.7)$$

где  $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$  – коэффициенты полинома.



Биномиальные значения коэффициентов могут быть рекомендованы для систем с передаточными функциями  $\Phi(p)$ , не имеющим нулей. Биномиальное распределение обеспечивает монотонный переходный процесс (т.е.  $\sigma = 0\%$ ).

**Таблица 5.1**

**Распределение Ньютона**

Порядок полинома $n$	Выражение полинома
1	$P + \omega$
2	$P^2 + 2\omega P + \omega^2$
3	$P^3 + 3\omega P^2 + 3\omega^2 P + \omega^3$
4	$P^4 + 4\omega P^3 + 6\omega^2 P^2 + 4\omega^3 P + \omega^4$
5	$P^5 + 5\omega P^4 + 10\omega^2 P^3 + 10\omega^3 P^2 + 5\omega^4 P + \omega^5$
6	$P^6 + 6\omega P^5 + 15\omega^2 P^4 + 20\omega^3 P^3 + 15\omega^4 P^2 + 6\omega^5 P + \omega^6$

**Распределение Баттерворта.**

Корни полинома имеют вещественную часть  $\text{Re}[p_i] \neq 0$  и равные модули  $|p_i| = \omega$ . Распределение Баттерворта обеспечивает системе управления хорошие динамические показатели с перерегулированием, не превышающим 15%. Коэффициенты нормированного полинома Баттерворта приведены в таблице 5.2.

**Таблица 5.2**

**Распределение Баттерворта**

Порядок полинома $n$	Выражение полинома
1	$p + \omega$
2	$p^2 + 1,4\omega p + \omega^2$
3	$p^3 + 2\omega p^2 + 2\omega^2 p + \omega^3$
4	$p^4 + 2,61\omega p^3 + 3,4\omega^2 p^2 + 2,61\omega^3 p + \omega^4$
5	$p^5 + 3,24\omega p^4 + 5,24\omega^2 p^3 + 5,24\omega^3 p^2 + 3,24\omega^4 p + \omega^5$

В инженерных расчетах коэффициенты нормированных полиномов используются для расчета системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bu \quad (5.8)$$

Коэффициенты уравнения (5.8)  $a_i (i=1,2,\dots,n-1)$  находятся по заданному значению времени переходного процесса  $t_n$  следующим образом:

- а) по нормированным переходным функциям определяется значение  $\tau$ ,
- б) среднегеометрический корень  $\omega$  рассчитывается по формуле  $\omega = \frac{\tau}{t_n}$ ;
- в) коэффициенты  $a_i$  искомого полинома определяются выражением



$a_i = \alpha_i \omega^{n-1}$ , где  $\alpha_i$  находятся по таблице 5.1 или 5.2 в зависимости от типа распределения корней характеристического уравнения.

Коэффициент числителя (5.4) определяется по заданной величине статического коэффициента  $K$  выражением  $v = \kappa a_0$ .

В некоторых случаях возникает задача оценки быстродействия системы без построения ее переходной характеристики. Для этого может использоваться понятие степени устойчивости. Под степенью устойчивости  $\eta$  понимается расстояние от мнимой оси до ближайшего корня или до ближайшей пары комплексных сопряженных корней. Тогда время переходного процесса

$$t_n \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \approx \frac{3}{\eta}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) обеспечивает приемлемую точность, если абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня не менее чем на порядок меньше абсолютных значений вещественных частей всех остальных корней. При наличии нулей у передаточной функции (5.2), т.е. когда

$$B(p) = p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0, \quad (5.10)$$

вывод о решающем влиянии степени устойчивости на длительность и характер переходной функции теряет силу. Нули передаточной функции при всех положительных  $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$  способствует перерегулированию. С другой стороны выбором коэффициентов полинома (5.10) можно, например, уменьшить время переходного процесса, или обеспечить инвариантность системы к некоторым типам входных сигналов.

#### 4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Составить схему моделирования (табл. 5.3) системы, представленную уравнением (5.8).

4.2. Снять кривые переходных функций  $h(\tau)$  нормированных полиномов Ньютона и Баттерворта (см. табл. 5.1 и 5.2).

4.3. Согласно заданным значениям  $t_n$  и  $K$  (см. табл. 5.3 и 5.4) рассчитать коэффициенты уравнения (5.8). Значения  $\tau$  определяются по кривым переходных функций  $h(\tau)$  нормированных полиномов Ньютона и Баттерворта.

4.4. Для каждого случая рассчитать корни характеристического уравнения и оценить время переходного процесса по формуле (5.9), затем снять кривые переходных процессов.

4.5. Составить схему моделирования, согласно уравнения (5.1).

4.6. Используя набор параметров  $b_0, \dots, b_{m-1}$ , приведенных в табл. 5.5 дополнить передаточную функцию (5.4) с коэффициентами рассчитанными в п.4.3 для полинома Ньютона, до вида передаточной функции (5.2).

4.7. Снять кривые переходных процессов.

4.8. Сделать сравнительный анализ результатов моделирования.



## 5. УКАЗАНИЯ И ПОЯСНЕНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Моделирование (сборку схем и снятие переходных характеристик) проводите в последовательности, рассмотренной в лабораторной работе №1 «Моделирование линейных систем автоматического управления».

## 6. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- 6.1. Цель работы.
- 6.2. Порядок выполнения работы.
- 6.3 Математические модели систем.
- 6.4. Коэффициенты и распределение полюсов и нулей на комплексной плоскости.
- 6.5. Результаты моделирования (графики пяти переходных функций).
- 6.6. Оценка времени переходного процесса.
- 6.7. Сравнительный анализ результатов моделирования.

## 7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7.1. Определить установившееся значение переходной функции системы, описываемой дифференциальным уравнением:

$$7.1.1. \ddot{y} + z \dot{y} + 4y = \dot{g} + 3g .$$

$$7.1.2. \dot{y} + 5y = 0,5\dot{g} + g .$$

7.2. Укажите на комплексной плоскости полюса и нули передаточной функции замкнутой системы:

$$\Phi(p) = \frac{p^2 + p}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1} .$$

7.3. Определить время переходного процесса для системы с характеристическим биномиальным полиномом при  $n = 4$  и  $\omega = 5$ .

7.4. Рассчитать время переходного процесса в системе, описываемой дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + 1,41\dot{y} + y = v$$

7.5. Определить установившуюся реакцию на внешнее воздействие  $g(t) = 2t$  системы, описываемой дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + y = \ddot{g} + g .$$



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

### ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПО ПЕРЕХОДНОМУ ПРОЦЕССУ

**Цель работы:** укрепить теоретические знания и овладеть практическими навыками, необходимые для определения качества по переходному процессу.

**Краткие теоретические сведения:** при исследовании систем автоматического регулирования приходится решать задачу обеспечения требуемых показателей качества по переходному процессу: быстродействия, колебательности, перерегулирования, характеризующих точность и плавность протекания процесса.

Показатели качества, определяемые непосредственно по кривой переходного процесса, называют прямыми оценками качества. Кривая переходного процесса может быть получена теоретически и экспериментально.

Переходный процесс в системе зависит не только от свойств САУ, но и от характера внешнего воздействия, которое в общем случае может быть сложной функцией времени. Поведение системы рассматривают при следующих типовых воздействиях: единичной ступенчатой функции  $1(t)$ , импульсной  $\delta(t)$  и гармонической функций. Прямые оценки качества получают по кривой переходной характеристики  $h(t)$ , т. е. при воздействии единичной ступенчатой функции

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

и нулевых начальных условиях.

Эту характеристику можно построить для выходной величины или для отклонения  $\varepsilon_{св}(t)$  (рис. 6.1, а и б). К прямым оценкам качества относят:

1. Время регулирования  $t_p$  – минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью

$$|\varepsilon_{св}(t)| \leq \Delta \text{ при } t \geq t_p$$

или

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta,$$

где  $\Delta$  - постоянная величина, значение которой нужно оговаривать (задается величина  $\Delta$  в процентах от установившегося значения выходной величины  $h_{уст}$ ).

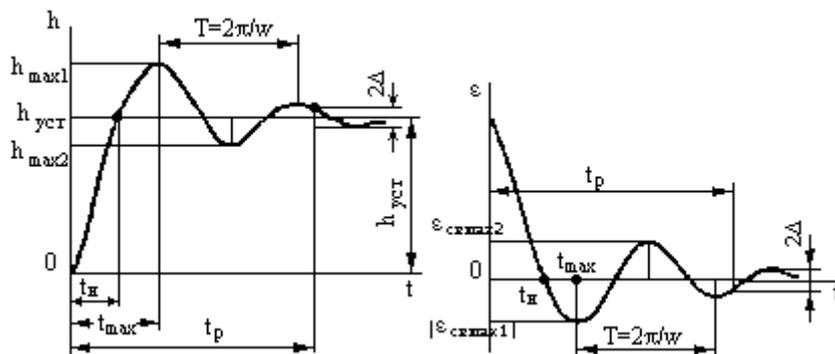


Рис. 6.1

2. Перерегулирование  $\sigma$  - максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%$$

где  $h_{\max 1}$  - значение первого максимума, или

$$\sigma = \frac{|\varepsilon_{\text{св}}(t)|_{\max 1}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\% = \frac{|\varepsilon_{\text{св}}(t)|_{\max 1}}{|\varepsilon_{\text{св}}(0)|} \cdot 100\%$$

Допустимое значение перерегулирования в каждом конкретном случае будет подсказано опытом эксплуатации системы, обычно  $\sigma=10 \div 30 \%$ , но в некоторых случаях допускается и до  $70 \%$ . Иногда перерегулирование недопустимо совсем.

3. Частоту колебаний  $\omega=2\pi/T$ , где  $T$  - период колебаний для колебательных переходных характеристик.

4. Число колебаний  $n$ , которое имеет переходная характеристика  $h(t)$  или  $\varepsilon_{\text{св}}(t)$  за время регулирования ( $t_p$ ).

При проектировании систем чаще всего допускают  $n=1 \div 2$ , а иногда и до  $3 \div 4$ , но в некоторых случаях колебания в системе недопустимы.

5. Время достижения первого максимума  $t_{\max}$ .

6. Время нарастания переходного процесса  $t_n$  абсциссу первой точки пересечения кривой переходной характеристики  $h(t)$  с уровнем установившегося значения  $h_{\text{уст}}$  или кривой отклонения  $\varepsilon_{\text{св}}(t)$  с осью абсцисс.

7. Декремент затухания  $\chi$ , равный отношению модулей двух смежных перерегулирований:

$$\chi = \frac{h_{\max 1} - h_{\text{уст}}}{h_{\max 2} - h_{\text{уст}}}$$

### Задание и порядок выполнения лабораторной работы

1. С помощью заданной передаточной функции

$$W_s = \frac{k}{s^3 T_1 T_2 + s^2 (T_1 + T_2) + s + 1}$$

постройте переходной процесс.



Варианты указаны в табл.6.1.

2. По полученному графику определите все прямые показатели качества.
3. Сделайте выводы по результатам.

**Таблица 6.1**

№	$T1$	$T2$	$k$	№	$T1$	$T2$	$k$
1	0.45	1.0	4	11	0.51	0.11	0.2
2	0.56	0.93	5	12	0.35	1.0	8.56
3	0.89	0.57	89	13	0.13	0.013	13
4	0.65	0.3	4.2	14	0.46	0.19	3.79
5	0.7	0.67	6.67	15	0.2	0.01	8
6	0.98	0.23	9	16	0.54	0.91	3.4
7	1.0	0.86	3.8	17	1.0	0.63	6.7
8	0.34	0.28	5.54	18	0.3	0.44	3
9	0.39	0.83	6.12	19	0.96	0.99	8.67
10	0.99	0.92	90	20	0.5	1.0	3.4

### **Контрольные вопросы**

1. Почему исследуемые в этой работе показатели качества называются прямыми?
2. Дайте определение следующим понятиям:
  - время регулирование;
  - перерегулирование;
  - частота колебаний;
  - число колебаний;
  - достижение первого максимума;
  - время нарастания переходного процесса;
  - декремент затухания.
3. Что такое « $\Delta$ »?
4. Какое допустимое значение может принимать перерегулирование?
5. Какое количество колебаний приемлемо в системах управления?

## Лабораторная работа 7 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

**Цель работы:** исследование базовых нелинейных блоков и их выходных характеристик.

### Краткие теоретические сведения.

**Нелинейной системой** называется такая система, в состав которой входит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Такое звено называется нелинейным звеном или нелинейным элементом.

Путем эквивалентного преобразования структурных схем и нелинейных звеньев большое число нелинейных систем можно представить в виде замкнутого контура с последовательным включением нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ), как показано на рис.7.1.

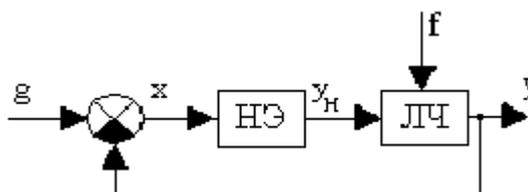


Рис.7.1 Функциональная схема нелинейной системы:  
НЭ - нелинейный элемент; ЛЧ - линейная часть

**Классификация нелинейных элементов и систем.** Нелинейные звенья классифицируются по различным признакам. Наибольшее распространение получила классификация по статическим и динамическим характеристикам, так как в системах чаще всего нелинейности приходится учитывать в виде характеристик. Эти характеристики могут быть как однозначными, так и двузначными (петлевыми), симметричными и несимметричными относительно начала координат.

Различают следующие основные типы нелинейных звеньев.

**Нелинейные звенья с гладкими криволинейными характеристиками.** Примеры таких характеристик приведены на рис.30.

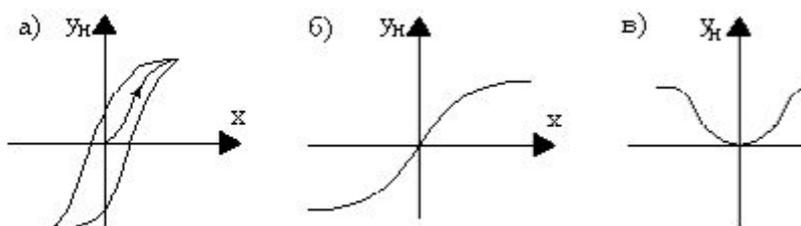


Рис.7.2 Гладкие криволинейные характеристики:  
а - гистерезисная; б, в - усилительные

На рис.7.1,а изображена двузначная гистерезисная (запаздывающая) характеристика. Характеристика (рис.7.1,б) отображает насыщение или ограничение и соответствует реальному амплитудному усилителю, а характеристика (рис.7.1,в) - реальному усилителю мощности. Характеристики (рис.7.1,а и б) - нечетно-симметричные, а характеристика (рис.7.1,в) - четно-симметричная.

**Нелинейные звенья с кусочно-линейными характеристиками.** Некоторые из таких характеристик представлены на рис.7.2.

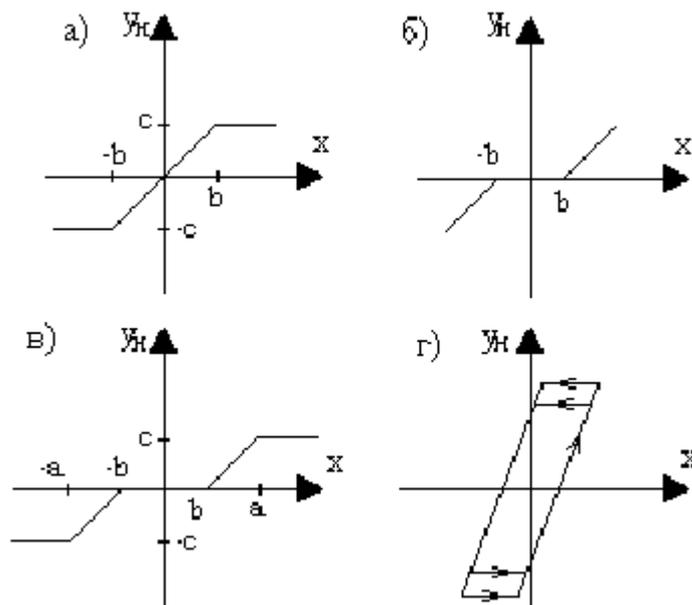


Рис.7.3. Кусочно-линейные характеристики:  
 а - с насыщением; б - с зоной нечувствительности;  
 в - с насыщением и зоной нечувствительности; г - люфт

Характеристика (рис.7.3,а) отображает насыщение, характеристика (рис.7.3,б) - зону нечувствительности, а характеристика (рис.7.3,в) соответствует звену, обладающему одновременно зоной нечувствительности и насыщением. Характеристика (рис.7.3,г) позволяет учесть люфт или зазор кинематической передачи.

**Релейные звенья** - это элементы, которые на своем выходе выдают конечное число фиксированных значений. Три наиболее типовые релейные характеристики изображены на рис.7.4.

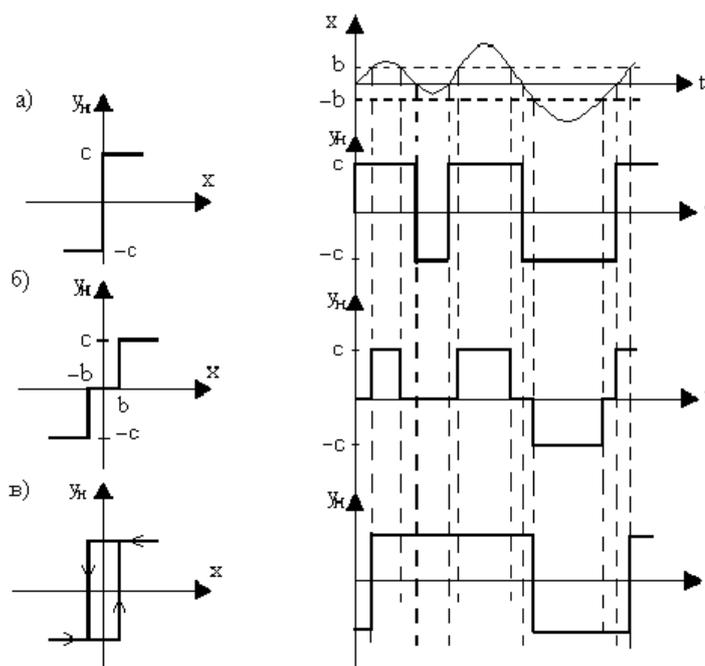


Рис.7.4 Релейные характеристики:  
 а - идеальная; б - с зоной нечувствительности; в - гистерезисная

Характеристика (рис.7.4,а) соответствует идеальному двухпозиционному реле, характеристика (рис.7.4,б) - трехпозиционному реле с зоной нечувствительности, а характеристика (рис.7.4,в) - двухпозиционному поляризованному реле.

Кроме того, на рис.7.4 показано прохождение непрерывного сигнала через соответствующие типы реле. Откуда следует, что коэффициент передачи реле зависит от величины входного воздействия.

Для улучшения динамических свойств систем специально созданы нелинейные звенья с опережающими двузначными статическими характеристиками.

Часто встречаются элементы с несимметричными относительно начала координат статическими характеристиками.

### Задание и порядок проведения работы

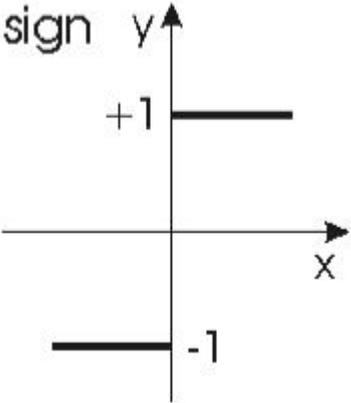
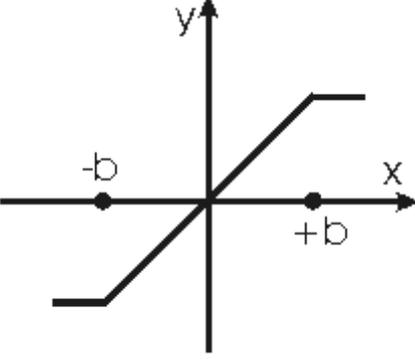
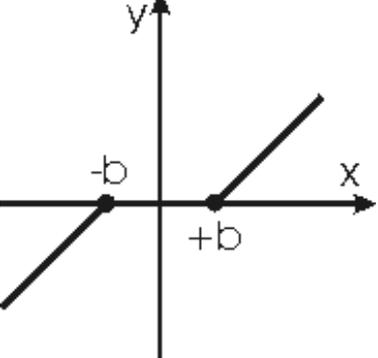
1. Открыть библиотеку Nonlinear. Исследовать типовые нелинейности, указанные в табл.7.1.

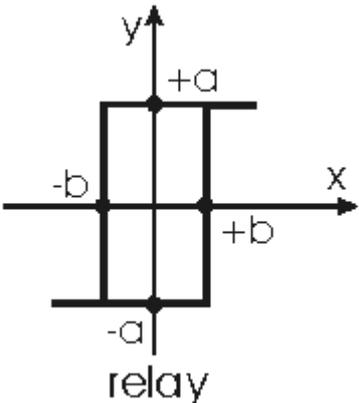
2. В соответствии с вариантом настройте их параметры. Изучите статические характеристики типовых нелинейностей, подавая на вход гармонический сигнал.

3. Статические характеристики нелинейностей фиксируются с помощью блока "ХУ Graph". Для правильного отображения сигналов следует брать амплитуду синусоидального колебания чуть больше заданного "верхнего уровня".

По полученным результатам сделайте выводы о физическом смысле этих типовых нелинейных характеристик.

Таблица 7.1

 <p>Релейная характеристика</p>																												
 <p>saturation Характеристика с зоной насыщения</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>№</th> <th>b</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>2</td><td>1,3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2,8</td></tr> <tr><td>4</td><td>3,5</td></tr> <tr><td>5</td><td>4,2</td></tr> <tr><td>6</td><td>5,6</td></tr> <tr><td>7</td><td>6,9</td></tr> <tr><td>8</td><td>1,7</td></tr> <tr><td>9</td><td>2,3</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,9</td></tr> <tr><td>11</td><td>3,7</td></tr> <tr><td>12</td><td>5,2</td></tr> </tbody> </table>	№	b	1	0,7	2	1,3	3	2,8	4	3,5	5	4,2	6	5,6	7	6,9	8	1,7	9	2,3	10	0,9	11	3,7	12	5,2	
№	b																											
1	0,7																											
2	1,3																											
3	2,8																											
4	3,5																											
5	4,2																											
6	5,6																											
7	6,9																											
8	1,7																											
9	2,3																											
10	0,9																											
11	3,7																											
12	5,2																											
 <p>dead zone Характеристика с зоной нечувствительности</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>№</th> <th>b</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>2,3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1,7</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>4</td><td>4,8</td></tr> <tr><td>5</td><td>3,4</td></tr> <tr><td>6</td><td>5,6</td></tr> <tr><td>7</td><td>2,1</td></tr> <tr><td>8</td><td>6,9</td></tr> <tr><td>9</td><td>3,5</td></tr> <tr><td>10</td><td>5,4</td></tr> <tr><td>11</td><td>2,8</td></tr> <tr><td>12</td><td>6,9</td></tr> </tbody> </table>	№	b	1	2,3	2	1,7	3	0,3	4	4,8	5	3,4	6	5,6	7	2,1	8	6,9	9	3,5	10	5,4	11	2,8	12	6,9	
№	b																											
1	2,3																											
2	1,7																											
3	0,3																											
4	4,8																											
5	3,4																											
6	5,6																											
7	2,1																											
8	6,9																											
9	3,5																											
10	5,4																											
11	2,8																											
12	6,9																											

 <p>Характеристика с гистерезисом</p>	№	<b>a</b>	<b>b</b>
	1	2	0,7
	2	1,1	1,4
	3	2	2,8
	4	0,5	0,9
	5	3,3	3,7
	6	0,9	1,5
	7	3,7	4,3
	8	2,2	2,6
	9	1,5	3,1
	10	4,8	3,7
	11	8,9	2,5
12	5,3	1,3	

### Контрольные вопросы

1. Какие Вам известны типовые нелинейности?
2. Приведите примеры и поясните физическую природу нелинейных эффектов в САУ.
3. Что называется статической характеристикой и с какой целью ее определяют?
4. В каких случаях можно и когда нельзя осуществлять линейризацию нелинейных статических характеристик?
5. Как построить графически статическую характеристику соединения: линейных и нелинейных звеньев, которые включены:
  - последовательно;
  - параллельно;
  - с помощью обратной связи?
6. По каким признакам различаются нелинейные системы от линейных систем? Приведите несколько примеров.



## Лабораторная работа 8

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

**Цель работы:** исследование динамики нелинейных систем второго порядка методом фазовой плоскости.

#### Краткое теоретическое описание

Метод фазовой плоскости используется для исследования систем второго порядка и заключается в построении фазовых портретов на плоскости. Для этого из уравнений состояния исключается время, и определяются уравнения фазовых кривых.

Для изображения процессов на фазовой плоскости нелинейное уравнение, описывающее систему, заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases}$$

где  $x, y$  - координата системы и ее первая производная;  $f(x, y)$  - нелинейная функция.

Разделив первое из уравнений на второе, получим дифференциальное уравнение, из которого исключено время  $t$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$$

Решение данного уравнения

$$y = F(x)$$

определяет уравнение фазовой траектории, которая графически изображается на фазовой плоскости  $(x, y)$ . Каждой совокупности начальных условий  $(x_0, y_0)$  соответствует свое решение и своя фазовая траектория. Семейство фазовых траекторий характеризует все возможные виды переходных процессов в данной системе управления при любых начальных условиях и образует ее фазовый портрет.

Если по линейной теории система неустойчивая и процесс расходится, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходящимся неограниченно. Картина фазовых траекторий для такой системы изображена на рис.8.1,а. Здесь вблизи начала координат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе, но далее они приближаются асимптотически к замкнутому контуру ограниченных размеров. К нему же приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Такого рода замкнутый контур представляет собой особый вид линий на фазовой плоскости и называется устойчивым предельным циклом. Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям системы.

Размеры предельного цикла представляют амплитуды колебаний самой величины  $x$  и скорости ее изменения  $y$ . Для определения периода автоколебаний необходимо решить уравнение системы во времени.

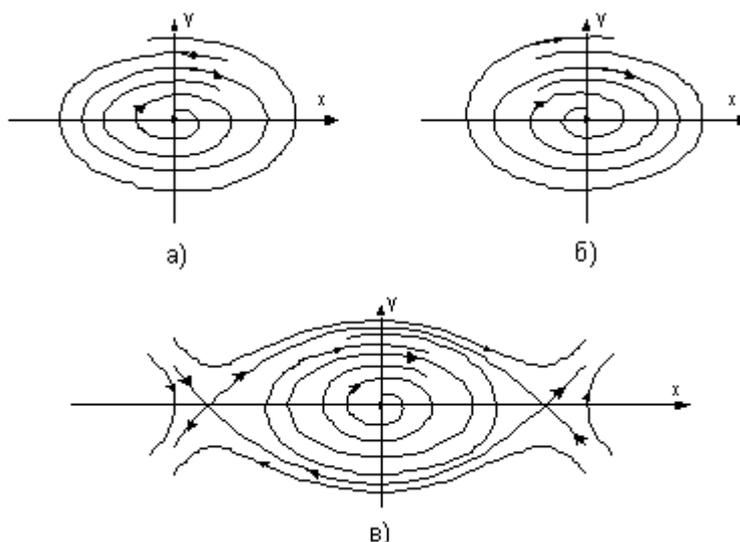


Рис.8.1. Фазовые траектории нелинейных систем:  
 а - устойчивый предельный цикл; б - неустойчивый предельный цикл;  
 в - фазовый портрет системы с сепаратрисами

Замкнутые фазовые траектории на фазовой плоскости называются предельными циклами, которые могут быть как устойчивыми (рис.8.1,а), так и неустойчивыми (рис.8.1,б). К этим предельным циклам стремятся изображающие точки при различных начальных отклонениях по различным фазовым траекториям.

В различных частях фазовой плоскости фазовые траектории нелинейной системы могут быть различными (рис.8.1,в). Линии, разделяющие фазовую плоскость на участки с различными фазовыми траекториями, называются сепаратрисами. Поведение системы в каждой области фазовой плоскости описывается своим дифференциальным уравнением.

Кроме того, для фазового портрета нелинейных систем с разрывными характеристиками характерно наличие линий переключения, которые также разделяют фазовую плоскость на ряд областей с различными фазовыми траекториями. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на предыдущем участке. Линии переключения характеризуются узловыми точками разрывных характеристик нелинейных элементов.

## Задание и порядок проведения лабораторной работы

### *Первая часть*

1. В соответствии со структурной схемой на рис.8.2 смоделируйте систему управления, у которой реле имеет характеристику вида рис.8.3, а

передаточная функция задана соотношением  $W_0(p) = \frac{k}{p}$ . Значение коэффициента передачи ( $k$ ) возьмите из табл.8.1.

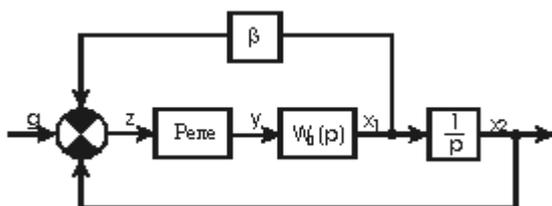


Рис.8.2

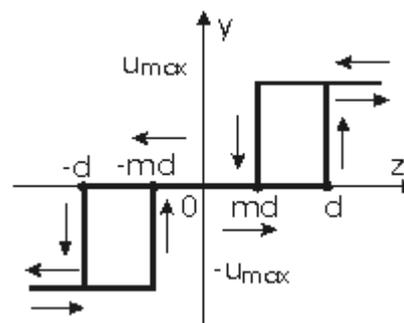


Рис. 8.3

2. Для случая идеального двухпозиционного реле, отсутствия коррекции по скорости и нулевого входного сигнала, т.е. при  $d=0$ ,  $\beta=0$ ,  $g=0$ , задайте начальное отклонение  $x_{10}$  при  $x_{20}=0$  и наблюдайте фазовую траекторию, соответствующую свободному движению системы. Коэффициенты передачи интеграторов в модели выбирайте произвольно, исходя из удобства наблюдения изображения. Нарисуйте фазовый портрет системы, а также наблюдайте и зафиксируйте процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

3. В этой же системе введите коррекцию по скорости, полагая  $\beta \neq 0$ , и нарисуйте вид фазовых траекторий при  $\beta=0,25; 0,5; 1$ . Каждой из полученных фазовых траекторий поставьте в соответствие процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . В случае сильной коррекции, приводящей к возникновению скользящего режима, обратите внимание на вид сигнала на выходе релейного элемента. Дайте объяснение полученному результату.

4. Что Вы ожидаете получить результат, если обратную связь по скорости выбрать положительной? Проверьте Ваше предположение моделированием.

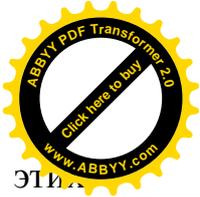
5. Измените, вид релейной характеристики, введя зону нечувствительности, т.е. задайте  $d \neq 0$  при  $m=1$ . Предскажите вид фазового портрета и проверьте Ваше предположение, моделированием системы, рассматривая свободное движение при отсутствии коррекции по скорости.

6. Задайте начальное отклонение  $|x_{10}| > d$  при  $x_{20}=0$  и наблюдайте фазовую траекторию при отсутствии коррекции по скорости, изменяя величину зоны нечувствительности.

7. Введите коррекцию по скорости, задавая  $\beta=0,25; 0,5; 1$ . Нарисуйте вид процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при заданной степени коррекции.

8. Реализуйте релейную характеристику гистерезисного типа, задавая  $d \neq 0$  и  $m=-1$ . При  $\beta=0$  задайте малое начальное отклонение  $|x_{10}| < d$  и наблюдайте фазовый портрет и процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

9. Введите коррекцию по скорости и наблюдайте для  $\beta=0,25; 0,5; 1$  фазовые траектории, соответствующие обработке малых  $|x_{10}| < d$  и больших



$|x_{10}| > d$  начальных отклонений. В чем принципиальное отличие эти траекторий? Как зависят от степени коррекции по скорости параметры предельного цикла и соответствующих ему периодических колебаний?

10. Реализуйте релейную характеристику с гистерезисом и зоной нечувствительности, задавая  $d \neq 0$  и  $0 < m < 1$ .

11. При  $\beta = 0$  задайте начальное отклонение и наблюдайте фазовый портрет и соответствующие ему процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

12. Введите коррекцию по скорости, задайте начальное отклонение  $|x_{10}| > d$  и для различных  $\beta$ , исследуйте вид фазовой траектории. Зарисуйте фазовые портреты и процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

### Вторая часть

13. По результатам пп.1-12 сделайте выводы о динамических свойствах системы управления объектом с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{p^2}$ .

14. В системе управления со структурной схемой (рис.8.2) реализуйте идеальное двухпозиционное реле, задавая  $W_0(p)$  линейной части передаточной функцией вида  $W_0(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ . Значения коэффициента передачи ( $k$ ) и постоянной времени ( $T$ ) возьмите из табл.8.1.

15. Задайте начальное отклонение  $x_{10}$ , при  $x_{20} = 0$  и наблюдайте фазовую траекторию и процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при отсутствии коррекции по скорости.

16. К чему приводит введение обратной связи по скорости? Что произойдет, если знак обратной связи по скорости выбран неправильно? Ваши ответы проверьте моделированием. Наблюдайте и зафиксируйте соответствующие фазовые портреты и процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

17. В релейной характеристике введите зону нечувствительности, т.е. задавая  $d \neq 0$  при  $m = 1$ .

18. Задавая различные начальные отклонения, удовлетворяющие условию  $|x_{10}| > d$ , наблюдайте фазовые траектории при отсутствии коррекции по скорости.

19. Введите коррекцию по скорости и исследуйте ее влияние на динамику системы при одних и тех же начальных отклонениях  $|x_{10}| > d$ .

20. Реализуйте релейную характеристику гистерезисного вида, задавая  $d \neq 0$  при  $m = -1$ .

21. Наблюдайте фазовые траектории и процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при обработке малых  $|x_{10}| < d$  и больших  $|x_{10}| > d$  начальных отклонений, изменяя величину коррекции по скорости и начиная со значения  $\beta = 0$ .

22. Реализуйте релейную характеристику с гистерезисом и зоной нечувствительности, задавая  $d \neq 0$  и  $0 < m < 1$ .

23. Задайте начальное отклонение  $|x_{10}| > d$  и наблюдайте фазовые траектории, а также процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при различной степени коррекции



по скорости. Полученные результаты зафиксируйте.

### Третья часть

24. По результатам пп.13-23 сделайте выводы о динамических свойствах системы управления объектом с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}. \text{ Значения коэффициента передачи } (k) \text{ и постоянной времени}$$

$(T)$  возьмите из табл. 8.1.

25. В системе управления со структурной схемой (рис.8.2) реализуйте идеальное двухпозиционное реле, задавая  $W_0(p)$  линейной части

$$\text{передаточной функцией вида } W_0(p) = \frac{k}{Tp-1}.$$

26. Задавайте малое начальное отклонение  $x_{10}$  и наблюдайте фазовый портрет при отсутствии коррекции по скорости. Каков Ваш вывод о работоспособности системы управления?

27. Введите коррекцию по скорости  $\beta=0,2$ . Постепенно увеличивая начальное отклонение  $x_{10}$ , сделайте вывод о возможных режимах работы системы управления. Полученные результаты зафиксируйте в виде фазовых портретов и графиков  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

28. Определите величину начального отклонения, которое при  $\beta=0,2$  система не может устранить. Увеличивая степень коррекции по скорости, добейтесь наблюдения сходящего процесса. Попробуйте выделить и наблюдать на экране индикатора границу между двумя качественно отличными режимами работы системы управления. Какие Вы испытываете затруднения? Объясните их причину.

29. Реализуйте релейную характеристику с зоной нечувствительности, задавая  $d \neq 0$  и  $m=1$ .

30. При наличии коррекции по скорости исследуйте динамику системы управления, задавая малые отклонения в соответствии с условиями:  $x_{10} < 0$ ;  $x_{10} > 0$ , при  $x_{10} = 0$ .

31. При наличии коррекции по скорости и больших начальных отклонениях варьировать величину коррекции и зарисуйте фазовые портреты и графики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

32. Реализуйте релейную характеристику с гистерезисом и зоной нечувствительности, задавая  $d \neq 0$  и  $0 < m < 1$ .

33. Изменяя величину коррекции по скорости, при начальном отклонении  $|x_{10}| > d$ , наблюдайте вид фазовых траекторий. Сравните внешний вид фазовых траекторий, полученных при сильной коррекции по скорости, для случая однозначной и неоднозначной характеристик реле с зоной нечувствительности.

34. По результатам пп. 24-33 сделайте вывод о динамических свойствах системы управления динамическим объектом с передаточной

$$\text{функцией вида } W(p) = \frac{k}{p(Tp-1)}, \text{ рассматривая случаи однозначных и}$$



неоднозначных релейных характеристик.

**Таблица 8.1**

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k$	1,1	9,4	4,6	5,7	2,2	8,3	3,5	6,8	7,9
$T$	0,44	0,36	0,85	0,22	0,73	0,58	0,11	0,96	0,69

**Контрольные вопросы:**

1. Почему метод фазовой плоскости относят к точным методам исследования нелинейных систем ?
2. Какие Вам известны типы особых линий ?
3. Что такое предельный цикл?
4. Какие типы предельных циклов Вам известны ?
5. Что называется линией переключения ?
6. Как построить линию переключения ?
7. Что такое скользящий режим ?
8. Как установить возможность возникновения в системе управления скользящего режима ?
9. В чем особенность фазового портрета для систем управления с неоднозначными нелинейностями ?
10. Как по фазовой траектории определить поведение системы во времени ?



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

### ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

**Цель работы:** практическое овладение методом гармонического баланса для анализа устойчивости замкнутых нелинейных систем; определение условий возникновения незатухающих периодических колебаний и нахождение параметров автоколебаний.

#### Краткие теоретические сведения

В соответствии с критерием устойчивости Найквиста незатухающие колебания в линейной системе возникают в том случае, когда амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами  $[-1, j0]$ . Данное условие является также условием существования автоколебаний в гармонически линеаризованной нелинейной системе, т.е.

$$W_n(j\omega, a) = -1.$$

Так как линейная и нелинейная части системы соединены последовательно, то частотная характеристика разомкнутой нелинейной системы имеет вид

$$W_n(j\omega, a) = W_{лч}(j\omega) * W_{\text{нл}}(j\omega, a).$$

Тогда в случае статической характеристики нелинейного элемента условие принимает вид

$$W_{лч}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{нл}}(a)}.$$

Решение уравнения относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы  $W_{лч}(j\omega)$  и годографа обратной характеристики нелинейной части  $-\frac{1}{W_{\text{нл}}(a)}$ , взятой с обратным знаком. Если эти годографы не пересекаются, то режим автоколебаний в исследуемой системе не существует.

Для устойчивости автоколебательного режима с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a_0$  требуется, чтобы точка на годографе нелинейной части  $-\frac{1}{W_{\text{нл}}(a)}$ , соответствующая увеличенной амплитуде  $a_0 + \Delta a$  по сравнению со значением в точке пересечения годографов, не охватывалась годографом частотной характеристики линейной части системы и охватывалась точка, соответствующая уменьшенной амплитуде  $a_0 - \Delta a$ .

На рис.9.1 дан пример расположения годографов для случая, когда в нелинейной системе существуют устойчивые автоколебания, так как

$$a_3 < a_0 < a_4.$$

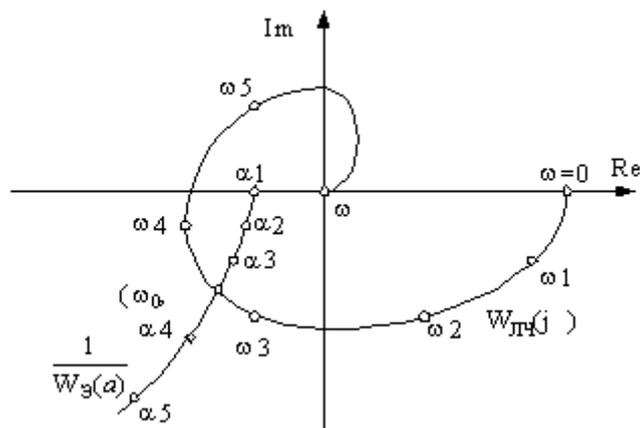


Рис.9.1. Годографы линейной и нелинейной частей системы

**Задание и порядок выполнения лабораторной работы:**

1. Структурная схема исследуемой системы управления представлена на рис.9.2. В результате теоретического анализа определите возможность возникновения в этой системе режима автоколебаний для нелинейностей и передаточные функций, приведенных в табл.9.1, постоянную времени  $T$ , брать из табл.9.2, согласно своему варианту. Клетки таблиц заполните ответами, указав для однозначных нелинейностей расчетные значения параметров автоколебаний.

2. Разработайте методику исследования режима автоколебаний на ЭВМ. Проверьте моделированием теоретические результаты п. 1.

3. Разомкните обратную связь и на вход сумматора подайте гармонический сигнал. Изучите форму сигналов на выходе нелинейности, а также на выходе первого, второго и третьего аperiodических звеньев, варьируя частоту входного сигнала, для всех нелинейностей указанных в табл.9.1. Отметьте, как в графиках сигналов проявляется фильтрующее свойство линейной части системы управления.

4. Замкните обратную связь. Реализация последнего из аperiodических звеньев с использованием сумматора, позволяет получить сигнал, пропорциональный производной от сигнала на выходе линейной части системы управления. Используя эту возможность, наблюдайте фазовые траектории исследуемой системы управления, рассматривая линейную часть с передаточной функцией вида  $W(p) = \frac{1}{(Tp + 1)^2}$  и нелинейности указанные в табл.9.1.

5. Варьируя начальные условия или амплитуду входного сигнала, зафиксируйте фазовые траектории, соответствующие устойчивым и неустойчивым предельным циклам. Изучите процессы установления автоколебаний и зафиксируйте графики.

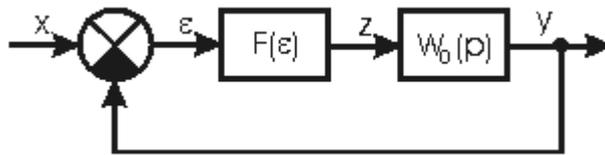


Рис.9.2

Таблица 9.1

	$F(\varepsilon)$	$W_0(p)$		
		$\frac{1}{(Tp+1)}$	$\frac{1}{(Tp+1)^2}$	$\frac{1}{(Tp+1)^3}$
1				
2				
3				

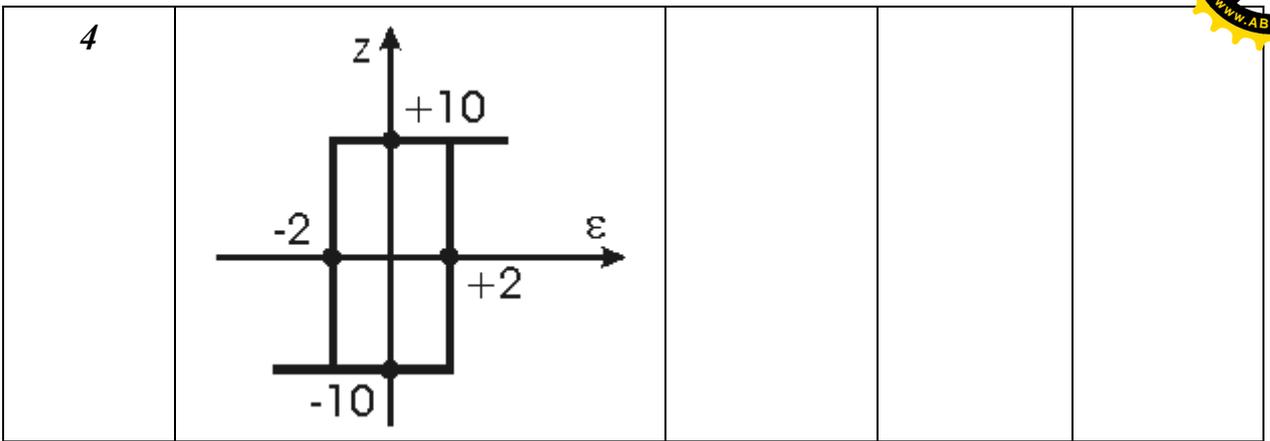


Таблица 9.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	0,9	0,15	0,7	0,45	0,3	0,6	0,28	0,5	0,75	0,9

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте общую постановку задачи анализа нелинейной системы методом гармонического баланса.
2. Какие допущения лежат в основе метода гармонического баланса ?
3. Что позволяет определить – метод гармонического баланса в результате анализа нелинейной и системы ?
4. Что такое автоколебания ?
5. Какой вид имеет уравнение Гольдфарба и что оно описывает ?
6. Какие Вам известны способы решения уравнения Гольдфарба?
7. Сформулируйте понятие устойчивости система управления в режиме автоколебаний?



## Лабораторная работа 10 ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**Цель работы:** получение передаточных функций дискретных систем управления, путем применения z-преобразования; исследование временных характеристик дискретных систем управления.

### Краткие теоретически сведения:

Характерная особенность импульсных систем заключается в том, что, по крайней мере, одна из координат (переменных) в них подвергается квантованию (прерыванию) по времени. Эти квантованные по времени величины при помощи импульсной модуляции преобразуются в последовательность импульсов, которые воздействуют на непрерывную часть системы. Процесс квантования и импульсной модуляции осуществляется импульсным элементом.

Таким образом, импульсная система состоит из импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ), составленной из типовых динамических звеньев (рис.10.1).

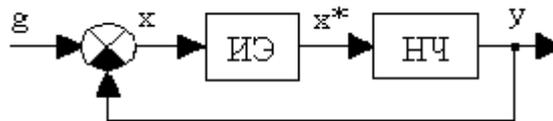


Рис.10.1. Функциональная схема импульсной системы:  
ИЭ - импульсный элемент; НЧ - непрерывная часть

В импульсной системе импульсный элемент преобразует непрерывно изменяющуюся величину в последовательность модулированных импульсов (рис.10.2).

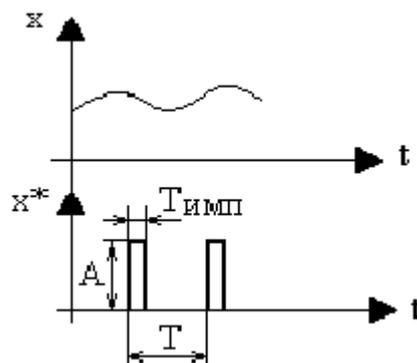


Рис.10.2. Временные диаграммы изменения сигналов на входе  $x$  и выходе  $x^*$  импульсного элемента

**Z-преобразование.** Подобно тому, как применение преобразования Лапласа к линейным дифференциальным уравнениям дало возможность



получить удобную методику анализа непрерывных систем, для дискретных систем также был разработан ряд специальных преобразований. Из них наибольшее распространение получили дискретное преобразование Лапласа z-преобразование.

Z-преобразованием решетчатой функции  $x[nT]$  называется функция комплексного аргумента  $z$ , определяемая выражением

$$X(z) = Z\{x[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \times z^{-n}$$

при  $|z| > R=1/\rho$ , где  $\rho$  - радиус сходимости ряда.

Функция  $x[nT]$  называется оригиналом, а функция  $X(z)$  - изображением или z-преобразованием функции  $x[nT]$ .

Преобразование, в котором  $z = e^{sT}$ , было введено Я.З.Цыпкиным под названием "дискретное преобразование Лапласа".

Z-преобразование дает возможность получить из  $X(z)$  значение ординат решетчатой функции  $x[nT]$  в моменты квантования. Но в системах управления с непрерывными динамическими частями процесс непрерывен и между моментами  $n = 0, 1, 2 \dots$  Для нахождения этих ординат необходимо рассмотреть последовательности для других дискретных моментов с тем же интервалом повторения, но смещенных на значение  $\sigma T$ :  $t = (n+\sigma)T$  при  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Это можно делать с помощью модифицированного z-преобразования.

**Таблица 10.1**

**Z - преобразования функций времени**

$x(t)$	$X(s)$	$x[nT]$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta[nT]$	1
1(t)	1/s	1[nT]	$z/(z-1)$
t	1/s <sup>2</sup>	nT	$Tz/(z-1)^2$
$e^{-\alpha t}$	1/(s+ $\alpha$ )	$e^{-\alpha nT} = d^n$	$z/(z-d)$ ( $d=e^{-\alpha T}$ )
$t^2/2!$	1/s <sup>3</sup>	$(nT)^2/2!$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$
$te^{-\alpha t}$	1/(s+ $\alpha$ ) <sup>2</sup>	$nTe^{-\alpha nT}$	$\frac{zdT}{(z-d)^2}$ ( $d=e^{-\alpha T}$ )
$\frac{t^2}{2!}e^{-\alpha t}$	1/(s+ $\alpha$ ) <sup>3</sup>	$\frac{(nT)^2}{2!}e^{-\alpha nT}$	$\frac{z(z+d)dT^2}{2!(z-d)^3}$ ( $d=e^{-\alpha T}$ )



### Порядок проведения работы:

1. Даны передаточные функции  $W(s) = \frac{1}{s}$ ;  $W(s) = \frac{1}{(s + \alpha)}$ ;  $W(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$ .

Исследуйте их временные характеристики (переходная характеристика, весовая характеристика), коэффициент  $\alpha$  возьмите из табл.10.2

2. Примените z-преобразование получите передаточные функции дискретных объектов.

3. Полученные математические модели реализуйте в виде блоков библиотеки MATLAB SIMULINK (Discrete). Исследуйте временные характеристики.

4. Полученные результаты сравните с временными характеристиками непрерывных объектов. Сделайте вывод.

**Таблица 10.2**

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha$	0,9	0,3	0,4	0,6	0,2	0,5	0,1	0,7	0,8	1,1

### Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение дискретных систем. Какова структура и классификация импульсных систем?

2. Расскажите о математическом аппарате исследования импульсных систем.

3. Сформулируйте теорему Котельникова-Шеннона. Поясните ее физический смысл и практическое значение при проектировании дискретных систем.

4. Поясните методы определения передаточных функций импульсных систем. Каковы особенности передаточных функций статических и астатических систем?

5. Каким образом определяются частотные характеристики импульсных систем?

6. Какими способами определяются переходные процессы в дискретных системах?

7. Сформулируйте условия устойчивости импульсных систем.

8. Каким образом оценивается точность работы импульсных систем?

9. Каков порядок синтеза цифровых систем? Перечислите методы определения передаточных функций корректирующих устройств. Укажите виды структурных схем цифровых фильтров.

10. Запишите стандартную форму уравнений в пространстве состояний. Поясните физический смысл уравнений.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

### Линейные системы

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. Т. 1. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления. Т. 2. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. Т. 3. Методы современной теории автоматического управления.
2. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Управление техническими системами. – М.: Высшая школа, 1991.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975. - 768с.
4. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. - 304с.
5. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1979. - 256с.
6. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981. - 304 с.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А.Бесекерского. - М.: Наука, 1978. - 512 с.
8. Дидук Г.А. Методы теории матриц и их применение для исследования и проектирования систем управления. - Л.: СЗПИ, 1986. - 83 с.

### Нелинейные системы

9. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. - СПб.: Наука, 1999. - 467 с.
10. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975. - 768 с.
11. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
12. Бесекерский В.А., Изранцев В.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. - М.: Наука, 1987. - 320 с.
13. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981. - 304 с.
14. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. - 304 с.
15. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1979. - 256 с.
16. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов в 2-х частях / Под ред. А.А.Воронова. 2-е изд. - М.: Высшая школа, 1986.
17. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. - М.: Физматгиз, 1963. - 968 с.
18. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. - М.: Наука, 1974. - 576 с.



## СИСТЕМА MatLAB

Настоящее приложение содержит описание некоторых функций системы MatLAB, позволяющих моделировать технические системы и получать их характеристики в наглядном виде.

MatLAB (сокращение от Matrix Laboratory – матричная лаборатория) – это новая компьютерная система проведения математических расчетов, получившая широкое распространение в последнее время.

### *Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется при помощи функций ode23 и ode45. Функция ode23 осуществляет интегрирование численным методом Рунге-Кутта 2-го порядка, а с помощью метода 3-го порядка контролирует относительные и абсолютные ошибки интегрирования на каждом шаге и изменяет величину шага интегрирования так, чтобы обеспечить заданные пределы ошибок интегрирования. При использовании функции ode45 интегрирование осуществляется методом Рунге-Кутта 4-го порядка, а величина шага контролируется методом 5-го порядка.

Система дифференциальных уравнений должна быть представлена в форме Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \quad (1.1)$$

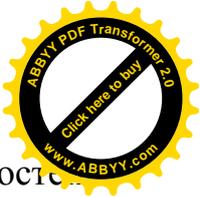
где  $y$  – вектор переменных состояния системы,  $t$  – аргумент (обычно время),  $f$  – нелинейная вектор-функция от переменных состояния  $y$  и аргумента  $t$ .

Обращение к процедурам численного интегрирования имеет вид:

`[t, y] = ode23('<имя функции>', tspan, y0, options)`

`[t, y] = ode45('<имя функции>', tspan, y0, options),`

где <имя функции> - имя М-файла, являющегося функцией Matlab от  $t$  и  $y$ , в котором вычисляется вектор функция  $f(y,t)$ , т.е. правые части системы дифференциальных уравнений; tspan – вектор задающий интервал интегрирования  $[t_0 \text{ tfinal}]$ ,  $t_0$  – начальное значение интервала, tfinal – конечное;  $y_0$  – вектор начальных условий; options – строка параметров, определяющих значения допустимой относительной и абсолютной погрешности интегрирования. Этот параметр можно не указывать, если пользователя устаивают значения погрешностей, заданных по умолчанию, т.е. относительная погрешность интегрирования  $1.0e-3$ , а абсолютная (по каждой из переменных состояния) –  $1.0e-6$ . В противном случае, перед



обращением к процедуре ode23 следует указать значения погрешности при помощи процедуры odeset.

Результатом интегрирования является матрица проинтегрированных значений фазовых переменных  $y$ , в которой каждый столбец соответствует одной из переменных состояния, а строка содержит значения переменных состояния, соответствующих определенному шагу интегрирования, т.е. значению вектора  $t$ .

Рассмотрим пример:

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y_1' = y_2 * y_3$$

$$y_2' = -y_1 * y_3$$

$$y_3' = -0.51 * y_1 * y_2$$

со следующими начальными условиями:

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(0) = 1$$

$$y_3(0) = 1$$

Для интегрирования данной системы уравнений необходимо создать М-файл, который является функцией переменных  $t$  и  $y$ . Для создания файла воспользуемся редактором MATLAB Editor/Debugger, который вызывается из основного меню File – New – M-File. Текст файла:

```
function dy=rigid(t,y)
dy=zeros(3,1);
dy(1)=y(2)*y(3);
dy(2)=-y(1)*y(3);
dy(3)=-0.51*y(1)*y(2);
```

Название файла и функции должны совпадать. Файл надо сохранить с названием rigid.

В этом примере абсолютная и относительная погрешность задается при помощи команды odeset, время интегрирования зададим в интервале от 0 до 12 [0 12], вектор начальных условий [0 1 1]. Для осуществления процедуры интегрирования в рабочем пространстве Matlab необходимо набрать:

```
» options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
```

```
» [t,y]=ode45('rigid',[0 12],[0 1 1],options);
```

Чтобы просмотреть результаты в рабочем пространстве Matlab необходимо ввести в командной строке  $y$ . Графически результаты выводятся при помощи команды plot:

```
» plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'-',t,y(:,3),'-').
```

### *Нахождение корней полиномов*

Система Matlab имеет функцию **roots(P)**, которая вычисляет вектор, элементы которого являются корнями заданного полинома P.



Рассмотрим пример. Пусть задан полином:

$$P(x) = x^5 + 8 \cdot x^4 + 31 \cdot x^3 + 80 \cdot x^2 + 94 \cdot x + 20$$

В системе Matlab полином задается вектором его коэффициентов:

» p=[1,8,31,80,94,20]

При вводе функции roots(p) вычисляются корни полинома p:

» roots(p)

## Исследование линейных стационарных систем

Исследование и ввод моделей линейных стационарных систем производится при помощи пакета системы Matlab – Control Toolbox.

### Ввод моделей в виде пространства состояний

Рассмотрим ввод модели системы в виде пространства состояния по заданным матрицам A,B,C,D уравнений состояния системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1.2}$$

Матрицы вводятся в рабочем пространстве Matlab в квадратных скобках по строкам через точку с запятой, например матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$$

вводится следующим образом:

» A=[0 1;-10 1]

Модель в виде пространства состояний вводится при помощи функции sys=ss(A,B,C,D), где sys – произвольное название системы. Перед вводом этой команды необходимо ввести в рабочее пространство Matlab последовательно матрицы A,B,C,D.

### Ввод моделей в виде вход-выход (передаточных функций)

Ввод модели системы в виде передаточной функции рассматривается на примере апериодического звена.

Пусть требуется ввести модель с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T_1 \cdot s + 1}$$

Для этого нужно воспользоваться функцией tf и в рабочем окне системы ввести данную передаточную функцию при помощи набора следующей команды:



$$waz = \mathbf{tf}([k],[T \ 1])$$

где waz- произвольное имя функции, в первой квадратной скобке вводятся коэффициенты полинома числителя (k), а во второй коэффициенты полинома знаменателя (T,1).

Рассмотрим пример со следующими коэффициентами:

$$k = 10$$

$$T_1 = 0.1$$

$$\gg waz=\mathbf{tf}([10],[0.1 \ 1])$$

### **Ввод дискретных моделей**

Указанные процедуры позволяют создавать как непрерывные модели, так и дискретные. В случае ввода дискретных систем к числу входных параметров процедуры следует добавить в конце значение шага дискретизации Ts, а вводимые значения коэффициентов уже должны задавать параметры дискретных передаточных функций (для функции tf) или матрицы разностных уравнений пространства состояния (для функции ss).

Пример ввода дискретной передаточной функции:

$$\gg \mathbf{dsys}=\mathbf{tf}([1 \ 4],[1 \ 2 \ 3],0.01)$$

Sampling time: 0.01.

Модель, заданную как непрерывная, можно преобразовать в дискретную, воспользовавшись процедурой **c2d**:

$$\mathbf{sysd} = \mathbf{c2d}(\mathbf{sys}, T_s, \mathbf{method}),$$

где sysd – получаемая дискретная модель, sys – заданная непрерывная модель, Ts – задаваемое значение шага дискретизации системы, method – параметр, определяющий метод дискретизации [1].

Получение характеристик систем

**Расчет полюсов системы** производится при помощи команды pole(sys).

Для нахождения временных откликов системы используются функции:

### **Импульсная переходная функция ИПФ**

impulse(sys) – нахождение реакции системы sys на единичное импульсное входное воздействие;

### **Переходной процесс системы**

Step(sys) – нахождение реакции системы sys на единичное ступенчатое воздействие .

**Амплитудно-фазовую характеристику системы** в полярных координатах можно получить воспользовавшись командой nyquist(sys).



### Логарифмическую амплитудно-фазовую характеристику системы

полярных координатах можно получить воспользовавшись командой `bode(sys)`.

Для того чтобы построить переходной процесс системы, т.е. ее реакцию на единичное ступенчатое воздействие, а также ее частотные характеристики в одном окне используется так называемый интерактивный наблюдатель **Itview** (для этого нужно набрать в рабочем окне команду `Itview` и на экране появится окно интерактивного обозревателя). При первом обращении к обозревателю окно пусто, т.к. нужно импортировать в него модель системы.

Для этого из верхнем меню `File` необходимо выбрать команду `import` – на экране появится меню выбора импортируемой модели системы (например `sys`).

Обозреватель позволяет получить на одном экране несколько графиков, в том числе и частотные характеристики системы. Для выбора необходимых характеристик требуется выбрать из меню `Tools` команду `Viewer Configuration`.

На экране появятся различные конфигурации количества отображаемых графиков. Если выбрать нажатием радио-кнопки конфигурацию, содержащую 4 графика, тогда на экране появятся следующие графики:

- переходной процесс;
- импульсная переходная функция (реакция системы на дельта-функцию);
- логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика;
- амплитудно-фазовая частотная характеристика в полярных координатах.

### **Моделирование систем при помощи пакета Simulink**

Чтобы в системе Matlab работать со структурными схемами надо воспользоваться пакетом Simulink.

#### *Моделирование линейных систем*

Рассмотрим структурную схему, представленную на рис.1.1, где

$$W_1 = k, k=10,$$

$$\frac{1}{Tp+1}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1}, T = 0,5, \xi = 0.4$$

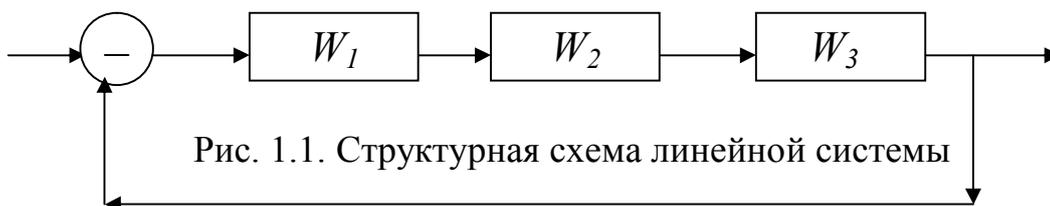


Рис. 1.1. Структурная схема линейной системы



Промоделируем эту систему в Simulink. Для этого надо ввести команду в рабочую строку

» simulink.

На экране появится меню выбора блоков (Simulink Library Browser). Чтобы создать новый файл для ввода системы нажмите на иконку в верхнем левом углу (белый лист).

Далее нужно набрать схему системы, при этом на вход подать единичное ступенчатое воздействие. Для этого нужно из главного меню последовательно выбрать – Simulink – Sources – Constant и перенести этот блок на окно файла системы. Далее нужно поставить сумматор – Simulink – Math – Sum. Чтобы поменять параметры блока надо дважды нажать на левую клавишу мыши в области его изображения. В появившемся окне поставьте +-, т.е. введите отрицательную обратную связь.

Блок, реализующий  $W_1$ , т.е. коэффициент усиления, находится в Simulink – Math – Gain. Коэффициент усиления введите 10. Если коэффициент усиления необходимо менять в процессе исследования системы его удобно поставить отдельно в виде ползунка – Simulink – Math – Slider Gain, при этом необходимо поставить пределы изменения коэффициента усиления.

Блок, реализующий интегрирующее звено ( $W_2$ ) находится в Simulink – Continuous – Integrator.

Блок, реализующий произвольные передаточные функции ( $W_3$ ) – Simulink – Continuous – Transfer Fnc. Передаточные функции вводятся при помощи набора коэффициентов числителя и знаменателя (в верхней строке числителя, в нижней знаменателя). В данном случае необходимо ввести:

Numerator:

[1]

Denominator:

[0.25 0.4 1]

Теперь мы можем вывести на экран график переходного процесса, т.е. реакцию системы на единичное воздействие. Для этого на выход системы надо установить блок для вывода графика выходного сигнала – Simulink – Sinks – Scope. Для моделирования системы надо выбрать Simulation – Start.

Для просмотра характеристик системы, набранной в simulink можно также воспользоваться Ltiviewer.

В данном случае надо обозначить вход и выход системы, а входное воздействие (const=1) следует убрать.

Из верхнего меню окна набранной системы выберите Tools – Linear Analysis.

На экране появятся два окна: окно для выбора моделей входа и выхода и окно самого Ltiview.

Перенесите на окно набранной системы input point (на вход) и output point (на выход).

Затем в окне Ltiview выберите Simulink – Get Linearized Model.



Далее при помощи настройки конфигурации просматриваемые графики можно вывести на экран и логарифмические частотные характеристики.

### *Моделирование нелинейных систем*

Рассмотрим также пример нелинейной системы, которая исследуется при помощи фазового портрета (рис 1.2).

Релейная характеристика находится в Simulink – Nonlinear – Relay. Исходно данная характеристика является гистерезисной, поэтому для преобразования ее в идеальную релейную характеристику необходимо установить следующие параметры:

*Switch on point: 0*

*Switch off point: 0*

*Output when on (c): 1*

*Output when off (-c): -1*

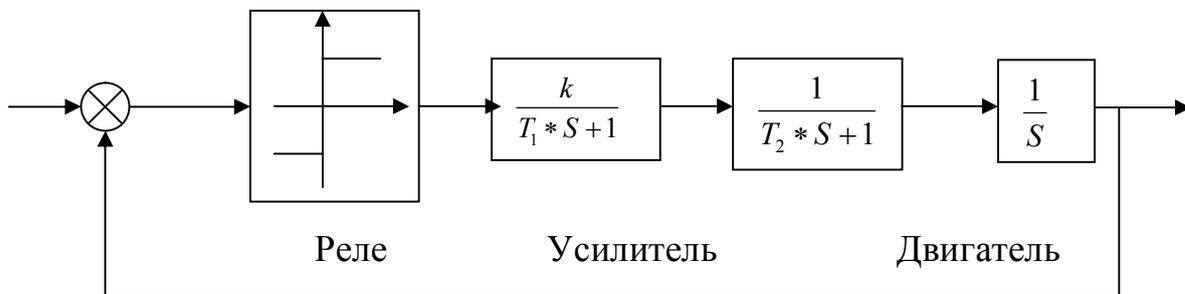
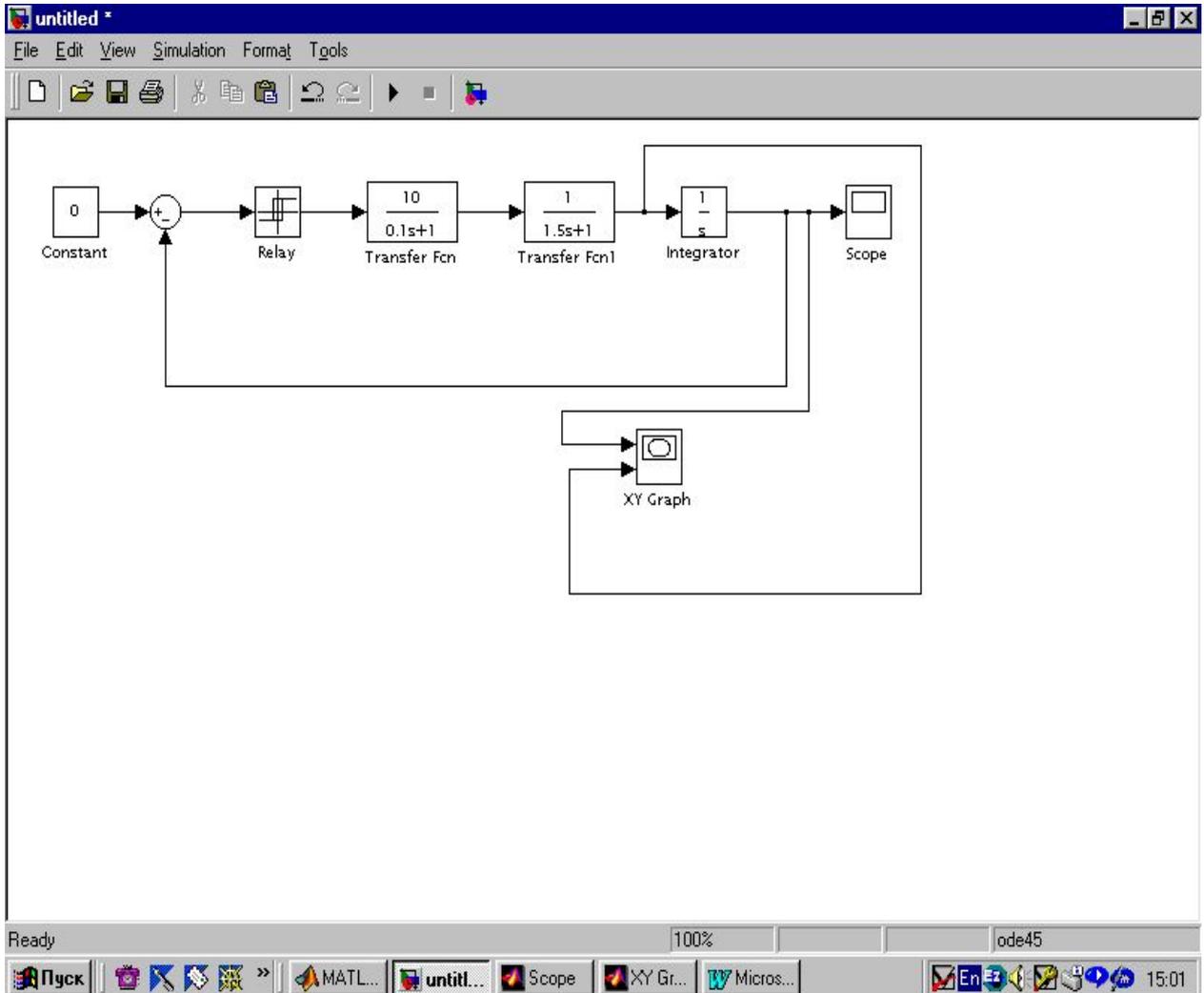


Рис 1.2. Структурная схема нелинейной системы



Для построения фазового портрета используется следующая процедура – Simulink – Sinks – XY Graph (в данном случае  $y=dx/dt$ ). Блок XY Graph имеет два входа – один с переменной  $x$ , а другой с ее производной.

Структурная схема представлена на рис 1.3.





# Теория автоматического управления

## Методические указания к лабораторным работам

---

Подписано к печати: 2012 г.  
Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсетная.  
Печ. л. 2,5. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,2  
Тираж 100 экз.

---

**Изготовлено: КГТУ им. И. Раззаков**