УДК 517.97 (575.2) (04)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

А. Баетов

Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми линейными уравнениями с разрывным коэффициентом. Найдены достаточные условия разрешимости и разработан алгоритм построения приближенного решение задачи оптимизации и доказана их сходимость.

Ключевые слова: слабо обобщенное решение; задача нелинейной оптимизации; условия оптимальности; нелинейное интегральное уравнение; знако-определенное решение; сходимость.

1. Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Пусть управляемый процесс описывается скалярной функцией $V(t,x)$, которая удовлетворяет в области $Q=(0,1)\times(0,T)$ уравнению колебания [1]:

$$V_{tt}=V_{xx}+a(t)V+g(t,x)f\left[t,u(t)\right] \tag{1.1}$$

на границе Q начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x) \tag{1.2}$$

и граничным

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \alpha>0,\ t\in(0,T) \tag{1.3}$$

условиям, где $a(t)\in H(0,T)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ – заданные функции; $f\left[t,u(t)\right]$ – функция внешнего воздействия, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и является монотонной по функциональному аргументу $u(t)$, $\forall t\in[0,T]$; H – гильбертово пространство; T – фиксировано.

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x), \tag{1.4}$$

где функции $z_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве $H(0,1)$, а $\{\lambda_n\}$ – собственные значения, которые определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и обладают свойствами:

$$\lambda_n \le \lambda_{n+1}, \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,\ n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n = 0,1,2,.... \quad (1.5)$$

Определение 1.1. Любая функция $V(t,x)\in H(Q)$, которая при каждом фиксированном управлении $u(t)\in H(0,T)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$V(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \\ +\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau + \\ +\int_0^t \frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\Bigg]z_n(x), \quad (1.6)$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n}, $g_n(t), V_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $g(t,x)$, $V(t,x)$, называется слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3).

Коэффициенты Фурье $V_n(t)$, при каждом фиксированном $n = 0,1,2,...$, определяются как решение интегрального уравнения:

$$V_n(t) = \psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \\ +\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau + \\ +\int_0^t \frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau,\quad n = 1,2,3,... \quad (1.7)$$

Заметим, что интегральное уравнение (1.7) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$V_n''(t) + \lambda_n^2 V_n(t) = a(t)V_n(t) + g_n(t)f\left[t,u(t)\right], n = 1,2,3,...,$$

которое известно как уравнение Матье [2].

Решение интегрального уравнения (1.7), согласно методам решения интегральных уравнений [3], находим по формуле:

$$V_n(t) = \psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t + \int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right) + \\ +\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t + \int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau\right) + \\ +\int_0^t \frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau) + \int_\tau^t R_n(t,s,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right) \\ f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau, \quad (1.8)$$

где

$$R_n(t,s,\lambda_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{i-1}}K_{n,i}(t,s),\quad n = 1,2,3,...,$$

резольвента интегрального уравнения (1.7), итерированные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формулам

$$K_{n,i}(t,s) = \int_0^t K_n(t,\tau)K_{n,i-1}(\tau,s)d\tau,$$

$$K_n(t,s) = K_{n,1}(t,s).$$

Подставляя (1.8) в (1.4) получим функцию

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t + \int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right) + \\ +\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t + \int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau\right) + \\ +\int_0^t \frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau) + \int_\tau^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right) \\ f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau)z_n(x), \quad (1.9)$$

которая, в силу единственности решения интегрального уравнения (1.7), является единственным решением краевой задачи (1.1)–(1.3).

Лемма 1.1. Решение (1.9) краевой задачи (1.1)–(1.3) является элементом пространства $H(Q)$.

Доказательство: Непосредственным вычислением получим неравенство

$$\int_0^T\int_0^1 V^2(t,x)dxdt \le 6T\Bigg\{(1+M_1T)(\|\psi_1(x)\|_H^2 + \\ +\frac{1}{\lambda_1^2}\|\psi_2(x)\|_H^2) + \frac{1+M_1}{\lambda_1^2}\|g(t,x)\|_H^2\cdot\|f(t,u(t))\|_H^2\Bigg\} < \infty,$$

где символом $\|\bullet\|_H$ – обозначена норма в пространстве H; M_1 – положительная постоянная, из которого следует утверждение леммы.

2. Решение нелинейной задачи оптимизации. Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$I[u(t)] = \int_0^1\left[V(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^1|u(t)|dt, \quad (2.1)$$

где $\xi(x)\in H(0,1)$ заданная функция на множестве решений краевой задачи (1.1)–(1.3).

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [4] получим следующие условия оптимальности:

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\cdot f_u(t,u(t)) - 2\beta sign\ u(t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx\cdot f_{uu}(t,u(t)) < 0, \quad (2.3)$$

где $f_u(t,u(t))$, $f_{uu}(t,u(t))$ – частные производные первого и второго порядков по переменной u; $\omega(t,x)$ – слабо обобщенное решение сопряженной краевой задачи:

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} - a(t)\omega = 0, 0 < x < 1;\quad 0 \le t < T,$$

$$\omega(T,x) = 0,\ \ \omega_t(T,x) - 2\left(V(T,x) - \xi(x)\right) = 0,\quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\quad 0<t\le T.$$

Решение сопряженной краевой задачи ищется в виде

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x),$$

и коэффициенты Фуре $\omega_n(t)$ определяются по формулам:

$$\frac{1}{\lambda_n}(\sin\lambda_n(T-t)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T P_n(s,t,\lambda_n)\sin\lambda_n(T-s)ds)\{-(\xi_n-\psi_{1n}[\cos\lambda_n T+$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau]-$$
$$-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}[\sin\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau])+$$
$$+\int_0^T\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-\tau)+\frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda_n)$$
$$\sin\lambda_n(s-\tau)ds]f(\tau,u(\tau))d\tau\},\quad n=1,2,3,...,$$

где $P_n(s,t,\lambda_n)$ – функция, сопряженная с функцией $R_n(t,s,\lambda_n)$.

Условие оптимальности (2.3), где присутствует решение сопряженной краевой задачи, является трудно проверяемым условием. Поэтому это условие преобразуем к виду свободного от решения сопряженной краевой задачи:

$$-f_u(t,u(t))\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{f_u(t,u(t))})sign\ u(t)<0. \qquad (2.4)$$

Таким образом, оптимальное управление $u(t)$, которое минимизирует функционал (2.1), должно удовлетворять условиям оптимальности (2.2) и (2.4). Из условия оптимальности (2.2), с учетом решения сопряженной краевой задачи, получим следующее соотношение:

$$2\beta\left(\frac{\partial f(t,u)^{-1}}{\partial u}\right)sign\ u(t)=$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)\left\{-h_n+\int_0^T G_n^*(T,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau\right\}, \qquad (2.5)$$

где

$$G_n(T,t)=\frac{g_n(t)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T P_n(s,t,\lambda_n)\sin\lambda_n(T-s)ds];$$
$$G_n^*(T,\tau)=\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-\tau)+\frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds]; \qquad (2.6)$$

$$h_n=\xi_n-\psi_{1n}[\cos\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau]-$$
$$-\frac{\psi_{1n}}{\lambda_n}[\sin\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau],$$

которое называется нелинейным интегральным уравнением оптимального управления. Таким образом, относительно оптимального управления получаем задачу нового типа, где требуется найти решение нелинейного интегрального уравнения (2.5), удовлетворяющее дополнительному условию (2.4). Поскольку уравнение (2.5) является интегральным уравнением типа Фредгольма, то, согласно свойствам этого уравнения, решением этой задачи является лишь знако-определенная функция $u(t)$. Поэтому при исследовании разрешимости уравнения (2.5) отдельно рассмотрим случаи:

$$u(t)>0,\forall t\in[0,T],\ \text{и}\ u(t)<0,\forall t\in[0,T].$$

Пусть $u(t)>0,\forall t\in[0,T]$. В этом случае интегральное уравнение (2.5) и дополнительное условие (2.4) примут следующий вид:

$$\frac{\beta}{f_u(t,u)}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)\int_0^T\tilde{G}_n^*(T,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)h_n \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{f_u(t,u)})>0 \qquad (2.8)$$

Теперь преобразуем интегральное уравнение (2.7). Согласно методике работы [5] введем обозначение (т.е. новую искомую функцию):

$$\frac{\beta}{f_u(t,u(t))}=p(t),\quad t\in[0,T]. \qquad (2.9)$$

Отсюда, в силу монотонности функции $f(t,u(t))$ по переменной u, функция $u(t)$ определяется однозначно, т.е. существует функция $\varphi(\bullet)$ такая, что

$$u(t)=\varphi(t,p(t),\beta). \qquad (2.10)$$

Согласно (2.9) и (2.10) интегральное уравнение (2.7) перепишем в операторной форме

$$p(t)=G[p(t)], \qquad (2.11)$$

где $G[p(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)(h_n-\int_0^T G_n^*(T,\tau)f[\tau,p(\tau),\beta]d\tau).$ (2.12)

Теорема 2.1. Пусть функция $f(t,u(t))$ удовлетворяет условиям:

1. $\dfrac{\partial f(t,u(t))}{\partial u}\ne 0,\quad\forall t\in[0,T];$

2. Выполняется условие (2.8) для любой функции $u(t)\in H(0,T)$;

3. По переменной $u(t)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\left\|f(t,u(t))-f(t,\bar{u}(t))\right\|_H\le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H,\quad f_0>0.$$

Тогда при выполнении условий

$\left\|\varphi(t,p(t),\beta)-\varphi(t,\bar{p}(t),\beta)\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\bar{p}(t)\right\|_H$, $\varphi_0(\beta)>0$,

и $\gamma=\dfrac{2[1+TM_1]}{\lambda_1^2}\|g(t,x)\|_H^2\, f_0\varphi_0(\beta)<1$

операторное уравнение (2.11) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение $p^0(t)$.

Подставляя решение $p^0(t)$ в (2.10), получим решение

$$u^0(t)=\varphi(t,p^0(t),\beta) \qquad (2.13)$$

нелинейного интегрального уравнения (2.7), удовлетворяющего дополнительному условию (2.8).

Далее согласно формулам (1.9) и (2.1) находим процесс $V^0(t,x)$ и $I(u^0(t))$.

Аналогично исследуется случай, когда $u(t)<0, \forall t\in[0,T]$.

Пусть тройка $(u^+(t),V^+(t,x),I[u^+(t)])$ является решением задачи оптимизации в случае $u(t)>0, \forall t\in[0,T]$, а тройка $(u^-(t),V^-(t,x),I[u^-(t)])$ – в случае $u(t)<0, \forall t\in[0,T]$. Тогда решением задачи нелинейной оптимизации является та тройка, у которой функционал принимает меньшее значение, чем функционал у другой тройки.

3. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации. Пусть тройка $(u^0(t),V^0(t,x),I[u^0(t)])$ является решением задачи оптимизации. На практике не всегда удается построить точное решение нелинейного интегрального уравнения (2.11). Поэтому его решают приближенно. Приближенное решение интегрального уравнения (2.11) можно найти методом последовательных приближений, т.е. по схеме [3, 6]:

$$p_k(t)=G[p_{k-1}(t)], \quad k=1,2,3,...,$$

где $p^0(t)$ – произвольный элемент пространства $H(0,T)$. В условиях теоремы (2.1) приближенное решение $p_k(t)$ уравнения (2.11) удовлетворяет оценке

$$\left\|p^0(t)-p_k(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_H. \qquad (3.1)$$

Зная $p_k(t)$, по изложенной выше схеме можно найти тройку $(u_k(t),V_k(t,x),I[u_k(t)])$, которая является k-тым приближением тройки $(u^0(t),V^0(t,x),I[u^0(t)])$.

Установлены следующие оценки:

1) $\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\left\|p^0(t)-p_k(t)\right\|_H$;

2) $\left\|V^0(t,x)-V_k(t,x)\right\|_H \le \dfrac{1+M_1T}{\lambda_1}\left\|g(t,x)\right\|_H f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H$;

3) $\left|I(u^0(t))-I(u_k(t))\right| \le C\left\|V^0(t,x)-V_k(t,x)\right\|_H +$
$+2\beta\sqrt{T}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H, C>0,$

из которых следует сходимость приближенных решений задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
2. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. II том. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
3. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
5. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Дис. … д-ра физ.-мат. наук, Бишкек, 2003.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1995. 520 с.