**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА**

КАРА-КУЛЬСКИЙ КОЛЛЕДЖ

МАТЕМАТИКА

Методическое руководство по организации самостоятельной работы и контрольные задания по разделу «Полное исследование функции одной переменной» для студентов 1-курса колледжа

Бишкек – 2011

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
«Естественные дисциплины»
Прот. № 6 от 16.02.2011 г.

«Одобрено»
методическим советом
ККТИ КГТУ им. И.Раззакова
Прот. № 7 от 25.02.2011 г.

Составители: доц. АЛДАКЕНОВА Ж.Б., ст. препод. АБДЫКАДЫРОВА Г.М.

Математика. Методическое руководство по организации самостоятельной работы и контрольные задания по разделу «Полное исследование функции одной переменной» для студентов 1-курса колледжа / ККТИ КГТУ им. И.Раззакова; сост.: Ж.Б.Алдакенова, Г.М.Абдыкадырова. – Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 34 с.

Методическое указание содержит разбор и подробные решения типовых задач по исследованию функций. Большое количество задач для упражнений снабжено указаниями, дано для самостоятельной работы, контрольные задания, промежуточными результатами и ответами.

Рецензент к.т.н., доц. Ниязов Н.Т.

ВВЕДЕНИЕ

Цель методического руководства – помочь учащемуся научиться самостоятельно решать задачи по указанным разделам курса математики в средних технических учебных заведениях.

Весь учебный материал разделен на отдельные практические занятия. Перед каждым занятием помешены основные сведения из теории, относящихся к этому практическому занятию, теоремы, определения, формулы и подробные решения типовых задач различной степени трудности с полным анализом решения, причем большое количество этих задач решаются различными способами и целесообразность этих способовсравнивается. Каждое практическое занятие содержит большое число задач для самостоятельного решения, многие из них снабжены методическими указаниямик решению и промежуточными результатами. Такое методическое указание предоставляет учащемуся широкие возможности для активной самостоятельной работы и экономит его время. Учащиеся, пользующийся этим методическим указанием, должен перед каждым практическим занятием выучить относящийся к нему тему, внимательно с выполнением всех действий на бумаге, разобрать решение задачи, и после этого приступить к решению задач, предложенных для самостоятельного решения.

Приложение производной к исследованию функций
§1. Возрастание и убывание функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* в интервале (a,b) изменения аргумента x, если значения функции $y=f(x)$ в этом интервале возрастают с возрастанием x.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* в интервале (a,b) изменения аргумента x, если значения функции $y=f(x)$ в этом интервале убывают с возрастанием x.

Интервалы, в которых функция возрастает или убывает, называются интервалами монотонности изменения функции.

Признаки возрастания и убывания функции

Если производная данной функции положительна для всех значений x в интервале (a,b), то функция в этом интервале возрастает.

Если производная данной функции отрицательна для всех значений x в интервале (a, b), то функция в этом интервале убывает.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $\boldsymbol{y=x^2-8x+12}$.

Решение. Найдем производную данной функции $y' = 2x - 8$.

В интервале убывания производная от данной функции отрицательная и в интервале возрастания производная положительна, поэтому решим неравенства:

1) $2x-8<0$, $2x<8$, $x<4$, т.е. x изменяется в интервале $(-\infty; 4)$; в этом интервале функция убывает;
2) $2x-8>0$, $x>4$, т.е. x изменяется в интервале $(4,+\infty)$; в этом интервале функция возрастает.

Пример 2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $\boldsymbol{y=x^3-6x^2+4}$.

Решение. Найдем производную данной функции $y'=3x^2-12x$. Чтобы найти интервал убывания, решим неравенство $3x^2-12x<0$, $x^2-4x<0$.

D=16>0. Корни уравнения $x^2-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=4$. Неравенство справедливо при всех действительных значениях x в интервале $(0, 4)$. Следовательно, в интервале $(0, 4)$ функция убывает.

Найдем интервал возрастания $3x^2-12x>0$, $x^2-4x>0$.
Неравенство справедливо при всех действительных значениях в интервалах $(-\infty, 4)$ и $(4,+\infty)$. В этих интервалах функция возрастает.

Пример 3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $\boldsymbol{y=x^4-4x+3}$.

Решение. Вычислим производную данной функции $y'=4x^3-4$

Найдем интервал убывания функции $4x^3-4<0$, $x^3-1<0$, $x^3<1$, $x<1$, следовательно, интервал убывания $(-\infty; 1)$.

Найдем интервал возрастания функции $4x^3-4>0$, $x^3-1>0$, $x^3>1$, $x>1$- интервал возрастания $(1,+\infty)$.

Пример 4. Найти интервалы возрастания и убывания функции ***y=2x³-9x²+12x-15.***

Решение. Вычислим производную данной функции $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

Найдем интервал убывания функции $6x^2-18x+12<0$, $x^2-3x+2<0$.

$D=9-8=1>0$. Корни уравнения $x^2-3x+2=0$, $x_1=1$, $x_2=2$. Неравенство справедливо при всех действительных значениях x в интервале $(1,2)$. Следовательно, интервал убывания функции $(1, 2)$.

Найдем интервал возрастания функции: $x^2-3x+2>0$.
Неравенство справедливо при всех действительных значениях в интервалах: $(-\infty,1)$ и $(2,+\infty)$, следовательно, в этих интервалах функция возрастает.

Пример 5. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{1}{2x}$.

Решение. Найдем производную данной функции $y'=-\dfrac{1}{2x^2}$. Область определения функции $y=\dfrac{1}{2x}$: $(-\infty;0)$ и $(0,+\infty)$. Производная $y'=-\dfrac{1}{2x^2}$ будет отрицательной для всей области определения функции, так как аргумент x содержится в квадрате. Следовательно, функция убывает в интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

Пример 6. Найти интервалы возрастания и убывания функции ***y = 1n x.***

Решение. Найдем производную данной функции $y'=\dfrac{1}{x}$. Область определения функции $y = 1n\ x$: $(0;+\infty)$; для этой области производная положительна: $\dfrac{1}{x}\succ 0$, следовательно, функция в интервале $(0, +\infty)$ возрастает.

Пример 7. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$.

Решение. Область определения члена $1n\ x$: $(0,+\infty)$, следовательно, аргумент члена $\dfrac{1}{2}x^2$ может принимать только положительные значения.

Найдем производную данной функции: $y'=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$; так, как область определения данной функции – все положительные числа, то производная $y'=\dfrac{x^2-1}{x}$ будет положительна при $x\succ 1$ и отрицательна при $0\prec x\prec 1$. Следовательно, функция убывает в интервале (0; 1) и возрастает в интервале $(1, +\infty)$.

Пример 8. Найти интервалы возрастания и убывания функции ***y =e***$^{-x}$.

Решение. Найдем производную данной функции $y' = -e^{-x}$. Производная при любом x отрицательная, следовательно, функция убывает в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Пример 9. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\sqrt{x-x^2}$.

Решение. Найдем область определения функции: $x-x^2\ge 0$ или $x^2-x\le 0$.

D>0. Корни уравнения: $x^2-x=0$, $x_1=0$ и $x_2=1$. Неравенство (равенство нулю) справедливо при всех действительных значениях x в закрытом интервале [0,1].

Найдем производную от данной функции.

$$y'=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

В интервале возрастания функции производная.

$$\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\succ 0.$$

Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Знаменатель $2\sqrt{x-x^2}\succ 0$, следовательно, числитель $1-2x>0$. Имеем:

$\begin{cases}1-2x\succ 0,\\ 2\sqrt{x-x^2}\succ 0\end{cases}$, откуда $-2x>-1, x<\frac{1}{2}$. Учитывая, что область определения функции [0,1] имеем $0\le x\le\frac{1}{2}$.

Знаменатель, $2\sqrt{x-x^2}\succ 0$, но при $x=0$ и $x=1$ он обращается в нуль, а так как функция определена в интервале [0,1], x может принимать только значения $0<x<1$.

Имеем: $0\le x\prec\frac{1}{2}$ и $0<x<1$, откуда следует, что $0<x<\frac{1}{2}$.

Следовательно, в интервале $(0;\frac{1}{2})$ функция возрастает. В интервале убывания функции производная

$$\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}<0.$$

Дробь отрицательна, если числитель и знаменатель разных знаков. Знаменатель $2\sqrt{x-x^2}>0$, следовательно, числитель $1-2x<0$, откуда $-2x<-1$ или $x>\frac{1}{2}$.

Учитывая, что функция определена в интервале [0,1], функция будет убывать в интервале $(\frac{1}{2}, 1)$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти интервалы возрастания и убывания функций.

1. $y=x^2-6x+5$,
2. $y=2x^2-4x+5$,
3. $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2$,
4. $y=\frac{1}{4}x^4+x-1$,
9. $y=-x^2+4x+1$,
10. $y=x^3-3x^2+1$,
11. $y=x^4-32x+40$,
12. $y=2x^3-15x^2+36x-20$,

5. $y = -\frac{1}{x}$,   13. $y = \ln x^2$,

6. $y = \ln\frac{1}{x}$,   14. $y = \ln x - \frac{1}{3}x^3$,

7. $y = e^{x^2}$,   15. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

8. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

§2. Исследование функции на максимум и минимум с помощью первой производной

Значение аргумента, при котором функция имеет наибольшую величину, называется *точкой максимума.*

Значение аргумента, при котором функция имеет наименьшую величину, называется *точкой минимума*.

Точка максимума функции является граничной точкой перехода функции от возрастания к убыванию и, соответственно, точка минимума функции является граничной точкой перехода от убывания к возрастанию.

Термины максимум и минимум функции объединяются одним термином экстремумов, поэтому точки экстремумов рассматриваются лишь по сравнению с соседними ее точками.

Функция $y = f(x)$ имеет максимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a) \succ f(x)$.

Функция $y = f(x)$ имеет минимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a) \prec f(x)$.

Достаточный признак максимума функции y= f (x)

Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет максимум, если:

1. $f'(a) = 0$;
2. при $x < a$ $f'(x) > 0$;
3. при $x > a$ $f'(x) < 0$.

Достаточный признак минимума функции y=f (x)

Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет минимум, если:

1. $f'(a) = 0$;
2. при $x < a$ $f'(x) < 0$;
3. при $x > a$ $f'(x) > 0$.

Точка $x=a$, в которой $f'(a) = 0$, называется стационарной точкой функции $f(x)$.

Если функция имеет производную, то ее экстремум надо искать в стационарных точках.

Правило исследования функции y = f (x) на максимум и минимум с помощью первой производно

I. Найти производную данной функции $y' = f'(x)$.

II. Приравнять найденную производную нулю $f'(x) = 0$ и решить уравнение $f'(x) = 0$, т.е. найти его действительные корни (стационарные точки): $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$.

III. Расположить найденные корни $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ в порядке их возрастания. Разложить производную $f'(x)$ на множители и подставить в нее вместо корни x_1 число немного меньшее x_1 и найти знак производной, затем вместо x_1 подставить число немного больше x_1 (но обязательно меньшее x_2) и снова найти знак производной.

Если при этом окажется, что;

1. Производная меняет знак с (+) на (-), то функция $y=f(x)$ при $x=x_1$ имеет максимум.
2. Производная меняет знак с (-) на (+), то функция $y=f(x)$ при $x=x_1$ имеет минимума;
3. Знак производной не изменяется то функция не имеет при $x=x_1$ ни максимума, ни минимума.

Затем найдем знаки производной $f'(x)$ для $x< x_2$ и для $x>x_2$ - и так для каждого из корней производной.

IV. Найти максимальные и минимальные значения функции. Для этого надо вычислить значения функции в стационарных точках (точках максимума и минимума).

V. Построить график по точкам кривой (точки максимума и минимума функции точки пересечение кривой с осями *Ox* и *Oy*).

Пример 10. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=x^2-4x$.

Решение.

1. Найдем производную данной функции $y' =2x-4$.
2. Приравняем производную нулю: $2x-4=0$ и решив это уравнение, найдем стационарную точку: $x=2$.
3. Разложим производную на множители: $y' =2x-4=2(x-2)$. Берем $x<2$ (немного меньше 2) и мысленно поставив это значение x меньше 2 (например, 1,9) в производную $y' =2(x-2)$, найдем знак производной при $x<2$. Производная имеет знак минус, что запишем сокращенно так: $y'_{x<2} = (-)$.

Теперь берем $x>2$ (немного больше 2) и снова мысленно подставляем это значения x больше 2 (например: 2,1.) в производную $y' =2(x-2)$. Найдем знак производной при $x>2$, производная имеет знак плюс что запишем так: $y'_{x<2} = (+)$.

Производная меняет знак с (-) на (+), следовательно, функция при $x=2$ имеет минимум.

4. Найдем минимальное значения функции; для этого поставим в данную функцию значение $x=2$:

$$y_{x=2}=2^2-4\cdot 2=-4.$$

5. Построим график функции $y=x^2-4x$. Составим таблицу значений аргумента и соответствующих значений функции:

x	0	2	4
y	0	-4	0
		Минимум функции	Точка пересечения с осью *Ox*

Построив эти точки, получим параболу $y=x^2-4x$. Точка минимума функции (2,-4) является вершиной параболы. В дальнейшем вершину параболы можем находить как точку максимума или минимума квадратной функции.

Пример 11. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=-x^2+2x$.

Решение. 1. Найдем производную данной функции $y'=-2x+2$.

2. Приравняем производную нулю: $-2x+2=0$ и найдем стационарную точку: $x=1$.

3. Разложим производную на множители: $y'=-2(x-1)$.

При $x \prec 1$ знак производной $y'_{x\prec 1}=(-)(-)=(+)$.

При $x>1$ знак производной $y'_{x\succ 1}=(-)(+)=(-)$. Производная меняет знак с *(+)* на *(-)*, следовательно, функция при $x=1$ имеет максимум.

4. Найдем максимальное значение функции при $x=1$:

$$y_{x=1}=-1^2+2\cdot 1=1.$$

5. Составим таблицу:

x	0	1	2
y	0	1	0
		Минимум функции	Точка пересечения с осью *Ox*

И построим параболу $y=-x^2+2x$.

Пример 12. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=x^2-8x+12$.

Решение. 1. $y'=2x-8$.

2. $2x-8=0$, $x=4$;

3. $y'=2(x-4)$; $y'_{x<4}=(-)$; $y'_{x>4}=(+)$;

Производная меняет знак с *(-)* на *(+)*. Следовательно, функция при $x=4$ имеет минимум;

4. Найдем минимальное значение функции:

$$y_{x=4}=4^2-8\cdot 4+12=-4$$

5. Составим таблицу:

x	0	2	4	6
y	12	0	-4	0
	Точка пересечения с осью *Oy*	Точка пересечения с осью *Ox*	Минимум функции	Точка пересечения с осью *Ox*

и построим параболу $y=x^2-8x+12$

Пример 13. Исследовать на максимум и минимум функцию $\boldsymbol{y= - x^2+5x-6}$.

Решение. 1. $y' =-2x+5$.

2. $-2x+5=0$, y= $\frac{5}{2}$ = 2,5.

3. $y' = -2(x-2,5)$; $y'_{x<2,5}=(-)(-)=(+)$; $y'_{x>2,5}=(-)(+)=(-)$.

Производная меняет знак с (+) на (-), следовательно, функция при x=2,5 имеет максимум;

4. Найдем максимальное значение функции:

$$y_{x=2,5} = -(2,5)^2+5\cdot 2,5-6=0,25$$

5. Составим таблицу:

x	0	2	2,5	3
y	-6	0	0,25	0
	Точка пересечения с осью *Oy*	Точка пересечения с осью *Ox*	Минимум функции	Точка пересечения с осью *Ox*

и построим параболу $y = -x^2+5x-6$.

Пример 14. Исследовать на максимум и минимум функцию $s=2t^2-8t+6$.

Решение. 1. $s' =4t-8$; 2. $4t-8=0$, $t=2$; 3. $s' =4(t-2)$; $s'_{t<2}=(-)$; $s'_{t>2}=(+)$;

Производная меняет знак с (-) на (+) следовательно, функции при $t=2$ имеет минимум;

4. $S_{t-2}=2-8\cdot 2+6= -2$;

5. Составим таблицу:

t	0	1	2	3
s	6	0	-2	0
	Точка пересечения с осью *Os*	Точка пересечения с осью *Ot*	Минимум функции	Точка пересечения с осью *Ot*

и откладывая числовые значения аргумента *t* по оси *Ot* и соответственно значения функции по оси *Os*, построим график функции $s=2t^2-8t+6$.

Пример 15. Исследовать на максимум и минимум функцию $\boldsymbol{y =\frac{1}{2} x^4}$.

Решение. 1. $y' = 2x^3$; 2. $2x^3=0$, $x=0$; 3. $y'_{x<0}=(-)$, $y'_{x>0}=(+)$.

Производная меняет знак с *(-)* на *(+)*, следовательно, функция при $x=0$ имеет минимум.

Пример 16. Исследовать на максимум и минимум функцию $\boldsymbol{y=x^3-3x^2}$.

Решение. 1. $y'=3x^2-6x$; 2. $3x^2-6x=0$; $x^2-2x=0$; $x(x-2)=0$, $x_1=0$, $x_2=2$;

3. $y'=3x(x-2)$.

А) Исследуем критическое значение $x_1=0$:

$y'_{x<0}=(-)(-)=(+)$; $y'_{x>0}=(+)(-)=(-)$;

Производная меняет знак с *(+)* на *(-)*. Следовательно, функция при $x=0$ имеет максимум.

Б) Исследуем критическое значение $x_2=2$:

$y'_{x<2}=(+)(-)=(-)$: $y'_{x>2}=(+)(+)=(+)$

Производная меняет знак с (-) на (+), следовательно, функция при x=2 имеет минимум;

4. $y_{x-0}=0^3-3\cdot0^2=0$; $y_{x-2}=2^3-3\cdot2^2=-4$;

5. Для построения графика вычислим координаты некоторых точек. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Приравняв $y=0$, получим $x^3-3x^2=0$; $x^2(x-3)=0$, откуда $x=0$ и $x=3$ т.е. имеем точки *(0, 0)* и *(3, 0)*

Имеем таблицу найденных точек:

x	0	2	3
y	0	4	0
	Максимум функции	Минимум функции	Точка пересечения с осью Ox

Пример 17. Исследовать на максимум и минимум функцию $\boldsymbol{y=2x^3-9x^2+12x-8}$.

Решение. 1. $y'=6x^2-18x+12$; 2. $6x^2-18x+12=0$, $x^2-3x+2=0$, $x=1$, $x_2=2$,

3. $y'=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)$.

А) Исследуем критическое значение $x_1=1$:

$y'_{x<1}=(-)(-)=(+)$, $y'_{x>1}=(+)(-)=(-)$.

Производная меняет знак с *(+)* на *(-)*, следовательно, функция при $x=1$ имеет максимум.

Б) Исследуем критическое значение $x_2=2$:

$y'_{x<2}=(+)(-)=(-)$, $y'_{x>2}=(+)(+)=(+)$.

Производная меняет знак с *(-)* на *(+)* функция при $x=2$ имеет минимум;

4. $y_{x-1}=2\cdot1^3-9\cdot1^2+12\cdot1-8=-3$; $y_{x-2}=2\cdot2^3-9\cdot2^2+12\cdot2-8=-4$;

5. Точками графика кривой будут:

x	0	1	2
y	-8	-3	-4
	Точка пересечения с осью Oy	Максимум функции	Минимум функции

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на максимум и минимум функций:

1. $y= x^2-x;$	8. $s=2t-4t+2;$
2. $y= x^2+3x;$	9. $y= 2x^4-x;$
3. $y=x^2-4x+3;$	10. $y= \frac{1}{4}x^4+8x;$
4. $y=x^2-10x+9;$	11. $y=\frac{1}{3}x^3-4x;$
5. $y= x^2+2x+3;$	12. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2;$
6. $y= -x^2-x+6;$	13. $y=2x^3-3x^2-12x+8;$
7. $s= 2t-t-1;$	14. $y=2x^3+9x^2+12x-2.$

§3. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

Правило исследования функции y=f(x) на максимум и минимум с помощью второй производной:

1. Найти производную данной функции $y' = f'(x)$.

2. Приравнять найденную производную нулю: $f'(x)=0$ и решить уравнение $f'(x)=0$, т.е. найти действительные корни уравнение (стационарные точки).

3. Найти вторую производную данной функции.

4. Найти знак второй производной в каждой из стационарных точек.

Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в этой точке имеет максимум, если положительной - то минимум.

Если вторая производная обращается в нуль, то исследование нужно проводить с помощью первой производной.

5. Найти максимальные и минимальные значения функции. Для этого надо вычислить значения функции в стационарных точках (точках максимума и минимума).

6. Построить график функции по найденным точкам кривой (точки максимума и минимума функции, точки пересечения кривой с осями $0x$ и $0y$). (Точки пересечения кривой с осью $0x$ в случае, если кривая представлена уравнением выше второй степени, находить сложно, так как в курсе элементарной алгебры рассматриваются только частные случаи решения уравнений высших степеней.)

Пример 18. Исследовать на максимум и минимум с помощью второй производной функцию $\boldsymbol{y=x^2-2x-3}$.

Решение. 1. Найдем первую производную: $y' =2x-2.$

2. Приравняем первую производную нулю и найдем стационарную точку:
$2x-2=0,\ x=1.$

3. Найдем вторую производную: $y''=2$.
4. Вторая производная положительна, следовательно, функция в стационарной точке $x=1$ имеет минимум.

Пример 19. Исследовать на максимум и минимум с помощью второй производной функцию $\boldsymbol{y=x^2-9x^2+24x-12}$.

Решение. 1) $y'=3x^2-18x+24$; 2) $3x^2-18x+24=0$; $x^2-6x+8=0$; $x_1=2$, $x_2=4$;

3) $y''=6x-18$; 4) найдем знак второй производной в стационарных точках: $y''_{x=2}=6\cdot 2-18<0$. При $x=2$ функция имеет максимум: $y''_{x=4}=6\cdot 4-18>0$. При $x=4$ функция имеет минимум;

5) найдем максимальное и минимальное значения функции:

$$y_{x-2}=2^3-9\cdot 2^2+24\cdot 2-12=8;$$

$$y_{x-4}=4^3-9\cdot 4^2+24\cdot 4-12=4;$$

6) составим таблицу:

x	0	2	4
y	-12	8	4
	Точка пересечения с осью Oy	Максимум функции	Минимум функции

Пример 20. Исследовать на максимум и минимум с помощью второй производной функцию $\boldsymbol{y=3x^4-16x^3+30x^2-24x+6}$.

Решение. 1) $y'=12x^3-48x^2+60x-24$; 2) $12x^3-48x^2+60x-24=0$; $x^3-4x^2+5x-2=0$.

Чтобы решить это уравнение третьей степени, разложим левую часть на линейные множители, для чего произведем группировку его членов, представив второй и третий члены в виде сумм двух слагаемых следующим образом:

$$x^3-x^2-3x^2+3x+2x-2=0;\ (x^3-x^2)-(3x^2-3x)+(2x-2)=0;$$

$$x^2(x-1)-3x(x-1)+2(x-1)=(x-1)(x^2-3x+2)=0.$$

Приравняв каждый из сомножителей нулю, находим стационарные точки: $x-1=0$, $x_1=1$; $x^2-3x+2=0$; $x_2=1$, $x_3=2$;

3) $y'=36x^2-96x+60$

4) находим знак второй производной в стационарной точке $x=1$;

$$y''_{x=1}=36\cdot 1-96\cdot 1+60=0.$$

Вторая производная равна нулю, поэтому невозможно установить, что имеет функция: максимум или минимум. Проведем исследование стационарной точки $x_1=1$ с помощью первой производной; представим первую производную произведением

$$y'=(x-1)(x-1)(x-2).$$

Исследуя первую производную для значений аргумента немного меньших и не много больших единицы, имеем:

$$y_{x<1}=(-)(-)(-)=(-); \qquad y'_{x>1}=(+)(+)(-)=(-).$$

Производная знак не меняет, следовательно, функция при $x=1$ не имеет ни максимума, ни минимума.

Исследуем стационарную точку $x=2$:

$$y''_{x=2} = 36\cdot 2^2 - 96\cdot 2 + 60 > 0.$$

При $x=2$ функция имеет минимум;

5) найдем минимальное значение функции:

$$y_{x=2} = 3\cdot 2^4 - 16\cdot 2^3 + 30\cdot 2^2 - 24\cdot 2 + 6 = -2;$$

6) составим таблицу:

x	0	1	2	3
y	6	-1	-2	15
	Точка пересечения с осью Oy		Минимум функции	

И построим график функции.

Пример 21. Исследовать на максимум и минимум с помощью второй производной функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

Решение. 1) $y' = \dfrac{(x^2+1)'x - x'(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{2x\cdot x - x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$;

2) $\dfrac{x^2-1}{x^2}=0$. Дробь обращается в нуль, если числитель равен нулю (знаменатель не равен нулю):

$$x^2-1=0; \quad x_1=-1, \qquad x_2=1;$$

3) $y'' = \dfrac{1}{x^4}\cdot 2x = \dfrac{2}{x^3}$;

4) $y''_{x=1} = -2<0$, следовательно, функция при $x=-1$ имеет максимум;

$y''_{x=1} = 2>0$, следовательно, функция при $x=1$ имеет минимум;

5) найдем максимальное и минимальное значения функции:

$$y_{x=-1}=-2; \quad y_{x=1}=2;$$

6) построим график функции. В точке $x=0$ функция имеет разрыв.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на максимум и минимум с помощью второй производной функции:

1. $y=2x^{2;}$
2. $y=x^2-2x$;
3. $y=2x^2-5x+2$;
4. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$;
5. $y=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-2$;
6.
7. $y=2x^2-2$;
8. $y=-x^2+4x$;
9. $y=-x^2+x+6$
10. $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+5$;
11. $y=x^4+3x^2-4$.

6. $y=\frac{3x}{x^2+1}$.

§4. Наибольшее и наименьшее значения функции

В теоретических вопросах и прикладных задачах нередко приходится находить те значения аргумента *x,* которым отвечает наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции *y=f(x)* на отрезке $[a,b]$.

Наибольшее и наименьшее значение может быть соответственно максимумом и минимумом функции, но может и не быть ими. В этом случае наибольшее и наименьшее значение функции принимаются на концах отрезка $[a,b]$, т.е. в точках $x=a$ и $x=b$.

Если функция непрерывная на отрезке *[a, b]* имеет единственный экстремум, то в случае максимума это будет ее наибольшее значение, а в случае минимума – наименьшее.

При нахождении наибольшего и наименьшего значения функции будем руководствоваться следующими правилами:

1) найти стационарные точки;
2) найти значения функции в стационарных точках и на концах отрезка. Наибольшее и наименьшее из этих чисел будет соответственно наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке.

Пример 22. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^2-4x+3$ на отрезке *[0,3].*

Решение. $f'(x)=2x-4$. Находим стационарную точку: $2x-4=0$, $x=2$, $f''(x)=2$, $f(2)=-1$, следовательно, минимум *(2, -1).* Это точка принадлежит отрезку *[0, 3].* Исследуем концы отрезка: $f(0)=3$, $f(3)=0$. Наибольшее значение функции равно *3,* наименьшее *(-1).*

Пример 23. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}.\right]$.

Решение. $f'(x)=2\cos x+2\sin 2x$. Находим стационарные точки:

$$2\cos x+2\sin 2x=0,\quad 2\cos x+4\sin x\cos x=0;$$

$$\cos x(1+2\sin \bar{x})=0,\quad \cos x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots;$$

$1+2\sin x=0$, $\sin x=-\frac{1}{2}$, значения *x* лежат вне отрезка $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и поэтому, их не вычисляем.

Найдем вторую производную

$$f''(x)=-2\sin x+4\cos 2x;$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}+4\cos\pi=-2-4=-6;$$

вторая производная при $x = \frac{\pi}{2}$ отрицательная и $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 2 + 1 = 3$, следовательно, максимум $\left(\frac{\pi}{2};3\right)$.

Вычислим значение функции в точке *x =0:*

$$f(0) = 2 \sin 0 - \cos 0 = -1.$$

Наибольшее значение функции равно 3, наименьшее (-1).

Примеры для самостоятельного решения

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

1. $f(x)=x^2-6x+13$ на отрезке [*0, 6*];
2. $f(x)=8-\frac{1}{2}x^2$ на отрезке [*-2, 2*].
3. $f(x)=\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на отрезке [*1, 3*];
4. $f(x)= 6x^2-x^3$ на отрезке [*-1, 6*].
5. $f(x) = \sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

§ 5. Задачи на наибольшее и наименьшее значения величин

Пример 24. Сумма двух положительных чисел равна *a*. Найти эти числа при наибольшей величине их произведения.

Решение. Пусть одно из слагаемых будет *x,* тогда другое будет равно *a–x.* Произведение этих слагаемых – переменная величина; обозначив ее через *y*, имеем:

$$y = x(a - x) \text{ или } y = ax - x^2 \ (0 < x < a).$$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

1) $y' = a - 2x$; 2) $a - 2x = 0,\ x = \frac{a}{2}$; 3) $y'' = -2$.

Вторая производная отрицательна, следовательно, при $x=\frac{a}{2}$ функция имеет максимум. Число *a* надо разделить пополам, тогда произведение этих слагаемых будет наибольшим.

Пример 25. Сумма двух положительных чисел равна *a.* Каковы эти числа, если сумма их кубов будет наименьшей?

Решение. Пусть одно из слагаемых будет *x,* тогда другое равно *a-x.* Сумма кубов этих слагаемых – переменная величина; обозначив ее через *y*, имеем:

$$y = x^3 + (a - x)^3 \qquad (0 < x < a)$$

Или

$$y = a^3 - 3a^2x + 3ax^2.$$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

1) $y' = -3a^2 + 6ax;$ 2) $-3a^2 + 6ax = 0,\ x=\frac{a}{2};$ 3) $y'' = 6a.$

Вторая производная положительна, следовательно, при $x = \frac{a}{2}$ функция имеет минимум. Число a надо разделить пополам, тогда сумма кубов этих слагаемых будет наименьшей.

Пример 26. Произведение двух положительных чисел равно a. Чему равны эти числа, когда сумма их будет наименьшей?

Решение. Пусть один из сомножителей равен x, тогда другой будет $\frac{a}{x}$. Сумма этих сомножителей – переменная величина; обозначим ее через y, тогда $y = x + \frac{a}{x}$. $(x>0)$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

1) $y' = 1 - \frac{a}{x^2};$ 2) $1 - \frac{a}{x^2} = 0,\ x^2=a,\ x= \sqrt{a}$ (по условию $x>0$);

3) $y'' = \frac{a}{x^4}\cdot 2x = \frac{2a}{x^3};$ 4) $y''_x = \sqrt{a} = \frac{2a}{\left(\sqrt{a}\right)^3} > 0,$ следовательно, функция при $x= \sqrt{a}$ имеет минимум. Наименьшая сумма будет при равенстве слагаемых.

Пример 27. Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, у которого площадь наибольшая.

Решение. Пусть периметр прямоугольника равен ρ. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x, тогда другая будет:

$$\frac{\rho - 2x}{2} = \frac{\rho}{2} - x.$$

Площадь прямоугольника – переменная величина. Обозначив ее через y, имеем:

$$y - x\left(\frac{\rho}{2} - x\right) = \frac{\rho}{2}x - x^2\left(0 < x < \frac{\rho}{2}\right).$$

Исследуем функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

1) $y' = \frac{p}{2} - 2x$; 2) $\frac{p}{2} - 2x = 0,$ $x = \frac{p}{4};$ 3) $y'' = -2.$

Вторая производная отрицательна, следовательно, функция имеет максимум при $x=\frac{p}{4}.$

Из всех прямоугольников при данном периметре наибольшую площадь имеет квадрат.

Пример 28. Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, у которого диагональ наименьшая.

Решение. Пусть периметр прямоугольника равен $2p$ и одно из сторон прямоугольника равна x, тогда другая сторона будет $\frac{2p-2x}{2}=p-x$. Диагональ прямоугольника - переменная величина. Обозначив ее через y, получим по теореме Пифагора:

$$y^2=x^2+(p-x)^2 \text{ или } y^2=2x^2-2px+p^2,$$

Откуда

$$y=\sqrt{2x^2-2px+p^2} \quad (0<x<p).$$

Исследуем функцию с помощью первой производной:

1) $y'=\frac{4x-2p}{2\sqrt{2x^2-2px+p^2}}=\frac{2x-p}{\sqrt{2x^2-2px+p^2}}$; 2) $\frac{2x-p}{\sqrt{2x^2-2px+p^2}}=0$;

$2x-p=0; x=\frac{p}{2}(квадрат)$; 3) $y'=\frac{2\left(x-\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{2x^2-2px+p^2}}$.

Знаменатель производной положительный, поэтому исследуем только числитель производной:

$$y'_{x<\frac{p}{2}}<0 \quad \text{и} \quad y'_{x>\frac{p}{2}}>0.$$

Производная меняет знак с *(-)* на *(+)*, следовательно, функция при $x=\frac{p}{2}$ имеет минимум.

Из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

Пример 29. Из всех прямоугольников данной площади найти тот, у которого периметр наименьший.

Решение. Пусть площадь прямоугольника равна s, одна из сторон прямоугольника равна x, тогда другая сторона будет $\frac{S}{x.}$ сумма всех сторон прямоугольника - переменная величина; обозначив ее через p, получим:

$$\rho=2x+\frac{2S}{x.}$$

Исследуем эту функцию с помощью второй производной:

1) $p'=2-\frac{2S}{x^2}$; 2) $2-\frac{2S}{x^2}=0, x=\sqrt{S}$; 3) $p''=\frac{2S}{x^2}\cdot 2x=\frac{4S}{x^2}$;

4) $p''_{x=\sqrt{S}}=\frac{4S}{(\sqrt{S})^3}>0.$

Вторая производная положительна, следовательно, функция при $x=\sqrt{S}$ имеет минимум. Из всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат.

Пример 30. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса *R,* найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Решение. Диагональ прямоугольника, вписанного в круг, равна *2R;* одну из сторон прямоугольника обозначим через *x,* тогда другая сторона будет $\sqrt{(2R)^2-x^2}$. Площадь прямоугольника – переменная величина; обозначив ее через *y*, получим:

$$y = x\sqrt{4R^2} - x^2 (0 < x < 2R).$$

Исследуем эту функцию с помощью первой производной:

1) $y' = x'\sqrt{4R^2-x^2} + (\sqrt{4R^2-x^2})'x = \sqrt{4R^2-x^2} - \dfrac{2x\cdot x}{2\sqrt{4R^2-x^2}} = \sqrt{4R^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} =$

$= \dfrac{4R^2-x^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} = \dfrac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}};$

2) $\dfrac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} = 0, \quad 4R^2-2x^2=0, \quad x = R\sqrt{2};$

3) $y' = \dfrac{2(2R^2-x^2)}{\sqrt{4R^2-x^2}} = \dfrac{2(R\sqrt{2}-x)(R\sqrt{2+x})}{\sqrt{4R^2-x^2}};$

$y'_{x<R\sqrt{2}} = (+)\cdot(+) = (+); \quad y'_{x>\sqrt{2}} = (-)(+) = (-).$

Производная меняет знак с (+) на (-), следовательно, функция при $x = R\sqrt{2}$ имеет максимум.

Стороны прямоугольника $x = R\sqrt{2}$ и

$$\sqrt{4R^2-(R\sqrt{2})^2} = \sqrt{4R^2-2R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}.$$

Стороны прямоугольника равны, следовательно, вписанный в круг прямоугольник наибольшей площади есть квадрат.

Пример 31. В полукруг радиуса *R* вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Обозначим одну из сторон прямоугольника через *x*, другую сторону *x* и радиус *R* по теореме Пифагора $\sqrt{R^2-x^2}$.

Площадь прямоугольника со сторонами *x* и $2\sqrt{R^2-x^2}$ - переменная величина; обозначив ее через *y,* получим:

$$y = x\cdot 2\sqrt{R^2x^2} = 2x\sqrt{R^2-x^2}\,(0 < x < R).$$

Исследуем эту функцию с помощью первой производной:

1)

$y' = 2\left[x'\sqrt{R^2-x^2} + (\sqrt{R^2-x^2})'x\right] = 2\left(\sqrt{R^2-x^2+\dfrac{-2x\cdot x}{2\sqrt{R^2-x^2}}}\right) = 2\left(\dfrac{R^2-x^2-x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) = \dfrac{2(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}};$

2) $y' = \dfrac{2(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} = 0; \quad R^2-2x^2=0; \quad x = \dfrac{R}{\sqrt{2}};$

3) $$y' = \frac{4\left(\frac{R^2}{2} - x^2\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{4\left(\frac{R}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + x\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}};$$

$$y'_{x<\frac{R}{\sqrt{2}}} = (+)(+) = (+); \qquad y'_{x<\frac{R}{\sqrt{2}}} = (-)(+) = (-).$$

Производная меняет знак с (+) на (-), следовательно, функция при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

и $2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}}.$

Отношение сторон прямоугольника: $\frac{R}{\sqrt{2}} : \frac{2R}{\sqrt{2}} = 1:2.$

Пример 32. Известно, что сопротивление балки на сжатие пропорционально площади сечения. Из круглого бревна диаметра d нужно вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим.

Решение. Если одну из сторон прямоугольника обозначим через x, то другая сторона будет $\sqrt{d^2 - x^2}$. Площадь сечения - переменная величина: $x\sqrt{d^2 - x^2}$.

Обозначив сопротивление балки на сжатие через p, а постоянный коэффициент пропорциональности через r, получим:

$$p = rx\sqrt{d^2 - x^2}\,(0 < x < d).$$

Для упрощения функции примем постоянный коэффициент $r=1$, тогда $p = x\sqrt{d^2 - x^2}$.

Исследуем эту функцию первой производной:

1) $$p' = x'\sqrt{d^2 - x^2} + (\sqrt{d^2 - x^2})'x = \sqrt{d^2 - x^2} + \frac{(-2x)x}{2\sqrt{d^2 - x^2}} = \frac{d^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \frac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}};$$

2) $$p' = \frac{d^2 - 2x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} = 0, \qquad x = \frac{d}{\sqrt{2}};$$

3) $$p' = \frac{2\left(\frac{d^2}{2} - x^2\right)}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \frac{2\left(\frac{d}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{d}{\sqrt{2}} + x\right)}{\sqrt{d^2 - x^2}};$$

$$p'_{x<\frac{d}{\sqrt{2}}} = (+)(+) = (+); \qquad p'_{x>\frac{d}{\sqrt{2}}} = (-)(+) = (-).$$

Производная меняет знак с (+) на (-), следовательно, функция при $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ имеет максимум.

Размеры сечения балки $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$

В сечение балки квадрат со стороной $\frac{d\sqrt{2}}{2}=0{,}707d.$

Пример 33. Известно, что сопротивление горизонтальной балки на изгиб пропорционально произведению ширины сечения на квадрат высоты. Из круглого бревна диаметра d нужно вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы сопротивление на изгиб в горизонтальном положении было наибольшим.

Решение. Пусть ширина балки x, тогда высота будет $\sqrt{d^2-x^2}$. Обозначив сопротивление на изгиб через p и коэффициент пропорциональности через k, получим:

$$p=kx\left(\sqrt{d^2-x^2}\right)^2=kx\left(d^2-x^2\right).$$

Примем постоянный коэффициент $k=1$, тогда $p=x\left(d^2-x^2\right)$ или $p=d^2x-x^3$ $\left(0<x<d\right)$.

Исследуем функцию с помощью второй производной:

1) $p'=d^2-3x^2$; 2) $d^2-3x^2=0$, $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$; 3) $p''=-6x$.

Вторая производная отрицательна, следовательно, при $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум.

Размеры сечения $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$ и $\sqrt{d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}=\sqrt{\frac{2d^2}{3}}=d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Отношение $d\sqrt{\frac{2}{3}}:\frac{d}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

Построение прямоугольника со сторонами $\frac{d}{\sqrt{3}}$ и $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Разделим диаметр AB круга на три равные части (рис. 102). Из точек деления C и D проведем перпендикуляры к AB (по разные стороны AB) до пересечения с окружностью в точках K и L. Докажем, что прямоугольник $AKBL$ искомый. На основании теоремы о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике имеем:

$$AK^2=AC\cdot AB=\frac{1}{3}d\cdot d=\frac{1}{3}d^2;\qquad AK=\frac{d}{\sqrt{3}};$$

$$BK^2=BC\cdot BA=\frac{2}{3}d\cdot d=\frac{2}{3}d^2;\qquad BK=d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Пример 34. Открытый желоб в сечении имеет форму равнобедренной трапеции, основание и боковые стороны которой равны a. Чему равен угол наклона α стенки желоба к его высоте, проведенной из вершины тупого угла, при наибольшей пропускной способности желоба?

Решение. Будем считать, что наибольшая пропускная способность желоба будет при наибольшей площади сечения S:

$S=\dfrac{AB+CD}{2}BF$, $\quad BF=a\cos\alpha$. $\quad FC=a\sin\alpha$, $\quad CD=a+2a\sin\alpha$, тогда

$S=\dfrac{a+a+2a\sin\alpha}{2}a\cos\alpha=a^2(1+\sin\alpha)\cos\alpha=a^2(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)=a^2\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ где $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Исследуем эту функцию на максимум и минимум с помощью второй производной:

1) $S'=a^2(-\sin\alpha+\cos 2\alpha)$;

$$S'=a^2\left[\cos 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=a^2 2\sin\frac{2\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-2\alpha}{2}=$$

$$=2a^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}\right);$$

2) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$; $\quad \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}=0$, откуда $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$, но $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\alpha}{2}\right)=0$;

$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\alpha}{2}=0$, откуда $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $S''=a^2(-\cos\alpha-2\sin 2\alpha)$; $\quad S''_{\alpha=\frac{\pi}{6}}<0$, следовательно, функция имеет максимум при $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

Пример 35. Из всех треугольников, у которых сумма основания и высоты равна a, найти тот, у которого площадь наибольшая.

Решение. Пусть основания треугольника x, тогда высота будет $a-x$. Площадь треугольника – величина переменная; обозначив ее через y, получим:

$$y=\frac{1}{2}x(a-x) \text{ или } y=\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}x^2 \qquad (0<x<a).$$

Исследуем эту функцию с помощью второй производной:

1) $y'=\dfrac{1}{2}a-x$;

2) $\dfrac{1}{2}a-x=0$, $\qquad x=\dfrac{a}{2}$;

3) $y''=-1$.

Вторая производная отрицательна, следовательно, функция при $x=\dfrac{a}{2}$ имеет максимум. Основание треугольника $\dfrac{a}{2}$ и высота треугольника $a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Пример 36. В круг радиуса a вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь?

Решение. Введем обозначения $OC=OA=a$, $OD=x$, $S_{\Delta ABC}=y$, тогда $AD=\sqrt{a^2-x^2}$, $AB=2\sqrt{a^2-x^2}$ и $DC=x+a$, $y=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}(x+a)$ или

$y=(x+a)\cdot\sqrt{a^2-x^2}$, $(0<x<a)$.

Исследуем полученную функцию с помощью первой производной:

1) $y'=(x+a)'\sqrt{a^2-x^2}+\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'(x+a)=\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{-2x(x+a)}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{a^2-x^2-x^2-ax}{\sqrt{a^2-x^2}}=$

$=-\dfrac{2x^2+ax-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

2) $y'=-\dfrac{2x^2+ax-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$; $\qquad 2x^2+ax-a^2=0$.

Корни уравнения $x_1=-a$ и $x_2=\dfrac{a}{2}$;

3) $y'=-\dfrac{2(x+a)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Исследуем только критическое значение $x=\dfrac{a}{2}$, так как $0<x<a$:

$$y'_{x<\frac{a}{2}}=(-)(+)(-)=(+); \qquad y'_{x>\frac{a}{2}}=(-)(+)(+)=(-).$$

Первый знак $(-)$ - знак перед дробью. При $x=\dfrac{a}{2}$ функция имеет максимум. Найдем сторон треугольника при $x=\dfrac{a}{2}$.

$AB=2\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$; $\qquad AC=DC=\sqrt{(AD)^2+(DC)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$.

Треугольник равносторонний.

Пример 37. В треугольник, основание которого a и высота h, вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти стороны этого прямоугольника.

Решение. Введем обозначения $AB=a$, $CD=h$, $DE=x$, $EC=h-x$.

Из подобия треугольников ABC и MNC имеем: $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{EC}{DC}$ или $\dfrac{MN}{a}=\dfrac{h-x}{h}$, откуда $MN=\dfrac{a}{h}(h-x)$. Площадь прямоугольника M_1MNN_1 (обозначим ее через y) будет:

$$y=MN\cdot DE=\frac{a}{h}(h-x)x \text{ или } y=ax-\frac{a}{h}x^2, \qquad (0<x<h).$$

Исследуем эту функцию с помощью второй производной:

1) $y'=a-\dfrac{2a}{h}x$; $\quad$ 2) $y'=a-\dfrac{2a}{h}x=0$, $x=\dfrac{h}{2}$; $\qquad$ 3) $y''=-\dfrac{2a}{h}$.

При $x=\dfrac{h}{2}$ функция имеет максимум, так как $y''<0$. Высота наибольшего прямоугольника равна $\dfrac{h}{2}$ и основание $MN=\dfrac{a}{h}\left(h-\dfrac{h}{2}\right)=\dfrac{a}{h}\cdot\dfrac{h}{2}=\dfrac{a}{2}$. Высота и основание прямоугольника соответственно равны половине высоты и основания треугольника.

Пример 38. Из всех круговых секторов, имеющих данный периметр p, найти сектор с наибольшей площадью.

Решение. $p = 2R + l$, но $l = \alpha R$, где α - радианная мера дуги l, тогда $p = 2R + \alpha R$.

Площадь сектора $S = l\frac{R}{2}$ или $S = \alpha R\frac{R}{2} = \frac{1}{2}R^2\alpha$, но $\alpha = \frac{p-2R}{R}$, тогда

$S = \frac{1}{2}R^2\frac{p-2R}{R} = \frac{1}{2}R(p-2R) = \frac{1}{2}pR - R^2$, ($0 < 2R < p$ или $0 < R < \frac{p}{2}$).

Исследуем функцию с помощью второй производной:

1) $S' = \frac{1}{2}p - 2R$; 2) $\frac{1}{2}p - 2R = 0$, $R = \frac{p}{4}$; 3) $S'' = -2$.

При $R = \frac{p}{4}$ функция имеет максимум.

Вычислим дугу α и площадь S:

$$\alpha = \frac{4R-2R}{R} = 2\,(рад); \qquad S = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{p^2}{16}\cdot 2 = \frac{p^2}{16} = R^2.$$

Пример 39. На какой высоте h надо повесить фонарь над центром круговой площадки радиуса a, чтобы площадки была максимально освещена у ее границы.

Решение. Из курса физики известно, что освещенность E обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения (угла, образованного нормалью к поверхности с направлением светового потока).

$$E = k\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

где k зависит от силы источника света, помещенного в точке A. Из треугольника OAB имеем:

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} \quad \text{и} \quad r = \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Приняв h за независимую переменную, получим:

$$E = k\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}\left(h^2+a^2\right)} = k\frac{h}{\left(h^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (h > 0).$$

Исследуем функцию с помощью первой производной:

$$1)\ E' = k\frac{\left(h^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(h^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h\cdot h}{\left(h^2+a^2\right)^3} = k\frac{\left(h^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(h^2+a^2-3h^2\right)}{\left(h^2+a^2\right)^3} = k\frac{a^2-2h^2}{\left(h^2+a^2\right)^{\frac{5}{2}}};$$

2) $a^2-2h^2=0$; $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$;

3) $E'_{h<\frac{a}{\sqrt{2}}}=(+)(+)=(+)$; $E'_{h>\frac{a}{\sqrt{2}}}=(-)(+)=(-)$.

Производная меняет знак с (+) на (-) следовательно, при $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ функция имеет максимум, т. е. при значении $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$=0,7*a* освещенность в точке *B* будет наибольшей.

Пример 40. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $s=-t^3+9t^2-24t-8$. Найти максимальную скорость движения тела.

Решение. Скорость движение тела есть первая производная от пути по времени $\upsilon=s'=-3t^2+18t-24$.

Имеем функцию $\upsilon=-3t^2+18t-24$. Исследуем ее на максимум и минимум с помощью второй производной:

1) $\upsilon'=-6t+18$; 2) $-6t+18=0$, $t=3$; 3) $\upsilon''=-6$.

Вторая производная отрицательна, следовательно, скорость будет наибольшей при $t=3c$.

$$\upsilon_{t=3}=-3\cdot 3^2+18\cdot 3-24=3(м/с)$$

Пример 41. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением

$s=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2$. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение. Скорость движения тела, брошенного вертикально вверх, в наивысшей точке подъема равен нулю, следовательно, $\upsilon=s'=\upsilon_0-gt=0$, откуда $t=\frac{\upsilon_0}{g}$.

Исследуем данную функцию: 1) $s'=\upsilon_0-gt$; 2) $\upsilon_0-gt=0$, $t=\frac{\upsilon_0}{g}$; 3) $s'=g\left(\frac{\upsilon_0}{g}-t\right)$;

$s'_{t<\frac{\upsilon_0}{g}}=(+)$; $s'_{t>\frac{\upsilon_0}{g}}=(-)$.

Функция меняет знак с *(+)* на *(-)*, следовательно, при $t=\frac{\upsilon_0}{g}$ она имеет максимальное значение.

Найдем величину *s* при $t=\frac{\upsilon_0}{g}$.

$$s=\upsilon_0\frac{\upsilon_0}{g}-\frac{1}{2}g\frac{\upsilon_0^2}{g^2}=\frac{\upsilon_0^2}{2g}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Разбить число 24 на два слагаемых, произведение которых будет наибольшим.

2. Разбить число 6 на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3. Разбить число 9 на два положительных сомножителя, сумма которых будет наименьшей.

4. Из куска проволоки длиной в 50 см согнуть прямоугольник наибольшей площади.

5. Какой из прямоугольников с периметром 16 см имеет наименьшую диагональ?

6. Из листа бумаги вырезать прямоугольника был наименьшим.

7. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса R, найти тот, который имеет наибольший периметр.

8. В полукруг радиуса R вписать прямоугольник наибольшего периметра.

9. Открытый желоб в сечении имеет прямоугольник. Периметр сечения равен a. При каком отношении ширины и высоты желоб будет в сечении иметь наибольшую площадь?

10. Из всех прямоугольных треугольников, с гипотенузой a найти треугольник наибольшей площади.

11. В круг радиусом a вписан прямоугольный треугольник. При каком отношении катетов треугольник будет иметь наибольшую площадь?

12. В равнобедренный треугольник вписать прямоугольник наибольшей площади.

13. Из всех круговых секторов, имеющих данную площадь, найти сектор с наименьшим периметром.

14. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая.

15. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S=-t^3+3t^2+9t+3$. Найти максимальную скорость движения тела.

16. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $S=19{,}6\,t-4{,}9t^2$. Найти наибольшую высоту и объем тела.(s в м, t в с.)

§ 6. Выпуклость и вогнутость кривой

Дуга кривой $y=f(x)$ в интервале (a, b) называется *вогнутой*, если она лежит выше касательной в любой точке этого интервала.

Дуга кривой $y=f(x)$ в интеграле (a, b) называется *выпуклой*, если она лежит ниже касательной в любой точке этого интервала.

Признаки выпуклости и вогнутости кривой:

Если вторая производная функции *y= f(x)* для значений аргумента x в интервале *(a, b)* положительна, то кривая вогнута в этом интервале, а если отрицательна, то выпукла.

Правило исследования на выпуклость и вогнутость кривой y=f(x):

1. Найти вторую производную от данной функции *y= f(x):* $y'' = f''(x)$.

2. Положить вторую производную меньшей нуля $f''(x) < 0$. Решить неравенство $f''(x) < 0$ относительно x и найти интервалы, в которых кривая *y= f(x)* выпукла.

3. Положить вторую производную большей нуля $f''(x) > 0$. Решить неравенство $f''(x) > 0$ относительно x и найти интервалы, в которых кривая вогнута.

Пример 42. Исследователь на выпуклость и вогнутость кривую $\boldsymbol{y=x^3}$.

Решение. 1) $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$; 2) $6x<0$, $x<0$ $(-\infty,0)$; в этом интервале кривая $y=x^3$ выпукла; 3) $6x>0$, $x>0$ $(0,+\infty)$; в этом интервале кривая $y=x^3$ вогнута.

Пример 43. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривую $y = \dfrac{1}{x}$ в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$.

Решение. 1) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$; $y'' = \dfrac{1}{x^4} \cdot 2x = \dfrac{2}{x^3}$;

2) подставив во вторую производную данные значения аргумента, найдем знак второй производной:

$$y''_{x=-2} = \frac{2}{(-2)^3} = -\frac{2}{8} \prec 0,$$

следовательно, в точке $x=-2$ кривая выпукла:

$$y''_{x=1} = \frac{2}{13} \succ 0,$$

тогда в точке $x=1$ кривая вогнута.

Пример 44. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой $\boldsymbol{y=x^4-2x^3+6x-4}$.

Решение. Найдем вторую производную $y' = 4x^3-6x^2+6$, $y'' = 12x^2-12x$. Решим неравенство $12x^2-12x<0$, $x^2-x<0$.

D=1>0. Корни уравнения $x^2-x=0$, $x_1=0$, $x_2=1$. Неравенство справедливо при всех действительных значениях x в интервале (0,1).

Кривая в интервале (0,1) выпукла. Решим неравенство $x^2-x>0$. Неравенство справедливо при всех действительных значениях x в интервалах $(-\infty,0)$ и $(1, +\infty)$. В этих интервалах кривая вогнута.

Пример 45. Исследовать функцию $y=\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)$ по следующей схеме:

1. Найти области определения функции и точки пересечения с осями координат. Определить знаков постоянства функции.
2. Исследовать функцию на непрерывность, а также поведение функции на концах интервала и около точки разрыва.
3. Установить четности или нечетности функции.
4. Определить интервалов возрастания и убывания функции, а также точек экстремума.
5. Найти интервалов выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба кривой.
6. Найти асимптоты кривой.
7. Построить график функции.

1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, т.е. $D(f)$: $\{x\in(-\infty;+\infty)\}$.

При пересечении графика с осью Ox функция меняет свой знак. Поэтому устанавливаем знаки постоянства функции. Для трансцендентных и кубических функций не обязательно нахождение точек пересечения графика функции с осью Ox, т.к. нахождение точки пересечения представляет собой трудность технического характера.

Найдем точку пересечения графика с осью Oy. Абсциссы точек, лежащих на оси Oy равны нулю, т.е. $x=0$. Тогда

$$y=\frac{1}{4}\left(0^3+9\cdot 0^2+15\cdot 0-9\right)=-\frac{9}{4}=-2{,}25$$

$A_1(0;2{,}25)$ - точка пересечения графика функции с осью Oy.

2. Данная функция непрерывна в своей области определения на интервале $(-\infty;+\infty)$, следовательно, функция не имеет точек разрыва. Устанавливаем поведение функции на концах интервала

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}=\left(x^3+9x^2+15x-9\right)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}=\left(x^3+9x^2+15x-9\right)=-\infty$$

3. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.

$$f(-x)=\frac{1}{4}\left[(-x)^3+9(-x)^2+15(-x)-9\right]=\frac{1}{4}\left(-x^3+9x^2-15x-9\right)=-\frac{1}{4}\left(x^3-9x^2+15x+9\right),$$

поэтому $f(-x)\neq -f(x)$; $\qquad f(-x)\neq f(x)$.

4. Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью используем необходимые условия существование экстремума. Для этого находим первую производную и приравняем ее к нулю

$$y'=\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)'=\frac{1}{4}\left(3x^2+18x+15\right)=0,$$

или сокращая на $\frac{3}{4}$ получаем

$$x^2+6x+5=0$$

Решая это квадратное уравнение, находим корни $x_1=-5$; $x_2=-1$. Таким образом, функция имеет две критические точки, которые разбивают числовую ось на три интервала, и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума

x	$(-\infty;-5)$	-5	$(-5;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max}=y(-5)=\frac{1}{4}\left[(-5)^3+9\cdot(-5)^2+15\cdot(-5)-9\right]=4,$$

значит $A_1(-5;4)$ - точка max.

$$y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^3+9\cdot(-1)^2+15\cdot(-1)-9\right]=-4,$$

значит $A_2(-1;-4)$ - точка min.

5. Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

$$y''=\frac{1}{4}(6x+18); \quad \frac{1}{4}(6x+18)=0; \quad x+3=0; \quad x=-3.$$

Итак, область определения функции точкой $x=-3$ разбивается на интервалы, в каждой из которых установим знак второй производной

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;+\infty)$
$f''(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Точка перегиба	$\cup$

$$y(-3)=\frac{1}{4}\left[(-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9\right]=0;$$

$P(-3;0)$ - является точкой перегиба.

6. У графика заданной функции вертикальная асимптота отсутствует, т.к. нет точек разрыва. Для определения параметров уравнения наклонной асимптоты $y=\kappa x+в$ воспользуемся формулами

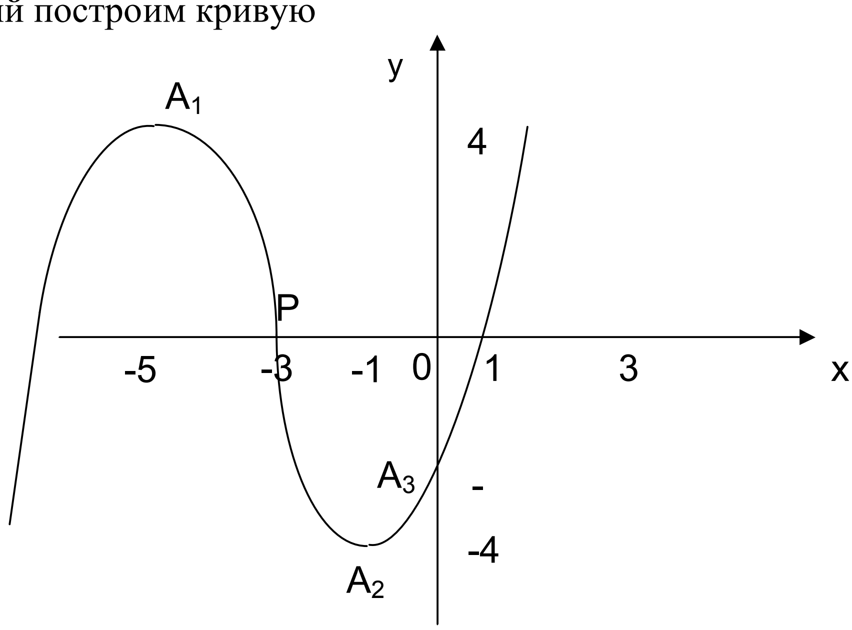
$$\kappa=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Отсюда имеем

$$\kappa = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(x^3 + 9x^2 + 15x - 9\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\left(x^2 + 9x + 15 - \frac{9}{x}\right) = \infty .$$

Данная функция наклонных асимптот не имеет.

7. Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки: максимума $A_1(-5;4)$, минимума $A_2(-1;-4)$, перегиба $P(-3;0)$ и точку пересечения графика с осью Oy $A_3\left(0;-\frac{9}{4}\right)$. С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую



Пример 46. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$

1. Область определения $D(f)$: $\{x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)\}$.
2. Функция терпит разрыв при $x = 2$. При всех других значениях аргумента она непрерывна.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.

$$y(-x) = \frac{\left[(-x)^2 + (-x) - 5\right]}{(-x) - 2} = -\frac{x^2 - x - 5}{x + 2},$$

$$y(-x) \neq y(x) \text{ и } y(-x) \neq -y(x)$$

4. Исследуем функцию на экстремум. Для этого используем необходимое условие экстремума

$$y' = \frac{(2x+1)(x-2) - \left(x^2 + x - 5\right)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

Отсюда следует, что $(x-1)(x-3) = 0$ и $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ - являются стационарными точками

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;+\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	Не сущ.	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

$y(1)=3$, $y(3)=7$. Следовательно $A(1;3)$ - точка максимума, $B(3;7)$ - точка минимума.

5. Для того, чтобы найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)(x-2)^2}{(x-2)^4}=\frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-6}{(x-2)^3}=\frac{2}{(x-2)^3}.$$

Как видно вторая производная ни при каком значении аргумента не обращается в нуль. Следовательно, график исследуемой функции не имеет точек перегиба.

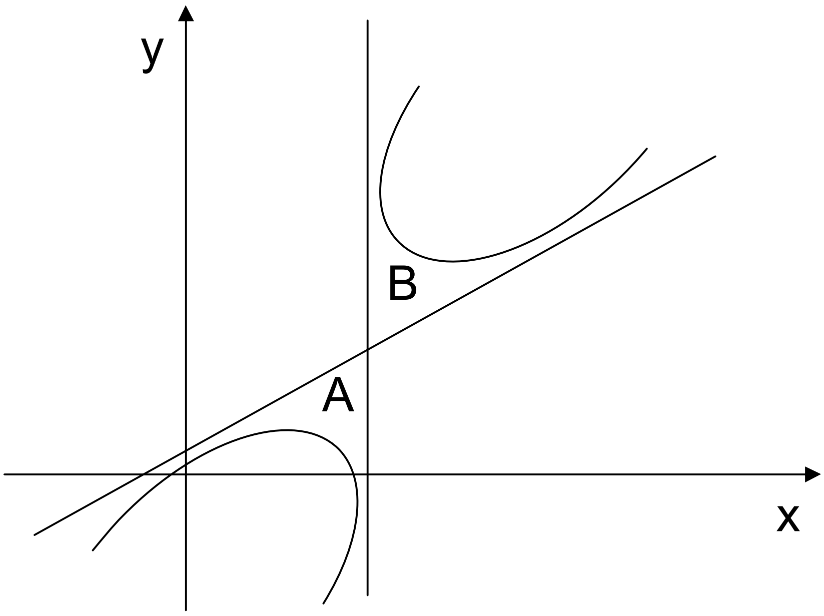
6. Определим асимптоты графика функции.

$x=2$ есть уравнение вертикальной асимптоты, т.к. $\lim\limits_{x\to 2} y=\infty$. Теперь найдем наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид $y=kx+b$, где

$$к=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-5}{x(x-2)}=1, \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+x-5}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x-2}=3.$$

Следовательно, $y=x+3$ - будет уравнением наклонной асимптоты.

7.Построим график функции.



Примеры для самостоятельного решения

1. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривые:

1) $y=2x^3$;

2) $y=x^2$;

3) $y=-x^2-1$;

4) $y=x^2+3x-1$.

2. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривые:

1) $y=-\dfrac{1}{x}$ в точках $x_1=-1$ и $x_2=2$,

2) $y=\frac{1}{x}$ в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$.

3. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривых;

1) $y=x^3-6x^2-2x-6$;

2) $y=x^4-2x^3-12x^2+24x+8$.

4. Исследовать заданные функции по схеме:

1. $y=2x^3-9x^2+12x-5$
2. $y=x^3-6x^2+9x+2$
3. $y=x^3-3x^2-9x+10$
4. $y=x^3+3x^2-9x-10$
5. $y=x^3+6x^2+9x+2$
6. $y=2x^3-3x^2-12x+5$
7. $y=2x^3+3x^2-12x-8$
8. $y=2x^3+9x^2+12x+7$
9. $y=2x^3-15x^2+36x-32$
10. $y=2x^3-3x^2-36x+20$

§ 7. Смешанные задачи

Пример 47. Разбить число 5 на два слагаемых, сумма кубов которых будет наименьшей.

Пример 48. Разность двух чисел равна а. Каковы эти числа , если их произведение будет наименьшем.

Пример 49. Вычислить наименьший периметр треугольника, площадь которого равна 12 и основание равно 6.

Пример 50. Определить размеры открытого ящика (без крышки) с квадратным дном наибольшего объема, если общая поверхность боковых стенок и дна равна S.

Пример 51. Найти радиус основания и высоту цилиндрического бака (без крышки) наибольшего объема при заданной поверхности S .

Пример 52. Из всех цилиндров с данной полной поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший.

Пример 53. Каналы шириной 27 и 64 м построены под прямым углом друг к другу. Какую наибольшую длину может иметь судно, чтобы выйти из одного канала в другой?

Пример 54. Открытый круговой цилиндрический желоб изготовляется из полосы жести шириной a сантиметров. При каком центральном угле α объем желоба будет наибольшим?

Пример 55. Расстояние между речными пристанями А и В равно 144 км. Пристань С находится между пристанями А и В на расстоянии 81 км от В. Катер пройдя путь по течению от пристани А до пристани В вернулся на пристань С. Какова скорость течения реки, если катер прошел путь АВС в кратчайшее время при его средней скорости 35км /ч?

Пример 56. Для следующих функций 1) $y=x^3+6x^2+9x+86;$ 2) $y=2x^2-3x^2-12x-1$; 3) $y=x^3-6x^2+16;$ 4) $y=2x^3+3x^2-12x-10$ найти: а) интервалы возрастания и убывания; б) максимум и минимум; в) интервалы выпуклости и вогнутости; г) точку перегиба.

Контрольная работа

I вариант

1. Найти:

1) интервал возрастания и убывания функции $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+1$;

2) наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{3}$ на отрезке $[-2,2]$.

2. Исследовать кривую:

3) $y=x^3+3x^2$ на выпуклость и вогнутость;

4) $y=\frac{1}{3}x^3-4x$ на точки перегиба.

3. Дан закон прямолинейного движения точки $S=-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1$. Найти максимальную скорость движения этой точки (t в с, s в м).

4. Исследовать заданные функции по схеме:

1. $y=2x^3+3x^2-36x-21$
2. $y=2x^3+15x^2+36x+32$
3. $y=2x^3-15x^2+24x+4$
4. $y=2x^3-9x^2-24x+61$
5. $y=2x^3+9x^2-24x-56$
6. $y=2x^3+15x^2+24x-2$
7. $y=x^3-9x^2+24x-18$
8. $y=x^3-3x^2-24x+26$
9. $y=x^3+3x^2-24x-21$
10. $y=x^3+9x^2+24x+17$

II вариант

1. Найти:

1) интервал возрастания и убывания функции $y=x^4-4x+4$;

2) наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$ на отрезке $[-4,2]$.

2. Исследовать кривую:

3) $y=x^3-12x^2+1$ на выпуклость и вогнутость;

4) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}$ на точки перегиба.

3. Дан закон прямолинейного движения точки $S=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+5t+3$. Найти максимальную скорость движения этой точки (t в с, s в м).

4. Исследовать заданные функции по схеме:

1. $y=\frac{1}{2}x^3+3x^2-7$
2. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10$
3. $y=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$
4. $y=\frac{1}{5}x^3-\frac{9}{5}x^2+3x+3$

5. $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

6. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 1$

7. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$

8. $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + 3x - 6$

9. $y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4$

10. $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{2}x + 2$

Литература

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по высшей математике. ВС. 1973.
2. Шипачев С. Высшая математика. ВС. 1985.
3. Каплан И.А. Практикум по высшей математике, т-1. М., 2006.
4. Абласов К.Дж. и др. Сборник модульных задач по высшей математике. Б. 2003.

Математика
Методическое руководство по организации самостоятельной работы и контрольные задания по разделу «Полное исследование функции одной переменной»
для студентов 1-курса колледжа

Составители: ***Алдакенова Ж.Б., Абдыкадырова Г.М.***

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 28.03.2011 г. Формат бумаги 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 2 п.л. Тираж 20 экз. Заказ 261. Цена 36,3 сом.

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ "Текник" КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru