УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

ДЖАКЫПБЕКОВ К.ДЖ
izvestiya@ktu.aknet.kg

Ключевые слова: Алгоритм, моделирование, программирование, электронно – вычислительная машина, дифференциальные уравнение.

Аннотация: В данной статье рассматриваются некоторые тенденции развития математического моделирования. Проведены анализ моделей, их систематизация и выявление некоторых классов информационных технологий.

Математическое моделирование как новый способ исследования и получения новых знаний сформировалось в 70-х годах прошлого столетия на основе широкого применения математических методов для решения теоретических и практических проблем естествознания, экономики, экологии и т.д. Стимулом к его созданию и развитию послужило появление электронно-вычислительных машин, способных производить арифметические и логические вычисления со скоростью, недоступной для отдельных человеческих индивидуумов и их технике и народном хозяйстве, потребовала разработки и обоснования математических моделей, отражающих основные закономерности исследуемых явлений, и создания эффективных численных алгоритмов их решения. В свою очередь реализация этих алгоритмов на ЭВМ привела к созданию новых языков программирования, операционных систем и разработке новых подходов в программировании и информационных технологиях. Такой взаимосвязанный процесс разработки математических моделей, численных алгоритмов, программирования, создания комплексов и пакетов программ для решения на ЭВМ этих задач, их анализа, хранения и вывода результатов-расчетов послужил основой нового научного направления в исследованиях математического моделирования.

Появившись как новое направление исследований, математическое моделирование породило и свои проблемы, от решения которых и зависит его развитие. Математические модели и алгоритмы, программы и комплексы программ, ЭВМ и системы поддержки для решения задач являются элементами моделирования. Их роль и место могут быть правильно оценены лишь в рамках всей цепочки моделирования, которую назовем технологической. Под технологической цепочкой моделирования будем понимать совокупность ее элементов, выполняемых в определенной последовательности и составляющих полный цикл. Разумеется, для различных областей исследования эти элементы могут отличаться, поэтому за основу технологической цепочки должны быть выбраны общие для всех областей моделирования элементы. Тогда процесс моделирования может быть представлен в виде такой последовательности: исследуемое явление − математические − численные алгоритмы − программирование − ЭВМ – расчеты-результаты и их анализ, дополняющий известную триаду математического моделирования − модель − алгоритм −программа.

Очевидно, все элементы технологической цепочки взаимосвязаны, и эта связь нелинейна, а изменение в одном из элементов может привести к изменению не только последующих, но и предыдущих элементов. Вначале моделирования исследователь явно или неявно проводит анализ всей цепочки, исходя из знании об исследуемом явлении, наличия ресурсов, возможностей ЭВМ и т.д. Конечно, для различных классов исследуемых задач отдельные элементы цепочки могут быть опущены. Стремление получить ЭВМ с максимальной производительностью привело разработчиков ЭВМ к созданию многопроцессорных и параллельных ЭВМ. Разработка новых параллельных алгоритмов в свою очередь может повлиять и на выбор модели.

Сегодня с полным правом можно утверждать, что математическое моделирование наряду с физическим и натурным экспериментами является основным способом исследования и получения новых знаний в различных областях естествознания, экономики, экологии и т.д. Можно ожидать, что его роль возрастет, так как оно всегда остается основой исследования. При изучении явления следует ожидать сближения различных форм исследования, взаимно дополняющих друг друга.

Широкое внедрение результатов математического моделирования с использованием информационных технологий в различных областях развития человеческого общества, науки и техники, естествознания обусловлено многими факторами, основными из которых являются:

- усложнение класса исследуемых задач, для изучения которых необходимо создание новых дорогостоящих экспериментальных установок или модельных установок;
- большая стоимость обслуживания экспериментальных установок и объектов и высокие энергетические затраты на их работу и обслуживание;
- необходимость решения экологических, социальных других проблем при их эксплуатации;
- возможность проведения физического (химического, экономического и т.д.) или натурного моделирования в ряде областей исследования;
- сокращение сроков исследования и получение результатов, возможность его многократного и быстрого повторения или изучения, хранения и т. д.

Развитие математического моделирования приводит к созданию автоматизированных систем для управления производством, что позволит резко увеличить производительность труда и избежать субъективного влияния «человеческого» фактора при принятии решений.

Таким образом, сегодня математическое моделирование становится основным способом исследования и получения новых знаний. С другой стороны, результаты математического моделирования могут стать и становятся основой для широкого применения их в производстве и других областях человеческой деятельности.

Ниже рассматриваются некоторые тенденции развития математического моделирования. Понимая, что охватить все области его применения невозможно, ниже будет сделан акцент на задачах механики сплошной среды. В этой области исследования математическое моделирование получило наибольшее распространение как в силу невозможности получения решений на основе других подходов, так и в силу важности этого класса задач для развития производства. Как отмечалось выше, эффективность математического моделирования может быть правильно оценена при помощи технологической цепочки. Поэтому при рассмотрении ее проблем тенденций остановимся на анализе состояния и развития ее отдельных элементов и их взаимодействии. Главное внимание будет уделено этапам выбора моделей и численных алгоритмов.

Для задач механики сплошных сред в наиболее полной постановке физико-математические модели могут быть описаны интегральными законами сохранения, выражающими связь между изменениями во времени в замкнутом объеме V некоторых величин (потоков), их изменениями через границы S и взаимодействием **с** внешними источниками (стоками). Интегральные законы сохранения (например, массы, импульсов и энергии для моделей сплошной среды) являются наиболее общей формой описания движения сред, и они справедливы как для непрерывных, так и разрывных решений. Наряду с интегральной формой используется и их дифференциальное представление, полученное из (1), но справедливо лишь для непрерывных функций.

Многообразие и многопараметричность исследуемых задач и их приближенных математических постановок, разномасштабность процессов приводят нас к цепочке физико-математических моделей, каждая их которых получена при определенных предположениях о характере изучаемого явления и описывает основные его закономерности. Характерной особенностью такого подхода является и многообразие уравнений, описывающих эти модели. Полученные уравнения могут принадлежать к различным типам (гиперболическим, параболическим, эллиптическим или уравнениям переменного типа), что приводит к различной постановке начальных и краевых задач.

Более того, при исследовании одного класса задач тип уравнения может меняться в зависимости от характера решения. Так, например, стационарные уравнения газовой динамики являются уравнениями эллиптического типа для дозвуковых и гиперболического типа для сверхзвуковых скоростей, поэтому в отдельных подобластях расчетной области необходимо решать уравнения различных типов. Естественно, что это накладывает дополнительные требования на применяемые численные методы. Большинство процессов в механике жидкости, газа и плазмы являются нелинейными и эволюционными, и, как следствие, эти же свойства присущи описываемым ими системам уравнений. Теория таких уравнений изучена недостаточно, для большинства задач не доказаны теоремы существования и единственности, и, более того, их решения могут быть неединственными и разрывными даже при гладких начальных данных. Переход к многомерным задачам и усложнение расчетных областей (рассмотрение реальных геометрий) вносят дополнительные трудности их постановок. При отсутствии строгих доказательств существования и единственности решений всегда остается вопрос о соответствии физико-математической модели исследуемому явлению. При недостаточной информации об исследуемом процессе возникает необходимость рассмотрения спектра моделей, учитывающих основные закономерности изучаемого явления при различных диапазонах изменения основных параметров. Таким образом, выбор и формулировка физико-математических моделей становятся многопараметрической задачей, требующей своего анализа всей цепочки моделей. С другой стороны, выбор и обоснование физико-математических моделей зависят от ряда факторов, выходящих за данный этап моделирования. До начала моделирования исследователь должен ответить на ряд вопросов. Например, какова конечная цель исследования и какие данные мы должны получить, решив эту задачу? Насколько важна данная задача и каково ее место в общей проблеме? Какова точность модели, с какой точностью требуется получить ответ? Какие ресурсы необходимо привлечь для решения задачи и какие математические и технологические возможности имеются у исследователя? Фактически исследователь проводит анализ всей технологической цепочки моделирования, на основании которого и делает вывод о возможности решения задачи или проблемы на основе существующих моделей, численных алгоритмов и технических средств или формулирует условия и требования, необходимые для ее разрешения. Это могут быть требования к созданию дополнительных моделей и численных методов решения. Выбор моделей, адекватно описывающих исследуемое явление или изучаемый процесс, включает их математическое обоснование и корректную постановку начально-краевых задач. По современным представлениям для задач механики и физики все классы моделей могут быть условно разделены на четыре группы (уровни):

1) аналитические приближения и линеаризованные уравнения;
2) линейные уравнения без учета диссипативных процессов;
3) нелинейные уравнения без учета диссипативных процессов;
4) полные нестационарные модели, описываемые с учетом реальных эффектов, как, например, уравнения Навье-Стокса сжимаемого и теплопроводного газа, уравнения многокомпонентных и многофазных сред, магнитогидродинамических моделей различного уровня и т.д.

Сегодня в зависимости от целей исследования и классов решаемых задач, важности задачи в общей проблеме, необходимой точности решения, имеющихся математических и технических возможностей исследователей и других факторов используются все группы моделей, начиная от простейших (1 -й уровень) до самых полных (3-4-й уровень). Обратимся к некоторым примерам из области вычислительной аэродинамики. В приближении потенциального течения (1-й уровень) панельным методом удается получать решения задач обтекания самолетов реальных конфигураций и распределения параметров течения на его поверхности. Первые такие расчеты были выполнены в 70-х годах прошлого столетия на ЭВМ малой производительности. Однако эта модель не учитывает реальные эффекты в газе, например сжимаемость, вязкость и теплопроводность, и не позволяет получить распределения газодинамических потоков около тела. Переход к большим скоростям потребует использования нелинейных моделей, описываемых уравнениями газовой динамики (2-й уровень). Их решение может включать разрывы газодинамических величин, требует специальных методов расчета и ЭВМ большой производительности.

С появлением ЭВМ высокой производительности в 80-е годы расчет обтекания сверхзвукового самолета в приближении уравнений Эйлера мог быть проведен за время, сравнимое со временем его полета. Однако и сегодня решать задачу нестационарного обтекания с учетом реальных свойств газа, таких как турбулентная вязкость и теплопроводность (3-4-й уровень), удается лишь для модельных летательных аппаратов даже с использованием современных супер-ЭВМ. Эти сложности связаны не только с большими затратами ЭВМ, с многопараметичностью задачи (различные числа Маха, Рейнольдса, геометрии обтекаемых тел и т.д.), но и в первую очередь с недостаточным обоснованием математических моделей (например, моделей турбулентности и областей их применимости) и их замыкающих соотношений. Подобные трудности возникают и в области гиперзвуковой аэродинамики, где наряду с решением отмеченных выше проблем необходимо правильно учесть и оценить влияние химических реакций, протекающих в газе около обтекаемого тела и на его поверхности при больших температурах, оценить разрушение поверхности и учесть прочностные и другие характеристики.

Конечно, при решении других задач в рамках различных приближений возникают свои проблемы, успешное решение которых определяет прогресс в развитии математического моделирования. Многопараметричность и разномасштабность исследуемых задач, их нелинейность и многомерность не позволяют сформулировать общие исследования и основные тенденции развития, которые включают:

- использование моделей всех уровней в зависимости от целей исследования;
- применение все более сложных моделей с целью учета большего числа реальных физических эффектов исследуемых явлений;
- анализ моделей, их систематизацию и выявление некоторых классов общих моделей, пригодных для описания широкого комплекса проблем;
- дальнейшее математическое обоснование физико-математических моделей и корректных постановок начально-краевых задач.

Отметим, что упрощенные модели получают, как правило, из моделей более высокого уровня при различных предложениях о характере исследуемого явления. Таким образом, взяв за основу более полную модель, можно получить из нее цепочку упрощенных моделей. Такие полные модели, из которых могут быть получены их упрощенные приближения, будем называть накрывающими моделями. Ярким примером такого подхода служит модель, описываемая уравнениями Навье-Стокса сжимаемого теплопроводного газа (модель 4-й группы). При пренебрежении эффектами вязкости и теплопроводности получаем модель газовой динамики, справедливую для описания многих физических задач. Для сильно вязких течений может быть использовано приближение пограничного слоя, полученное из уравнения Навье-Стокса при сохранении членов порядка 0(1/Vile) и пренебрежении членами более высокого порядка малости. В рамках этого же подхода получают модели вязкого ударного слоя, модели «параболизованных» уравнений Навье-Стокса и т.д. Можно ожидать, что и для других классов физико-математических моделей могут быть построены цепочки упрощенных моделей на основе базовой накрывающей модели.

Литература

1.*Замков О. О. Толстопятенко А. В. Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике. Учебник . –М.: «ДИС», 1997 г.
2. Информационные технологии. Учебное пособие/Под ред. А. К. Волкова. − М.: «Инфра-М», 2001 г.