УДК 532.546

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД

ШАМЫРКАНОВ М. Б.

кафедра прикладной математики Иссык-Кульского государственного университета им. К.Тыныстанова, г.Каракол, Кыргызская Республика

izvestiya@ktu.aknet.kg

STATIONARY TASK OF OPTIMUM CONTROL OF A LEVEL OF EARTH WATERS

SHAMYRKANOV M.B.

Kyrgyz Republic, Issykkul states university by K.Tynystanov, faculty of applied mathematics

izvestiya@ktu.aknet.kg

Разработан алгоритм нахождения оптимального управления уровнем грунтовых вод, описываемый уравнением Буссинеска.

The algorithm of a presence of optimum control is developed by a level of the subsoil waters described by equation Bussinesk.

Одной из основных задач мелиорации является обеспечение влагой корневой системы сельскохозяйственных культур. При близком залегании грунтовых вод к поверхности земли эту задачу можно решить путем поддержания уровня грунтовых вод в заданном режиме.

Движение грунтовых вод в верхнем покровном слое земли в стационарном режиме описывается уравнением Буссинеска [1]

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[k_{\hat{a}}(h-b)\frac{\partial h}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[k_{\hat{a}}(h-b)\frac{\partial h}{\partial y}\right]+q\,h=f(x,y),\quad (x,y)\in D \qquad (1)$$

с граничным условием

$$k_{в}(h-b)\frac{\partial h}{\partial n}+\beta\,h=\alpha,\quad (x,y)\in S, \qquad (2)$$

где $h=h(x,y)$ – уровень грунтовых вод; $k_{в}=k_{в}(x,y)$ – коэффициент фильтрации покровного слоя; $b=b(x,y)$ – поверхность раздела между покровным слоем и подстилающей его слабопроницаемой прослойкой; $f(x,y)$ – функция инфильтрации; $q=q(x,y)$ – функция, учитывающая переток из нижележащего напорного водоносного горизонта (если переток отсутствует, то $q=0$); $\alpha=\alpha(x,y)$ и $\beta=\beta(x,y)$ – заданные функции; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к границе области фильтрации; D – область фильтрации в плане, $S=\partial D$ – граница области D.

Управление уровнем грунтовых вод производится путем проведения поливов (при низком залегании грунтовых вод) или осушительных мероприятий (при высоком залегании). В математической модели фильтрации (1) эти мероприятия осуществляются функцией $f(x,y)$. Тогда задача оптимального управления уровнем грунтовых вод ставится следующим образом.

Требуется найти функцию $f(x,y)$, доставляющую минимум функционалу [2]

$$I(f)=\iint\limits_D\left[h(x,y;f)-\varphi(x,y)\right]^2dx\,dy+\alpha\iint\limits_D f^2(x,y)dx\,dy, \qquad (3)$$

где $\varphi(x,y)$ – заданные уровни грунтовых вод; α – параметр регуляризации; $h(x,y;f)$ – расчетные значения уровня грунтовых вод, получаемые решением задачи (1), (2) при изменении инфильтрации $f(x,y)$.

При численном решении задачи (1), (2) значения функции $h(x, y; f)$ получаются в дискретном множестве точек, т.е. в узлах расчетной сетки. Поэтому в практических расчетах пользуемся дискретным аналогом формулы (3):

$$J(f) = \sum_{k=1}^{n} \left[h(x_k, y_k; f_k) - \varphi(x_k, y_k) \right]^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \quad . \qquad (4)$$

В общем случае зависимость функции $h(x, y; f)$ от управления $f(x, y)$ нелинейная, поэтому линеаризуем функцию $f\,(x, y; f)$ следующем образом:

$$h(x, y; f) = \widetilde{h} + \sum_{j=1}^{n} \left(f_j - \widetilde{f}_j \right) \frac{\partial h}{\partial f_j} + R_2(\Delta f), \qquad (5)$$

где $\widetilde{f}$ – значения функции f, полученные в предыдущей итерации; $\widetilde{h}$ – соответствующие им значения уровней грунтовых вод; $\Delta f = f - \widetilde{f}$.

Подставим выражение для функции h из (5) в формулу (4):

$$J(f) \approx \sum_{k=1}^{n} \left[\widetilde{h}_k + \sum_{j=1}^{n} \left(f_j - \widetilde{f}_j \right) \frac{\partial h_k}{\partial f_j} - \varphi_k \right]^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n} \left(f_k - \widetilde{f}_k \right)^2$$

и к функции многих переменных $J(f)$ применим необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial J(f)}{\partial f_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n .$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\widetilde{h}_k + \sum_{j=1}^{n} \left(f_j - \widetilde{f}_j \right) \frac{\partial h_k}{\partial f_j} - \varphi_k \right] \frac{\partial h_k}{\partial f_i} + \alpha \left(f_i - \widetilde{f}_i \right) = 0 \ , \quad i = 1, 2, ..., n . \qquad (6)$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений (6) запишем относительно $\Delta f_j = f_j - \widetilde{f}_j$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \Delta f_j = b_i , \quad i = 1, 2, ..., n , \qquad (7)$$

где

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_k}{\partial f_i} \frac{\partial h_k}{\partial f_j}, \qquad i \neq j, \qquad\qquad a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h_k}{\partial f_i} \right)^2 + \alpha , \qquad i = j ,$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi_k - \widetilde{h}_k \right) \frac{\partial h_k}{\partial f_i} .$$

После решения системы (7) составляем следующее приближение управления:

$$f(x_i, y_i) = \widetilde{f}(x_i, y_i) + \Delta f(x_i, y_i), \qquad i = 1, 2, ..., n . \qquad (8)$$

Для проведения расчетов по описанному алгоритму в качестве начальных приближений уровней грунтовых вод и инфильтрации берем их существующие состояния. Затем придаем функции $f(x, y)$ приращения, пропорциональные разности $\varphi(x, y) - h(x, y)$, вычисляем матрицу производных $\left(\dfrac{\partial h}{\partial f} \right)$ и, решив систему (7), находим $\Delta f(x, y)$ и по формуле (8) определяем новое приближение управления. Для каждого следующего приближения управления вычисляем соответствующие значения уровней грунтовых вод. Признаком окончания счета является выполнение условия

$$\max_i \left| h_i - \varphi_i \right| < \varepsilon , \quad i = 1, 2, ..., n ,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданное малое число.

Теперь остановимся на решении задачи (1), (2). Введем обозначение

$$T(x, y) = k_{\hat{a}} \left(h^{(0)} - b \right), \qquad (9)$$

где $h^{(0)}$ – начальное приближение уровней грунтовых вод, так что задача (1), (2) становится линейной. Решаем её методом конечных элементов [3]. Область фильтрации D разбивается на треугольные элементы, и внутри элемента *(е)* функция $h(x,y)$ представляется в виде

$$h^{(e)}(x,y)=N_i^{(e)}(x,y)h_i+N_j^{(e)}(x,y)h_j+N_k^{(e)}(x,y)h_k\ , \qquad (10)$$

где $h_r=h(x_r,y_r)$, $(r=i,j,k)$ – узловые значения искомой функции; $N_r(x,y)$ – линейные базисные функции:

$$N_i^{(e)}(x,y)=\left(a_i^{(e)}+в_i^{(e)}x+c_i^{(e)}y\right)/\Delta_e\,,\qquad N_j^{(e)}(x,y)=\left(a_j^{(e)}+в_j^{(e)}x+c_j^{(e)}y\right)/\Delta_e\,,$$

$$N_k^{(e)}(x,y)=\left(a_k^{(e)}+в_k^{(e)}x+c_k^{(e)}y\right)/\Delta_e\,,$$

$$a_i^{(e)}=x_j\,y_k-x_k\,y_j\,,\qquad в_i^{(e)}=y_j-y_k\,,\qquad c_i^{(e)}=x_k-x_j\,,$$

$$a_j^{(e)}=x_k\,y_i-x_i\,y_k\,,\qquad в_j^{(e)}=y_k-y_i\,,\qquad c_j^{(e)}=x_i-x_k\,,$$

$$a_k^{(e)}=x_i\,y_j-x_j\,y_i\,,\qquad в_k^{(e)}=y_i-y_j\,,\qquad c_k^{(e)}=x_j-x_i\,,$$

Δ_e – площадь элемента *(е)*.

Суммируя равенство (10) по всем элементам, получаем для искомой функции разложение

$$h(x,y)\approx h_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,y)h_i\,. \qquad (11)$$

Здесь *n* – число всех узлов сетки.

Подставляя в задаче (1), (2) вместо $h(x,y)$ функцию $h_n(x,y)$, по обобщенному принципу Галеркина получаем соотношения

$$\iint_D N_j\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)+q\,h_n-f\right]dx\,dy+\int_S N_j\left(T\frac{\partial h_n}{\partial n}+\beta\,h_n-\alpha\right)ds=0\,,$$

$$i=1,2,\ldots,n\,.$$

Применяя к двойному интегралу первую формулу Грина, имеем равенства

$$\iint_D\left[T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial h_n}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)+q\,N_j\,h_n-N_jf\right]dx\,dy+\int_S N_j(\beta\,h_n-\alpha)ds=0\,,$$

$$j=1,2,\ldots,n\,.$$

После подстановки вместо функции $h_n(x,y)$ ее разложения из (11) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно h_i

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\iint_D\left[T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)+q\,N_j\,N_i\right]h_i\,dx\,dy+\int_S N_iN_j\beta\,h_i\,ds\right\}=$$

$$=\iint_D N_j\,f\,dx\,dy+\int_S N_j\alpha\,ds\,,\qquad i=1,2,\ldots,n\,,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\,h_i=в_j\ ,\qquad i=1,2,\ldots,n\,, \qquad (12)$$

где

$$a_{ji}=\iint_D T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint_D N_j\,N_i\,q\,dx\,dy+\int_S N_jN_i\beta\,ds\,,$$

$$\hat{a}_j=\iint_D N_j\,f\,dx\,dy+\int_S N_i\alpha\,ds\,.$$

Матрица системы (12) симметричная и хорошо обусловленна с диагональным преобладанием, поэтому ее можно легко решить одним из точных или приближенных методов. Решив систему алгебраических уравнений (5), определяем значения $h^{(1)}(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Подставляя в формуле (9) вместо $h^{(0)}$ значения $h_i^{(1)}$, находим следующее приближение $h_i^{(2)}$ и т.д. итерационный процесс продолжим до выполнения условия

$$\max_i \left| h_i^{(\nu)} - h_i^{(\nu-1)} \right| < \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

где ν – номер итерации.

Работа алгоритма апробирована на решении следующего тестового примера. В центре круговой области радиуса $r = 3000\,м$ находится источник, благодаря которому поддерживается постоянный уровень $h_0 = 670\,м$, а уровень воды на границе области – $h_r = 650\,м$. Исходные данные задачи: $h(x,y) = \sqrt{h_r^2 + \delta\left(r^2 - x^2 - y^2\right)}$; $k(x,y) = 10\,x\,y/r^2 + 5$; $q(x,y) = 1$; $f(x,y) = 2\delta\left(2k(x,y) - 5\right) + q \cdot h(x,y)$; $\alpha(x,y) = -\delta\,k\,r + \beta\,h_r$ для $x^2 + y^2 = r^2$, β – произвольное число, $\delta = 16 \cdot 10^{-4}$. Рассмотрено четыре случая задания функции $\varphi(x,y)$: 1) $\varphi(x,y) = 650м$; 2) $\varphi(x,y) = 660м$; 3) $\varphi(x,y) = 670ì$; 4) $\varphi(x,y) = \left(h_r^2 + \delta\left(x^2 + y^2\right)\right)^{1/2}$.

В табл. 1 приведены значения уровней грунтовых вод $h(x,y)$ и управления $f(x,y)$ для указанных случаев на расстоянии $r_0 = 0\,м$; $r_1 = 1000\,м$; $r_2 = 2000\,м$; $r_3 = 3000\,м$ от центра круга, полученные описанным алгоритмом.

Таблица 1

Расстояние от центра области, *м*		0	1000	2000	3000
Начальные уровни грунтовых вод, *м*		670	667,83	661,25	650
Начальные значения инфильтрации, *м/сут*		0,2	0,2	0,2	0,2
$\varphi(x,y) = 650м$;	$h(x,y)$, *м*	650,81	650,56	650,10	650,00
	$f(x,y)$, *м/сут*	-0,1476	0,0328	0,0100	-0,0024
$\varphi(x,y) = 660м$;	$h(x,y)$, *м*	660,55	660,38	659,87	659,61
	$f(x,y)$, *м/сут*	-0,0890	0,0164	-0,0086	0,0500
$\varphi(x,y) = 670м$.	$h(x,y)$, *м*	670,29	670,18	669,63	669,22
	$f(x,y)$, *м/сут*	-0,0304	0,0000	-0,0271	0,1026
	$\varphi(x,y)$, *м*	670	667,83	661,25	650
	$h(x,y)$, *м*	669,80	667,96	661,21	649,88
	$f(x,y)$, *м/сут*	0,07	0,13	0,04	0,12

Литература

1. Полубаринова – Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. – М.:Наука, 1969. – 414 с.
2. Мурзакматов М.У., Шамырканов М.Б. Задача оптимального управления уровнем грунтовых вод. // Вестник ИГУ, №21. – Каракол: Издательство ИГУ, 2008. – с.17 – 23.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.