

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В АРМИРОВАННЫХ СРЕДАХ

ОРМОНБЕКОВ Т.О., УСЕНОВ А.

Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек,
Кыргызстан

АЙДАРАЛИЕВ Ж.К.

²Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и
архитектуры им. Н.Исанова, Бишкек, Кыргызстан

В случае отсутствия смещений, поперечных к ориентации волокон, определено, что смещения не зависят от координат x_1 . В этом случае в среде распространяются только поперечные волны. Задавая на границах волокно-связующие условия равенства перемещений и напряжений и предполагая, что отраженная границей волна должна удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда, ищется асимптотическое представление продольного сдвига в армированных средах.

Вектор упругих смещений $\bar{u}$ каждой компоненты армированного тела удовлетворяет уравнению

$$G\Delta\bar{u} + (\lambda + G)\text{grad div}\bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь ρ - плотность.

Решение уравнения (1) ищется в виде суммы трех векторов

$$\bar{u} = e_1 u + \text{grad} \bar{\psi} + \text{rot} e_1 \bar{\Phi} \quad (2)$$

где $\bar{\psi}$, $\bar{\Phi}$ – скалярные функции x_i ($i = 1, 2, 3$); штрих означает дифференциальные операторы только по переменным x_2 и x_3 .

Компоненты вектора упругих смещений, определяемые вторым и третьим членами (2), расположены в плоскости $x_1 = \text{const}$.

Вектор напряжения на площадке с нормалью $\bar{n}$ выражается через смещения согласно формуле

$$\bar{\Sigma}_n = 2G_\alpha (\bar{n} \cdot \text{grad}) \bar{u} + \lambda_\alpha \bar{n} \text{div} \bar{u} + G_\alpha \bar{n} \text{rot} \bar{u}. \quad (3)$$

Решение векторного уравнения (1) строится в виде суммы трех векторов согласно представлению (2).

Введенные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Phi} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 u + \left(2 + \frac{\lambda}{G}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{G}\right) \frac{\partial u}{\partial x_1} &= 0 \\ \left(2 + \frac{\lambda}{G}\right) \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{G}\right) \frac{\partial u}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь ∇^2 – двумерный Лапласиан.

Рассмотрим частный случай распространения волн. Полагая функции ψ и Φ равными нулю, т.е. отсутствие смещений, поперечных к ориентации волокон, из третьего уравнения (4) заключаем, что продольные смещения не зависят от координаты x_1 . Из второго уравнения (4) следует

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, продольные смещения в составляющих компонентах удовлетворяют волновому уравнению (5), где величины, относящиеся к связующим, отличаются буквой S , а величины, относящиеся к волокнам, – a . Напряжения сдвига связаны с перемещениями соотношениями

$$\sigma_{12} - i\sigma_{13} = G \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_2} - i \frac{\partial u_a}{\partial x_3} \right) = 2G\varphi'(z), \quad (6)$$

на границе волокно-связующие Ω_{mn} задаются условия равенства перемещений и напряжений:

$$u_a / \Omega_{mn} = u_s / \Omega_{mn}, \quad G_a \frac{\partial u_a}{\partial n} / \Omega_{mn} = G_s \frac{\partial u_s}{\partial n} / \Omega_{mn}. \quad (7)$$

Волновое поле в связующей среде представим суммой падающего на рассматриваемую ячейку и отраженного от границы волокно-связующее полей. Падающая волна будет представлять суперпозицию цилиндрических волн, удовлетворяющих уравнению (5) в локальных цилиндрических координатах,

$$u_s' = \sum_{\tau} V_{00}^{\tau} J_{\tau}(kr) e^{i\tau\theta - i\omega t}. \quad (8)$$

Здесь V^{τ} – неизвестные коэффициенты разложения, нижние индексы у которых определяют номер рассматриваемой ячейки; $k = \frac{\omega}{c_{vs}}$. Отраженная границей волна должна удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда и уравнению (5), поэтому решение ищется в рядах по функциям Ханкеля, асимптотическое представление которых отвечает поставленным требованиям:

$$u_s'' = \sum_{\tau} A_{00}^{\tau} J_{\tau}(kr_0) H_{\tau}^{(1)}(kr) e^{i\tau\theta - i\omega t},$$

где r_0 – радиус волокон. Поле в волокне ищется в виде разложения по стоячим волнам.

$$u_a = \sum_{\tau} B_{00}^{\tau} J_{\tau}(kr_0) J_{\tau}(k'r) e^{i\tau\theta - i\omega t}, \quad (9)$$

где $k' = \frac{\omega}{c_{va}}$. Коэффициенты разложения связаны зависимостями

$$J_\tau(kr_0)A_{00}^\tau = -Z_\tau V_{00}^\tau, \quad J_\tau(kr_0)B_{00}^\tau = V_{00}^\tau \frac{J_\tau(kr_0) - Z_\tau H_\tau^{(1)}(kr_0)}{J_\tau(kr_0)}, \quad (10)$$

$$Z_\tau = \frac{J_\tau(k'r_0)J_\tau'(kr_0) - \frac{k'G_a}{kG_s}J_\tau(kr_0)J_\tau'(k'r_0)}{J_\tau(k'r_0)H_\tau'(kr_0) - \frac{k'G_a}{kG_s}J_\tau(k'r_0)H_\tau(kr_0)},$$

которые вытекают при удовлетворении краевых условий. Учитывая, что падающее поле является суммой отраженных волн от всех волокон армированной среды, и используя теорему сложения цилиндрических функций, находим систему уравнений для определения параметров V^τ :

$$V_{00}^\tau + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq 0} \sum_j (-1)^{j-\tau} Z_j V_{mn}^j H_{j-\tau}^{(1)}(kR_{mn}) e^{i(j-\tau)\theta_{mn}} = 0$$

$$(\tau = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty). \quad (11)$$

Общее волновое поле в рассматриваемой среде, как это следует из приведенных соотношений, составлено произведением функций V_{mn}^τ , определяющих поле между ячейками, и функций, характеризующих детальную структуру поля в ячейке:

$$u_s = \sum_\tau V_{00}^\tau [J_\tau(kr) - Z_\tau H_\tau^{(1)}(kr)] e^{i\tau\theta - i\omega t}. \quad (12)$$

Решение уравнений (11) ищется в виде бегущих волн [1]:

$$V_{mn}^\tau = C_\tau \exp\{ia\omega_1[m \cos \varphi + nb \cos(\alpha - \varphi)]\}. \quad (13)$$

Здесь φ – угол между направлением распространения волн и осью Ox_2 ; a – неизвестный параметр, характеризующий длину волны. Постоянные C_τ определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений

$$C_\tau + \sum_j Z_j G_{j-\tau} C_j = 0, \quad (14)$$

являющейся следствием подстановки (13) в систему (11) при учете преобразования системы отсчета. Здесь

$$\rho e^{i(\varphi - \nu + \frac{\pi}{2})} = m + bne^{i\alpha}, \quad \theta_{mn} = \varphi - \nu + \frac{\pi}{2} \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty). \quad (15)$$

Здесь

$$G_{j-\tau} = (-i)^{j-\tau} e^{i(j-\tau)\varphi} \sum_{(\varrho, \vartheta)} \sum H_{j-\tau}(k\omega_1 \varrho) e^{ia\varrho\omega_1 \sin \vartheta - i(j-\tau)\vartheta}. \quad (16)$$

Неизвестный параметр a определяется из равенства нулю бесконечного определителя

$$|\delta_{j\tau} + Z_j G_{j-\tau}| = 0 \quad (j, \tau = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty), \quad (17)$$

являющегося следствием требования совместности уравнений (14). Уравнение (17) является дисперсионным, и только в предельном случае длинных волн. Фазовая скорость волн (13) не зависит от частоты.

Литература

1. Ван Фо Фы Г.А. Волокнистые композиционные материалы. – М.: Мир. 1967.
2. Т. Ормонбеков. Прикладные методы расчета элементов конструкций из композиционных материалов. – Бишкек: Илим, 1996.