УДК.: 530.145.6

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ

Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызская Республика, г. Бишкек

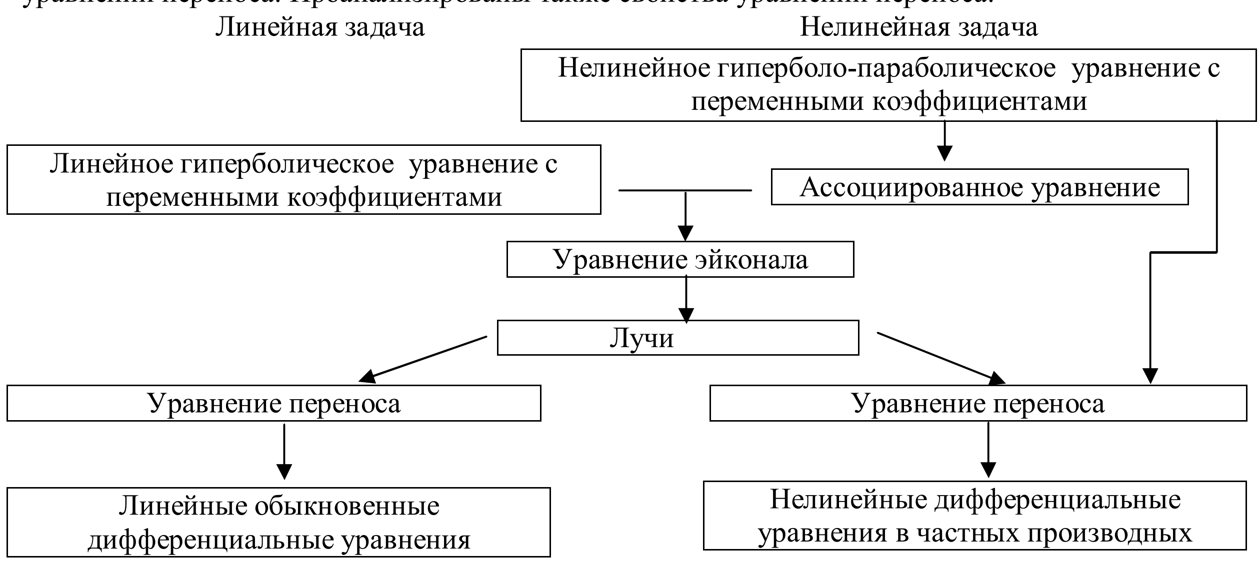
д.т.н., проф., ОРМОНБЕКОВ Т.О.
acort@rambler.ru

Сформулирована обобщенная теория распространения нелинейных волн деформаций в средах со сложными свойствами в виде общей постановки проблем и исследуются условия построения асимптотических уравнений. Математическая модель переходного, волнового процесса, содержащая параболическую часть, разделяется на систему. Параболичность обусловлена процессами диссипации.

В теории распространения волн находят применение пространственно-временное и лучевое описание. В механике преимущественно используется пространственно-временное и лучевое описание, а в акустике – в основном лучевое описание. Пространственное описание позволяет получить более содержательное решение, но требует применения сложного математического аппарата. Лучевое описание удобно для построения асимптотических решений при помощи сравнительно простого математического аппарата.

При рассмотрении нелинейных волновых процессов в сложных средах необходимо учесть многие эффекты искажения, для чего традиционные методы не эффективны. В последнее время для решения таких задач выдвинуты идеи, которые соединяют преимущества упомянутых выше видов описания процессов. В отличие от классического лучевого метода для линейных волновых уравнений с переменными коэффициентами мы будем использовать лучевой метод для ассоциированного уравнения, которое не учитывает эффекты искажения. По найденным лучам строятся в дальнейшем уравнения переноса для основного уравнения. Ввиду сложности процесса они требуют решения пространственно-временной задачи, которая уже позволяет учесть искажение волны. Такой подход разложения по отдельным волнам позволяет решить многие практически важные задачи. Этот подход иллюстрирован схемой.

Наш доклад посвящен общей нелинейной теории волн деформации, развитой на базе лучевого метода. Представлены основные уравнения и проанализированы условия асимптотических приближений. На основе сделанных предложений построены уравнения переноса n-го порядка, которые представляют собой квазилинейные уравнения в частных производных. Краевые задачи основных уравнений преобразуются в задачи Коши для уравнений переноса. Проанализированы также свойства уравнений переноса.



Основные уравнения и условия асимптотических приближений. Постановка задачи

Нелинейные переходные волновые процессы в среде с диссипативными, дисперсионными и др. свойствами описываются матричным уравнением относительно вектора U [1], образованного из неизвестных полевых величин.

$$I\frac{\partial U}{\partial t}+A^K\frac{\partial U}{\partial X^K}+\sum \mathcal{E}^{m(p)}B^{\alpha\beta}{}_{rs}\frac{\partial^p U}{\partial (X^\alpha)^r\,\partial (X^\beta)^s}+H=0,$$
$$U=\|u_i\|,\;\; A^K=\|a^K{}_{ij}\|,\;\; B^{\alpha\beta}{}_{rs}=\left\|b^{\alpha\beta}{}_{ijrs}\right\|,\;\; H=\|h_i\|,$$
$$i,j=1,2,\dots,n;\;\; K=1,2,3;\;\; \alpha,\beta=0,1,2,3; \tag{1}$$
$$X^0=t, r+s=p\geq 2,\qquad m\geq 1.$$

Здесь $\mathcal{E}$ – определенный малый параметр. Уравнение (1) является квазилинейным, содержащим, параболическую часть. Параболичность обусловлена процессами диссипации, физические параметры которых охарактеризованы компонентами $B^{\alpha\beta}{}_{rs}$. Волновые процессы деформации обусловливают значение $m\geq 1$, т.е. у производных высшего порядка стоит малый параметр. Напомним, что в процессах теплопереноса соответствующая математическая модель не обладает таким свойством (в этом случае $m=-1$). Отметим, что при разных $B^{\alpha\beta}{}_{rs}$ малый параметр может иметь разный порядок *O (m (p))*.

В уравнении (1) имеем

$$A^K=A^K(X^K,U),\qquad B^{\alpha\beta}{}_{rs}=B^{\alpha\beta}{}_{rs}(X^K,U),\qquad H=H(X^K,U). \tag{2}$$

Вектор H может содержать, кроме переменного вектора U, также интегральные операторы от U или известные функции от X^K. В большинстве случаев он содержит также малый параметр $\mathcal{E}$.

Требуется найти асимптотическое решение уравнения (1) в приграничных условиях

$$U(X^K,t)|_{t=0}=\psi(X^K),\;\; U(X^K,t)|_S=\Phi(X^\alpha). \tag{3}$$

Далее рассмотрим отдельно краевую задачу и задачу Коши: задача I (задача Коши)

$$\psi(X^K)\neq 0,\qquad \Phi(X^\alpha)=0; \tag{4}$$

задача II (краевая задача)

$$\psi(X^K)=0,\qquad \Phi(X^\alpha)\neq 0. \tag{5}$$

Дальнейший анализ посвящен краевой задаче (5)

Примем за основу (П.1). Представляется возможным разложение вектора *U* по степеням малого параметра

$$U=\sum_{i=0}\mathcal{E}^i U_i. \tag{6}$$

(з.1). (П.1) не является принципиальным ограничением. Оно введено только в целях корректного построения уравнений переноса. Корректные уравнения переноса первого порядка относительно амплитудной функции вектора *U* можно построить и без учета предположения 1.1, но принебрегаемым членам более высокого порядка по степеням $\mathcal{E}$ не удается дать адекватную физическую интерпретацию, и их роль остается непонятной.

(з.2). Существование непрерывного решения уравнения (1) возможно при определенной мощности диссипации только в случае воздействия с определенной мерой изменения. При этом градиент действительной деформации должен быть меньше некоторого критического значения градиента деформации [2,3].

Далее рассмотрены достаточно гладкие функции от вектора U и его производных, поэтому необходимо, чтобы выполнялось следующее:

(У.1). Компоненты вектора *U* должны быть такими, чтобы действительные градиенты деформации были меньше значения критического градиента.

Примем также

(П.2). Представляются возможными разложения

$$A^K=A^K{}_0(X^K)+\mathcal{E}A^K{}_1(X^K,U)+\cdots,$$

$$B^{\alpha\beta}{}_{rs} = B^{\alpha\beta}{}_{0rs}(X^K) + \varepsilon B^{\alpha\beta}{}_{1rs}(X^K, U) + \cdots, \tag{7}$$
$$H = H_0(X^K, U) + \varepsilon H_1(X^K, U) + \cdots,$$

где все функции являются гладкими функциями своих аргументов.

Подставляя (6) в уравнение (1), получим в первом приближении с точностью членов $O(\varepsilon^0)$

$$I\frac{\partial U_0}{\partial t} + A^K\frac{\partial U_0}{\partial X^K} + H = 0, \tag{8}$$

а с учетом (7) получим

$$I\frac{\partial U_0}{\partial t} + A_0^K\frac{\partial U_0}{\partial X^K} + H_0 = 0. \tag{9}$$

(О.1). Уравнение (1) называется основным.
(О.2). Уравнение (8) называется квазилинейным ассоциированным.
(О.3). Уравнение (9) называется линейным ассоциированным.
(У.2). Собственные значения матрицы A_0^K реальны и конечны.

Из условия 2 следует гиперболичность ассоциированного уравнения. В сущности, это условие является следствием волнового характера процесса.

Движение фронта волны, генерированной условиями (3) и (5), с точностью ассоциированного уравнения (9) описывается соотношением [4]

$$t = \varphi(X^K), \tag{10}$$

которое определяет точки X^K, находящиеся в момент времени t на фронте волны. По общепринятой терминологии φ – эйконал. В общем случае эйконал определяется из уравнения

$$|grad\varphi|^2 = 1/c^2, \tag{11}$$

где c – скорость определенной волны.

Примем действительными предположения геометрической оптики для ассоциированного уравнения (9)[5].

Имея в виду ассоциированные уравнения (8) и (9), введем в рассмотрение следующие определения:

(О.4). Вектор U (X^K, t) называется описывающим развивающуюся волну, если существуют семейство распространяющихся поверхностей $\varphi(X^K)$=const и скорости изменения компонент U или их производных малы, когда X^K движется вместе с такой поверхностью, и велики, когда X^K фиксирована.

(О.5). Вектор U (X^K, t) называется описывающим простую волну, если существует семейство распространяющихся поверхностей $\varphi(X^K)$=const и скорости изменения компонент U или их производных равны нулю, когда X^K движется вместе с такой поверхностью, и велики, когда X^K фиксирована.

В теории простых волн известно разложение

$$U(X^K, t) = \sum_n \Phi_n(X^K) f_n\big(t - \varphi(X^K)\big), \tag{12}$$

где фазовые функции f_n удовлетворяют определенным условиям дифференцируемости [4]. Коротковолновая асимптотика (лучевой метод) содержит при этом

$$f_n = \exp(i\omega s)(i\omega)^{-n}, n = 0,1,2, \dots; \quad s = t - \varphi(X^K). \tag{13}$$

В этом случае из традиционного уравнения Гельмгольца получим в первом приближении уравнения эйконала (11), а в дальнейших приближениях – уравнение переноса

$$2\nabla\Phi_n\nabla_\varphi + \Phi_n\nabla_\varphi^2 = 0, \ \ n = 0,1,2, \dots \tag{14}$$

Уравнения переноса (14) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые содержат дифференцирование только вдоль выбранного в уравнении эйконала луча.

В теории развивающихся волн требуется найти асимптотическое решение основного уравнения (1), которое не допускает в явном виде разложения (12). Поэтому с учетом структуры уравнений (1) и (9), а также с учетом определений 4 и 5 сформулируем основной принцип построения асимптотических решений основного уравнения (1).

Принцип построения асимптотических решений: исходя из кинематики линейного ассоциированного уравнения вдоль определенных ассоциированным уравнением лучей строятся уравнения переноса основной задачи, решение которых позволяет определить амплитудные факторы волнового процесса.

(з.3). Если лучи выбраны из квазилинейного ассоциированного уравнения, то уравнение эйконала содержит решение основного уравнения и необходимо совместное решение уравнений эйконала и переноса.

В сущности, принцип построения асимптотических решений показывает, что взамен разложения (12) мы используем разложение

$$U(X^K,t)=\sum_n \Phi_n\left(X^K,t-\varphi(X^K)\right). \tag{15}$$

Это говорит о том, что сложное квазилинейное уравнение (8.1) с ассоциированными гиперболическими уравнениями (8) и (9) не допускает расчленения зависимого переменного по фазовым функциям.

Из определения 4 вытекает

(С.1). В случае развивающихся волн изменения по пространственным координатам имеют порядок $O(1)$, а изменения по фазе $\xi=t-\varphi(X^K)$ имеют порядок $O(\varepsilon)$.

Напомним, что в случае простых волн последние изменения равны нулю.

Эти оценки необходимо учитывать при построении уравнений переноса. Отсюда вытекает общая последовательность действий в реализации принципа построения асимптотических решений:

1) определение ассоциированной системы (9);
2) построение уравнения эйконала для него и определение фронтов и скоростей λ_i;
3) построение уравнений переноса по определенным лучам при помощи перехода к новым независимым переменным

$$\xi=t-\varphi(X^K),\quad \tau^\nu=\varepsilon X^\nu,\ \nu\in 0,1,2,3. \tag{16}$$

На основе метода деформируемых координат возможно обобщение преобразования (16) к виду

$$\xi=\varepsilon^k\left(t-\varphi(X^K)\right),\quad \tau^\nu=\varepsilon^{k+1}X^\nu, \tag{17}$$

где $k-$ действительное число.

(з.4). Преобразования (16) и (17) справедливы для описания волн по соответственным лучам без учета взаимодействия.

Определим теперь связь производных по независимым переменным t и X^K с производными по новым независимым переменным ξ и τ^ν:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^{k+1}\frac{\partial}{\partial\tau^\nu}\delta_{\nu 0},\\ \frac{\partial}{\partial X^K}=-\varepsilon^k\varphi_k\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon^{k+1}\frac{\partial}{\partial\tau^\nu}\delta_{\nu K},\\ \frac{\partial^p}{\partial(X^\alpha)^r\partial(X^\beta)^s}=\varepsilon^{pk}(\xi_\alpha)^r(\xi_\beta)^s\frac{\partial^p}{\partial\xi^p}+O(\varepsilon^{pk+1}),\\ \varphi_K=\frac{\partial\varphi(X^M)}{\partial(X^K)},\quad \xi_\alpha=\frac{\partial\varphi(X^M)}{\partial X^\alpha}.\end{gathered} \tag{18}$$

Теперь соблюдаются следующие оценки: если $\frac{\partial}{\partial t}=O(\varepsilon)$, $\frac{\partial}{\partial X^K}=O(\varepsilon)$, *то* $\frac{\partial}{\partial\xi}=O(\varepsilon^{1-k})$, $\frac{\partial}{\partial\tau^\nu}=O(\varepsilon^{-k})$. При этом имеем ввиду, что $\varphi_K = 0\,(1), \xi_\alpha = 0\,(1)$. При k=0 условия следствия выполняются сразу: $\frac{\partial}{\partial\xi} = 0(\varepsilon)$, $\frac{\partial}{\partial\tau^v} = 0\,(1)$.

(С.2). Преобразование (17) содержит все возможные деформированные координаты с соблюдением оценок следствия 1.

На выбор показателя *k* в преобразовании (17) влияют:

(У.3) (физическое). Уравновешивание нелинейных, диссипативных, дисперсионных и других эффектов.

(У.4) (геометрическое). Длина волны, сопоставленная с единицей фазового переменного ξ (местонахождение участков процесса на физической поверхности).

(У.3). В случае уравновешивания нелинейных эффектов, с одной стороны, и диссипативных или дисперсионных эффектов – с другой, реализуется определением показателя *k* из соотношения

$$k + 1 = pk + m(p). \tag{19}$$

Так, пусть для определенных *m(p)* и p имеем *k(p)*.

Тогда **(У.4)** реализуется при помощи следующих соотношений:

1) общий случай: *k=k (p)*;
2) прифронтовой район: *k=k (p)-l*;
3) широкое поле: *k=k(p)+l*.

Здесь $l > 0$ – действительное число. Случай 2 соответствует очень коротким импульсам, случай 3 – очень длинным импульсам.

Поэтому можно добавить (см.[6]) следующее:

(У4.1). Показатель k должен удовлетворять оценке $\varepsilon^k \Lambda = 0(1)$, где Λ – эффективная длина волны .

(з.5). Ограничение по амплитуде вектора *U*, кроме выполнения условия 1, следует из построения линейного ассоциированного уравнения (8). Лучи, определенные из (8), должны описать поведение квазилинейного ассоциированного уравнения (7) с достаточной гладкостью, а лучевая картина не должна содержать каустик. В случае однородной среды этому условию соответствуют конечные малые деформации, а в случае неоднородной среды необходимо более детальное исследование лучевой картины [7].

(з.6). Если за основу выбрать лучи квазилинейного ассоциированного уравнения (7), то имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^k \left(1 - \frac{\partial\varphi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \varepsilon^{k+1}\frac{\partial}{\partial\tau^v}\delta_{v0}. \tag{20}$$

Наличие секулярного члена в (19) приводит к ограничению во времени из-за неприменимости соответствующего преобразования для моментов времени, превышающих критическое время образования ударных волн. Однако если существуют лучи квазилинейного ассоциированного уравнения, на которых решение однозначно (($\frac{\partial\varphi}{\partial U}$)($\frac{\partial U}{\partial t}$)=0 на луче), то применение преобразования по этим лучам возможно и изложенное выше остается в силе.

(з.7). В случае консервативных систем с дисперсией показатель *k* выбирается как мера дисперсии на основе дисперсионного соотношения [8]. Если дисперсионное соотношение кубическое, то *k=1/2*, тем самым вводится ограничение длинных волн. Предположено также значение $k = (p-1)^{-1}, p \geq 2$ [5,9]. Однако такой выбор показателя связывает порядок максимальной производной в уравнении (1) с геометрической стороной процесса и является очень сильным ограничением.

(з.8). В случае консервативных систем с дисперсией существует оценка амплитуды, выше которой решение допускает солитоны [10].

Предлагаем разные задачи, вытекающие из уравнения (1): $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$.

- одномерные задачи в однородной среде;
- одномерные задачи в неоднородной среде;
- многомерные задачи.

Литература

1. Hopf E. The partial differential equation - Communs Pure and Appl. Math., 1950,3,№2p.201-230.
2. Sedov A., Nariboli G.A. Viscoelastic waves by the use of wave front theory. – Intern. J. Nonlin. Mech., 1971,6,№5, P. 615-624.
3. Cole J.D. On guasilinear parabolic equabolic occurring in aerodynamics. – Quart. Appl. Math., 1951,9, №3, P. 225-236.
4. Tanaka K., Motoyama C. The propagation of longitudinal wave in a viscoelastic circular bar with consideration of the lateral inertia. – Bull. JSME, 1974,17,№112,P.1247-1250.
5. Кутателадзе С.С., Стыракович М.А. Гидродинамика газожидкостных сред. М.: Энергия, 1976.296с.
6. Остроумов Г.А. Основы нелинейной акустики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.132с.
7. Нигул У.К. Эхо – сигнал от упругих объектов. Таллин: Валгус, 1976,Т.1.
8. Bland D.R. On shock structure in a solid. – J. Inst. Math. Appl., 1965,1,№1, P.56-75.
9. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's – Korteweg – de Vries equation for viscoelastic rods and plates. – J.Math. Anal. Appl., 1970, 32, №3, P.661-677.
10. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.228с.