УДК 517. 962.2, 519. 876.2

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

ТЕРМОИЙИЛЧЕКТИН ДИНАМИКАЛЫК БИРДИК ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН БИР УЧУРУ

ONE OF THE DINAMICAL ONE DIMENSIONAL INVERSE PROBLEMS OF THERMO-ELASTICITY

КАЛДЫБАЕВА Г.А., САТЫБАЕВ А.Дж.
ОшГУ, ОшТУ , Ош
abdu-satybaev@mail.ru

KALDYBAEVA G.A., SATYBAEV A.J.
OshSU, OshTU
abdu-satybaev@mail.ru

В данной статье рассмотрена задача определения теплового расширения термоупругости при
переменных функций плотности среды и коэффициентов Ламэ.

This article deals with the problem of the definition of heat expanding of thermo-elasticity in changing
functions of density area and Lame`s coefficient.

Динамическая обратная задача термоупругости впервые поставлена и исследована в работах В.Г. Яхно и С.О. Апбасова [1,2].

В этих работах исследована задача определения переменных функций плотности среды и коэффициентов Ламэ.

1. Постановка задачи

Пусть на границу *x=0* полупространства R_+ задается тепловой удар и при этом температура на границе повышается от температуры T_0 до T_1 .

При этом математическая модель термоупругости описывается дифференциальным уравнением в частных производных вида [3]:

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}[(\lambda(z) + 2\mu(z))\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \qquad (1)$$

$$+ (3\lambda(z) + 2\mu(z))R(\theta(z,t))], \qquad z \in R_+, \qquad t \in R_+,$$

$$где \qquad R(s) = \int_0^s \alpha(y)dy, \qquad \theta(z,t) = (T_1 - T_0)\times\Big[erfc(z/(2\sqrt{kt})) -$$

$$-\exp(\gamma z - \gamma^2 kt)erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}} - \gamma\sqrt{kt}\right)\Big], \; erfc(\gamma) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi \quad .$$

Здесь $T_0,$ $T_1,$ K, γ − фиксированные положительные числа, $\theta(z,t)$ − приращение температуры, $\alpha(y)$ − тепловое расширение, *к* − температуропроводность, *γ=q/n* , *q* - теплоотдача, *n* - теплопроводность.

Физический смысл прямой задачи термоупругости заключается в определении конвективного теплообмена *u(z,t),* происходящей в среде при начальных и граничных условиях:

$$u\,(z\,,t\,)\big|_{t=0} = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial\, u\,(z\,,t\,)}{\partial\, t}\right|_{t=0} = 0\,, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial\, u\,(z\,,t\,)}{\partial\, z}\right|_{z=0} = \frac{3\,\lambda\,(0) + 2\,\mu\,(0)}{\lambda\,(0) + 2\,\mu\,(0)}\,R\,(\theta\,(0\,,t\,))\,. \qquad (3)$$

Отметим, что граничное условие (3.) при $R(\theta(0,t)) = -\gamma(T_1 - T_0)$ моделирует тепловой удар на поверхности полупространства R_+, т.е. температура на границе повышается от T_0 до T_1. При этом между границей среды $x_0=0$ и средой происходит конвективный теплообмен.

Обратная задача. Определить функцию $\alpha(y)$ − теплового расширения из (1.) -(3) при известной дополнительной информации относительно решения прямой задачи

$$u(z,t)\big|_{z=0} = g(t), \qquad t \in [0,T], \qquad 0 < T - const\ , \qquad (4.)$$

и при известных функциях $\rho(z)$ − плотности среды, $\lambda(z)$, $\mu(z)$ − коэффициентов Ламэ.

Замечание. Определение коэффициента Ламэ $\lambda(z)$ при известных $\mu(z)$, $\rho\ (z)$ $\alpha(y)$, где они постоянны, рассмотрено нами в работе [4].

Рассмотрим случай, когда $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho\ (z)$ – переменные функции. Тогда из (1) − (4) получим:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)} * \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\lambda'(z) + 2\mu'(z)}{\rho(z)} * u_z(z,t) -$$

$$-\frac{(3\lambda'(z) + 2\mu'(z))}{\rho(z)} R(\Theta(z,t)) - \frac{3\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)} * R_z(\Theta(z,t))\ \Theta_z(z,t)\,,$$

$$u\,(z\,,t\,)\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t\,(z\,,t\,)\big|_{t=0} = 0, \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} * R(\Theta(0,t)), \qquad t \in R \quad ,$$

$$u(z,t)\big|_{z=0} = g(t), \qquad t \in [0,T] \quad , \qquad (6)$$

где $R\,(\Theta(z,t)) = \int\limits_0^{\theta(z,t)} \alpha\,(\eta)\,d\eta$, $\qquad R_z^{/}(\Theta(z,t)) = \alpha(\theta(z,t))\theta_z^{/}(z,t)$.

$\alpha(z)$ −неизвестная функция.

Относительно дополнительной информации $g(t)$ должны выполняться:

$$u\,(0{,}0) = g\,(0) = 0, \qquad u_t\big|_{z=0} = g\,'(0) = 0,\ g\,(t) \in C^4(R) \qquad (7)$$

Введем замену переменных $x(z) = \int_0^z \sqrt{\rho\,(\xi)/(\lambda\,(\xi) + 2\,\mu\,(\xi))}\,d\,\xi$ и замену новых функций

$$\upsilon\,(x(z),t) = u\,(z,t), \quad \overline{\lambda}\,(x(z)) = \lambda\,(z),\ \overline{\mu}\,(x(z)) = \mu\,(z),\ \overline{\rho}\,(x(z)) = \rho\,(z).$$

Вычислим:

$$\upsilon(x(z),t) = u(z,t), \quad \overline{\lambda}(x(z)) = \lambda(z), \quad \overline{\rho}\ (x(z)) = \rho(z), \quad \overline{\mu}(x(z)) = \mu(z);$$

$$u_{tt} = \upsilon_{tt}\,,\ \ u_z = \upsilon_x(x,t) \cdot x_z'(z) = \upsilon_x(x,t) \cdot \sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x) + 2\mu(z)}} \quad ,$$

$$u_{zz} = \upsilon_{xx} \cdot (x_z'(z))^2 + \upsilon_x \cdot x_{zz}'(z) = \upsilon_{xx}\sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x) + 2\mu(x)}} + \left(\sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x) + 2\mu(x)}}\right)'_x \cdot \upsilon_x$$

$$\lambda'_z(z) = (\bar{\lambda}(x(z))'_x \cdot x'_z(z) = \bar{\lambda}'_x \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho}(x)}{\bar{\lambda}(x) + 2\bar{\mu}(x)}},$$

$$\mu'(z) = (\bar{\mu}(x(z))'_x \cdot x'_z(z) = \bar{\mu}'_x \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho}(x)}{\bar{\lambda}(x) + 2\bar{\mu}(x)}},$$

$$\rho'(z) = (\bar{\rho}(x(z)))'_x \cdot x'_z(z) = \rho'_x \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho}(x)}{\bar{\lambda}(x) + 2\bar{\mu}(x)}}.$$

Для краткости шапочки у всех новых уравнений убираем, тогда из (5) − (7)

$$\upsilon_{tt} = \upsilon_{xx} + A(x)\upsilon_x(x,t) - \Psi(x)\Theta(x,t)\Phi_x(x,t) - \\ - \Upsilon(x)\Phi(x,t), \quad x \in (0, T/2), \quad t \in (|x|, T-|x|) \tag{8}$$

$$\upsilon(x,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \upsilon_t(x,t)\big|_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right|_{z=0} = Z(0) * \Phi(0,t), \qquad t \in [0,T] \quad , \tag{10}$$

$$\upsilon(x,t)\big|_{x=0} = g(t), \qquad t \in [0,T] \quad , \tag{11}$$

где $Z(0) = \dfrac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} * \sqrt{\dfrac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\rho(0)}}$, $\Phi(x,t) = \displaystyle\int_0^{\theta(x,t)} \alpha(\eta)\,d\eta$,

$c(x) = \sqrt{\rho(x)/(\lambda(x) + 2\mu(x))}$, $\qquad A(x) = c'(x)/c^2(x) + \dfrac{\lambda'(x) + 2\mu'(x)}{\lambda(x) + \mu(x)}$,

$\Psi(x) = c(x) * \dfrac{3\lambda(x) + 2\mu(x)}{\rho(x)}$, $\Upsilon(x) = c(x) * \dfrac{3\lambda'(x) + 2\mu'(x)}{\rho(x)}$.

Пусть относительно искомой функции *Ф(x,t)* выполнены условия:

$$\Phi(x,t) \in C^2(R_+ \times R), \qquad \Phi(x,t) \geq M > 0, \, \Phi(x,t) \in \Lambda_o \tag{12}$$

2. Конечно - разностное решение

Для численного решения введем сеточную область $\Delta_h(T) = \{x_i = ih, t_k = kh, (ih, kh) : kh \in (0,T), \qquad kh \leq ih \leq T - ih\}$ где h − сеточный шаг по z,t. Составим разностную схему обратной задачи (8) − (11)

$$v_{\bar{t}t} = v_{x\bar{x}} + A_i v_{\bar{x}} - \psi_i \theta_i^k \Phi^k_{\bar{x},i} - Y_i \Phi_i^k, \quad (ih, kt) \in \Delta_h(T) \tag{13}$$

$$v_i^0 = 0 \qquad v_i^1 = 0 \tag{14}$$

$$v_{\bar{x}}\big|_{x=0} = Z_0 \Phi_0^k, \tag{15}$$

$$v_o^k = g^k \tag{16}$$

Исследуем сходимость решения обратной задачи (13) − (16) к точному решению обратной задачи (8) − (11).

Перепишем разностное уравнение (13)

$$v_i^{k+1}=v_{i+1}^k-v_{i-1}^k+v_i^{k-1}+h^2\cdot A_i\left[\frac{v_i^k-v_{i-1}^k}{h}\right]-h^2\psi_i\theta_i^k\cdot\left[\frac{\Phi_i^k-\Phi_{i-1}^k}{h}\right]-h^2Y_i\Phi_i^k.$$

Последовательно подставляя в правую часть последнего уравнения выражения u^k_{i+1}, u^{k-1}_i, u^k_{i-1} и т.д., получим:

$$v_i^{k+1}=\frac{g^{k+i+1}+g^{k-i-1}}{2}+h^2A_i\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{v_{i-k-\mu+2p}^{\mu}-v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h}- \tag{17}$$

$$-h^2\psi_i\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\theta_{i-k-\mu+2p}^{\mu}\cdot\left[\frac{\Phi_{i-k-\mu+2p}^{\mu}-\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h}\right]-h^2Y_i\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\Phi_{i-k-\mu+2p}^{\mu}.$$

Приравнивая в (17.) $i=0$, получим:

$$g^{k+1}=\frac{g^{k+1}+g^{k-1}}{2}+h^2A_0\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{v_{-k-\mu+2p}^{\mu}-v_{-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h}- \tag{18}$$

$$-h^2\psi_0\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\theta_{-k-\mu+2p}^{\mu}\cdot\left[\frac{\Phi_{-k-\mu+2p}^{\mu}-\Phi_{-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h}\right]-h^2Y_0\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\Phi_{-k-\mu+2p}^{\mu}.$$

Из (18) имеем:

$$v_{i-1}^{k+1}=\frac{g^{k+i}+g^{k-i-2}}{2}+h^2A_{i-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}-v_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu}}{h}-$$

$$-h^2\psi_{i-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\theta_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}\cdot\left[\frac{\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}-\Phi_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu}}{h}\right]-h^2Y_{i-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}.$$

Из (18) и последнего получим:

$$\frac{v_i^{k+1}-v_{i-1}^{k+1}}{h}=\frac{g^{k+i+1}+g^{k-i-1}-g^{k+i}-g^{k-i-2}}{2h}+A_i\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}(v_{i-k-\mu+2p}^{\mu}-v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu})-$$

$$-A_{i-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}(v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}-v_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu})-h^2\psi_i\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\theta_{i-k-\mu+2p}^{\mu}(\Phi_{i-k-\mu+2p}^{\mu}-\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu})+$$

$$+h^2\psi_{i-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\theta_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}(\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}-\Phi_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu})-$$

$$-h^2Y_i\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\Phi_{i-k-\mu+2p}^{\mu}+h^2Y_{i-1}\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}\quad . \tag{19}$$

Из (15) имеем:

$$v_i^{k+1}=g^{k+1}+Z_0h\Phi_0^{k+1}=\frac{g^{k+2}+g^{k-2}}{2}+h^2A_1\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{v_{1-k-\mu-2p}^{\mu}-v_{-k-\mu+2p}^{\mu}}{h}-$$

$$-h^2\psi_1\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\theta_{1-k-\mu+2p}^{\mu}\cdot\left[\frac{\Phi_{1-i-k-\mu+2p}^{\mu}-\Phi_{i-k-\mu+2p}^{\mu}}{h}\right]-h^2Y_1\sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{p}\Phi_{1-k-\mu+2p}^{\mu}.$$

Отсюда:

$$\varPhi_0^{k+1} = \frac{g^{k+2} - 2g^{k+1} + g^{k-2}}{2z_0 h} + \frac{A_1}{z_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} (v_{1-k-\mu+2p}^{\mu} - v_{-k-\mu+3p}^{\mu}) -$$

$$- \frac{\psi_1}{z_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{1-k-\mu+2p}^{\mu} \cdot (\varPhi_{1-k-\mu+2p}^{\mu} - \varPhi_{-k-\mu+2p}^{\mu}) - \frac{Y_1}{z_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \varPhi_{1-k-\mu+2p}^{\mu}. \qquad (20)$$

Формулы (17) − (20) при $k=\overline{1,N-1}; \quad i=\overline{N-k,k}$ являются разностными аналогами формулы Даламбера.

По методике [3] можно показать сходимость пары u_i^{k+1}, $\varPhi_l^{k+1}$ решение обратной задачи (13) − (16) к точному решению пары $u(z,t)$, $\varPhi(0,t)$ обратной задачи (8) − (11).

Теорема. Пусть для $g(t) \in C^4([0,T])$ решение обратной задачи (5) − (6) существуют и удовлетворяет условию (12) и пусть $u(x,t) \in C^4(\overline{\Delta(T)})$.Тогда приближенное решение , построенное конечно-разностным методом, обратной задачи (13) − (16) сходится к точному решению обратной задачи (8) − (11) в классе *C* со скоростью порядка *O(h)* при некотором «малом» *T*.

Литература

1. *Апбасов С.О., Яхно В.Г.* Определение характеристик изотропной вертикально-неоднородной несвязной термоупругой среды //Вопросы корректности задач математической физики и анализа. − Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1986. −С. 26 − 37.
2. *Апбасов С.О., Яхно В.Г.* Обратная задача динамической несвязной термоупругости //Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики. − Новосибирск: НГУ, 1986. −С.63 − 70.
3. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. − Киев: Вица школа, 1975.
4. *Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А.* Определение плотности среды в одномерной задаче акустики. Математический журнал. – Алматы.: Институт математики НАН Респ. Казахстан, 2005.
5. *Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А.* Численное определение коэффициента Ламе μ(z) в динамической задаче термоупругости. Проблемы управления и информатики. Доклады 2 Межд. конференции.−Бишкек. 2007. −С.67−71.