

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ, ВКЛЮЧАЮЩАЯ ЭЛЕМЕНТ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

*Кыргызский Государственный Технический Университет им.И.Раззакова, Бишкек.
Кыргызская Республика*

АБДРАХМАНОВ С.А., ДЖАНАЛИЕВ Н.Р.
izvestiva@ktu.aknet.kg

STATICALLY INDETERMINATE PROBLEM IN MECHANICS, WHICH INCLUDES AN ELEMENT OF MATERIAL WITH SHAPE MEMORY

В данной работе изучаются характеристики, влияющие на величину остаточных напряжений в системе, включающей элемент с памятью формы. Наличие таких усилий может существенно повлиять на величину генерируемых реактивных усилий.

Существует ряд конструкций, для которых проверка прочности и определение жесткости в сечениях отдельных элементов невозможны без нахождения деформаций, это так называемые статически неопределимые конструкции; нахождение усилий в их элементах представляет статически неопределимую задачу. Особый интерес для исследования вызывают конструкции, включающие элементы из материала с памятью формы. Необычность и разнообразие функциональных свойств материалов с ЭПФ обеспечивают им самое широкое применение в различных отраслях науки и техники.

Сплавы с эффектом памяти формы - это новый класс материалов, способных в процессе нагрева возвращать большие предварительно заданные неупругие деформации. Такое поведение и получило название эффекта памяти формы, а сами сплавы были отнесены к классу функциональных. Название феномена подчеркивает особенность деформирования, когда тело изменяет свою форму не под действием механической силы, а в результате изменения температуры, преобразуя, таким образом, тепловую энергию в механическую. Если в процессе нагрева элемента воспрепятствовать его формовосстановлению, то в нем будут генерироваться реактивные напряжения, величина которых зависит от предварительной деформации и может превосходить предел прочности материала [1,2]. Изучение влияния различных факторов на процесс развития реактивных усилий представляет большой практический интерес. Такими факторами могут быть величина остаточных неупругих деформаций, полученная в процессе предварительного нагружения, а также напряжения, которые остаются после разгрузки в статически неопределимой системе. В данной работе проводится расчет остаточных деформаций и напряжений в элементах некоторой системы.

Рассмотрим систему рис.1а. Пусть стержень 1, длиной l_1 , изготовлен из материала с модулем упругости E_1 , а стержень 2 (длиной l_2) - из материала с эффектом памяти формы (модуль упругости E_2). Стержень ОА считается абсолютно жестким, и не подвергается изгибу. Площадь поперечного сечения среднего стержня примем равным F_1 , а крайнего стержня - F_2 . Определим деформации стержней 1 и 2 под нагрузкой P .

Из равенства моментов сил относительно точки О (рис 1б), имеем:

$$\eta L \cdot N_1 + L \cdot N_2 = L \cdot P,$$

Откуда получим

$$\eta N_1 + N_2 = P, \quad (1)$$

Рассмотрим деформацию системы для нахождения недостающего уравнения при определении неизвестных усилий. Обозначив удлинения стержней $\Delta_1 = \Delta l_1$ и $\Delta_2 = \Delta l_2$, из подобия треугольников (рис.1в) имеем совместность деформаций: $\frac{\eta L}{L} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$,

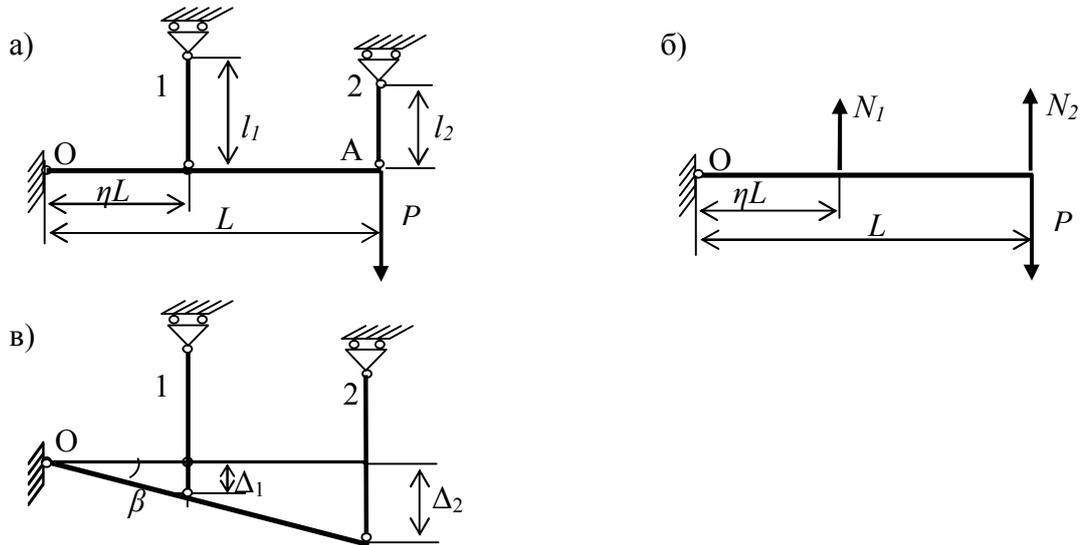
Откуда получим: $\eta \Delta_2 = \Delta_1$. (2)

1. Рассмотрим работу системы в пределах упругости. При растяжении продольной силой удлинения стержней равны

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}, \quad (3)$$

Из формул (3), учитывая (1), получим усилия в системе:

$$N_1 = \frac{\eta P}{\frac{l_1 E_2 F_2}{l_2 E_1 F_1} + \eta^2}, \quad N_2 = \frac{P}{1 + \eta^2 \frac{l_2 E_1 F_1}{l_1 E_2 F_2}}. \quad (4)$$



Перемещения Будем считать диаграмму деформирования материала, из которого изготовлен стержень 2 одинаковой при растяжении и сжатии, аппроксимируя ее ломаной линией (рис. 2) как в мартенситном, так и в аустенитном состояниях. На рис. 2 обозначено: $\operatorname{tg} \alpha = E_2$; $\operatorname{tg} \alpha_1 = n_2 E_2$, где E_2 – модуль упругости и $n_2 E_2$ – модуль упрочнения на участке фазовой текучести материала ($n_2 < 1$); $\sigma_{\text{фн}}$, $\sigma_{\text{фк}}$ – напряжения, соответственно начала и конца фазовой текучести материала; σ_{2T} – предел дислокационной текучести материала.

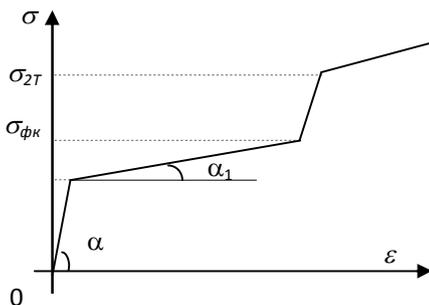


Рис. 2

Перемещение конца стержня 2 определяется на этапах:

1) $0 \leq P \leq P_T$; - стержень 2 работает упруго;

2) $P_T \leq P < P_{1T}$; - стержень 2 получает неупругий деформации. Здесь при упругой работе стержня 1, P_T - нагрузка, при которой напряжения в стержне 2 достигают величины начала фазовой текучести материала, P_{1T} - нагрузка, при которой напряжения в стержне 1 достигают предела текучести σ_{1T} .

Рассмотрим зависимости между нагрузкой и перемещениями

1) $0 \leq P \leq P_T$;

Усилия в стержнях находятся по формулам (4), при этом перемещения концов стержней, с учетом формул (3) определяются формулами:

$$\Delta_1 = \frac{\eta P l_1 l_2}{l_1 E_2 F_2 + \eta^2 l_2 E_1 F_1}, \quad \Delta_2 = \frac{P l_1 l_2}{l_1 E_2 F_2 + \eta^2 l_2 E_1 F_1} \quad (5)$$

Из формул видно, что зависимость между P и Δ линейная, и при этом прямая, изображающая эту зависимость, проходит через начало координат.

Пусть в стержне 2 начинают появляться неупругие деформации, то есть максимальное напряжение достигло величины начала фазовой текучести:

$$N_2 = N_{2\phi} = \sigma_{\phi n} F_2.$$

Тогда соответствующая нагрузка из формулы (4) будет равна:

$$P_{\dot{o}} = \sigma_{\dot{o}i} F_2 \left(1 + \eta^2 \frac{l_2}{l_1} \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \right). \quad (6)$$

Из формулы (4) найдем усилие в стержне 1:

$$N_1 = \frac{\eta \sigma_{\dot{o}i} l_2 E_1 F_1}{l_1 E_2}$$

Перемещения, соответствующие этой нагрузке с учетом формул (5) будут определяться выражениями:

$$\Delta_1 = \eta l_2 \frac{\sigma_{\phi n}}{E_2}; \quad \Delta_{\dot{o}} = \Delta_2 = \frac{\sigma_{\dot{o}i}}{E_2} l_2. \quad (7)$$

2) $P_T \leq P \leq P_{1T}$.

Перемещение определяется упругим удлинением первого стержня ($N_1 < \sigma_{1T} F_1$) и удлинением среднего стержня, напряжения в котором превысили предел начала фазовой текучести ($N_2 > \sigma_{\phi n} F_2$).

Рассмотрим диаграмму растяжения стержня 2 на этом этапе (рис. 3).

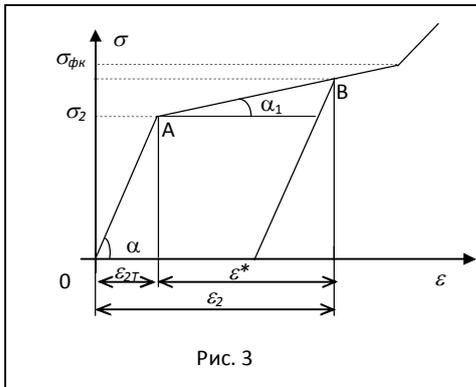
Пусть величина деформаций достигла значения ε_2 (на диаграмме соответствует точке В). Очевидно, что

$$\frac{\Delta_2}{l_2} = \varepsilon_2 = \varepsilon_{2T} + \varepsilon^* = \frac{\sigma_{\phi n}}{E_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_{\phi n}}{n_2 E_2},$$

откуда получим:

$$\sigma_2 = n_2 E_2 \frac{\Delta_2}{l_2} + \sigma_{\phi n} (1 - n_2). \quad (8)$$

Тогда усилие в стержне 2 будет равно



$$N_2 = \sigma_2 F_2 = n_2 E_2 F_2 \frac{\Delta_2}{l_2} + \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2). \quad (9)$$

Учитывая (1), (2) и (3), имеем:

$$P = \eta N_1 + N_2 = \Delta_2 \left(\frac{\eta^2 E_1 F_1}{l_1} + \frac{i_2 A_2 F_2}{l_2} \right) + \sigma_{\dot{o}i} F_2 (1 - n_2)$$

Отсюда, перемещения

$$\Delta_1 = \eta \frac{P - \sigma_{\dot{o}i} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 l_2 E_1 F_1 + i_2 l_1 A_2 F_2} l_1 l_2$$

$$\Delta_2 = \frac{P - \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 l_2 E_1 F_1 + n_2 l_1 E_2 F_2} l_1 l_2, \quad (10)$$

При этом усилия в стержнях имеют значения:

$$N_1 = \eta \frac{P - \sigma_{\dot{o}i} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 + i_2 \frac{l_1 A_2 F_2}{l_2 E_1 F_1}}, \quad N_2 = \frac{P}{\eta^2 \frac{l_2}{l_1} \frac{E_1 F_1}{n_2 E_2 F_2} + 1} + \frac{\eta^2 \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 + \frac{n_2 E_2 F_2 l_1}{E_1 F_1 l_2}} \quad (11)$$

Пусть максимальное напряжение в стержне 1 достигло предела текучести $N_1 = \sigma_{1T} F_1$. Определим при этом значении нагрузку $P = P_{1T}$ и усилие в стержне 2.

Из уравнения (11)

$$N_1 = \sigma_{1T} F_1 = \eta \frac{P - \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 + n_2 \frac{l_1 E_2 F_2}{l_2 E_1 F_1}}$$

Тогда

$$P_{1T} = \frac{\sigma_{1T} F_1}{\eta} \left(\eta^2 + n_2 \frac{l_1}{l_2} \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \right) + \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2). \quad (12)$$

Подставляя в уравнение (11), получим усилия в стержне 2 при этой нагрузке:

$$N_{2T} = \frac{\frac{\sigma_{1\dot{o}} F_1}{\eta} \left(\eta^2 + \dot{i}_2 \frac{l_1}{l_2} \frac{A_2 F_2}{E_1 F_1} \right)}{\eta^2 \frac{l_2}{l_1} \frac{E_1 F_1}{\dot{i}_2 A_2 F_2} + 1} + \sigma_{\dot{o}i} F_2 (1 - n_2) \left(\frac{1}{\eta^2 \frac{l_2}{l_1} \frac{E_1 F_1}{\dot{i}_2 A_2 F_2} + 1} + \frac{\eta^2}{\eta^2 + \frac{\dot{i}_2 A_2 F_2 l_1}{E_1 F_1 l_2}} \right) \quad (13)$$

Перемещения концов стержней определяются как:

$$\Delta_{1\dot{o}} = \frac{\sigma_{1\dot{o}}}{E_1} l_1 \quad \Delta_{2\dot{o}} = \frac{\sigma_{1\dot{o}}}{\eta E_1} l_1 \quad (14)$$

Рассмотрим разгрузку

По теореме о разгрузке [3], из действительных напряжений и деформаций, соответствующим данной нагрузке вычитаются напряжения и деформации, вычисленные в предположении об упругом поведении всех элементов. Тогда остаточные усилия определяются из выражений (4) и (11):

$$N_1^{ocm} = \frac{\eta P (1 - n_2)}{\left(\eta^2 \frac{l_2 E_1 F_1}{l_1 E_2 F_2} + n_2 \right) \left(\frac{E_2 F_2 l}{l_2 E_1 F_1} + \eta^2 \right)} - \frac{\eta \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 + n_2 \frac{l_1 E_2 F}{l_2 E_1 F_1}}. \quad (15)$$

$$N_2^{ocm} = \frac{\eta^2 \sigma_{\phi n} F_2 (1 - n_2)}{\eta^2 + \frac{n_2 E_2 F_2 l_1}{E_1 F_1 l_2}} - \frac{\eta^2 P (1 - n_2)}{\left(\eta^2 \frac{l_2}{l_1} \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + n_2 \right) \left(\frac{l_1}{l_2} \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + \eta^2 \right)}. \quad (16)$$

По теореме о разгрузке, остаточное перемещение конца второго стержня определится из выражений (5), (10):

$$\Delta_2^{ocm} = \frac{P l_2 (1 - n_2)}{E_2 F_2 \left(\eta^2 \frac{l_2 E_1 F_1}{l_1 E_2 F_2} + n_2 \right) \left(1 + \eta^2 \frac{l_2 E_1 F_1}{l_1 E_2 F_2} \right)} - \frac{\sigma_{\phi n} F_2 l_2 (1 - n_2)}{E_2 F_2 \left(\eta^2 \frac{l_2 E_1 F_1}{l_1 E_2 F_2} + n_2 \right)}. \quad (18)$$

По полученным формулам в безразмерном виде построены графики (рис. 4,5,6,7) зависимостей усилий в стержнях от приложенной нагрузки Р/Рт. По формулам (15)-(16) вычислены изменения усилий при разгрузке (на графике показаны стрелками). При этом основные параметры определялись значениями: $l_2/l_1=1$, $E_2/E_1=0,25$, $\eta=0,2$, $n_2=0,01$.

На рис. 4 линия 1 при $l_2/l_1=0,5$, линия 2 при $l_2/l_1=2$, величины Рт=1728 и 2112Н соответственно. На рис. 5 линия 1 при $\eta=0,1$ и линия 2 при $\eta=0,4$ (Рт=1664 и 2624Н). На рис. 6 линия 1 при $E_2/E_1=0,7$, линия 2 при $E_2/E_1=0,25$ (Рт=1691 и 1856Н). На рис. 7 линия 1 при $n_2=0,0001$, линия 2 при $n_2=0,1$ (Рт=1856Н).

На рис. 8 и 9 в безразмерном виде построены графики зависимостей нагрузки и усилий в стержнях от перемещений конца второго стержня: Δ/Δ_T . По формулам (15)-(18) вычислены изменения усилий при разгрузке (на графике показаны стрелками).

На рис. 8 нагрузка Р/Рт от перемещений Δ/Δ_T линия 1 при $\eta=0,2$ и линия 2 при $\eta=0,3$ (Рт=1856 и 2176Н, $\Delta_T=3,2 \cdot 10^{-4}$ м). На рис. 9 усилия $N_1/\text{Рт}$ и $N_2/\text{Рт}$ от Δ/Δ_T линия 1 при $\eta=0,2$ и линия 2 при $\eta=0,3$ (Рт=1856 и 2176Н, $\Delta_T=3,2 \cdot 10^{-4}$ м).

Из графиков видно, что усилия N_1 в стержне 1 возрастает резко после величины Р/Рт=1, в то время как усилие N_2 во втором стержне (в котором появляются неупругие деформации) теряет темп роста за счет перераспределения нагрузки.

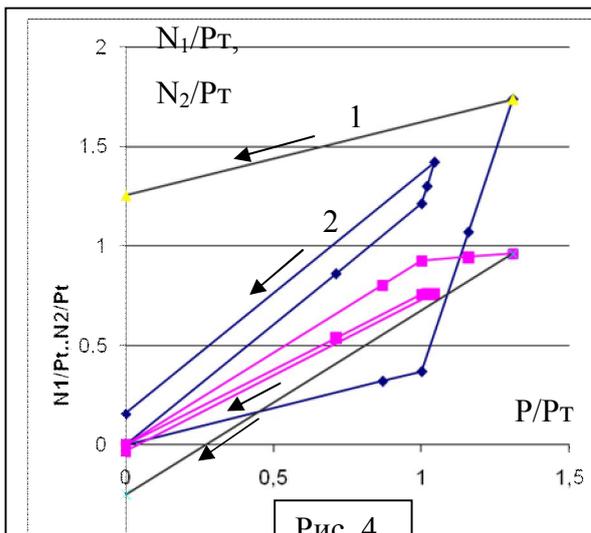


Рис. 4

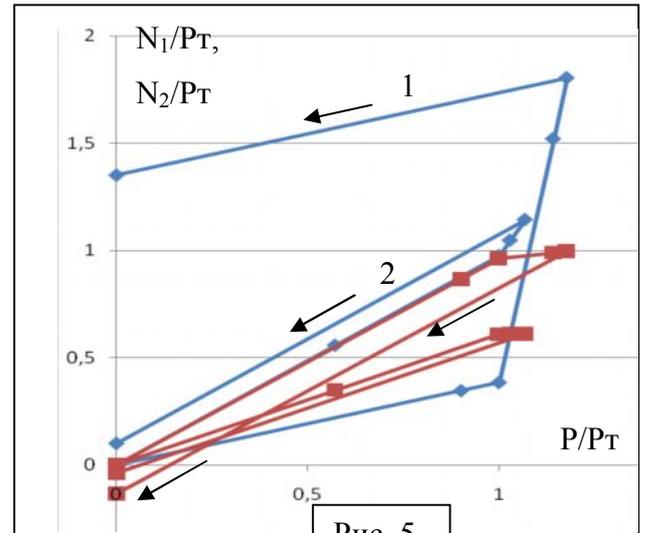


Рис. 5

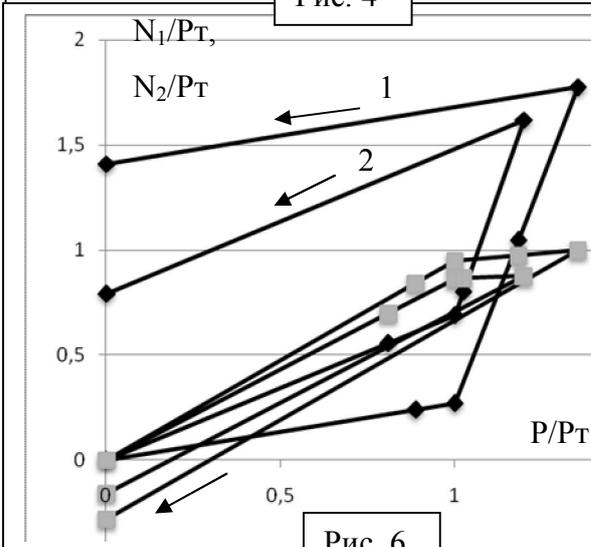


Рис. 6

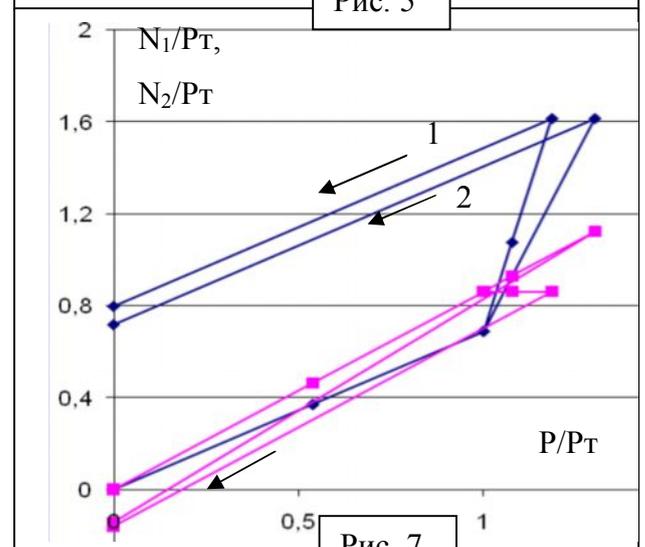


Рис. 7

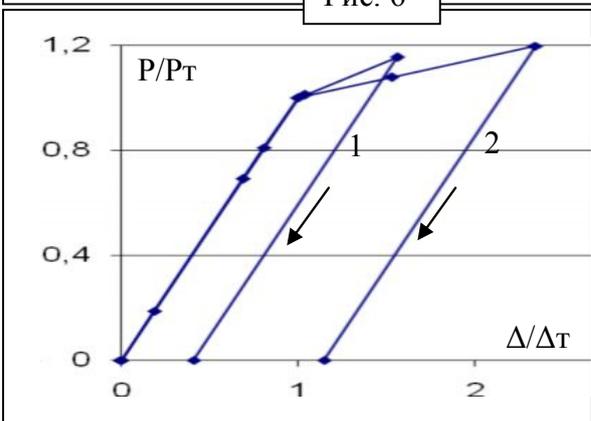


Рис. 8

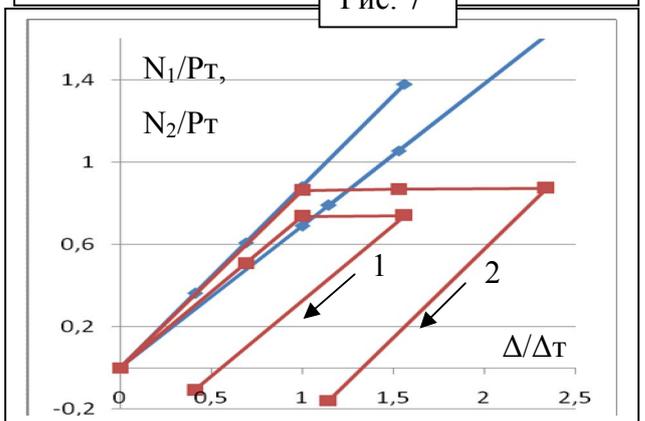


Рис. 9

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. – Бишкек: Билим, 1991. – 116с.
2. Абдрахманов С.А., Ибрагимов Р.Ш., Маматова Ж. К. Механика деформируемого стержня из никелида титана. – Бишкек: Известия ВУЗов, 2005, № 2, с. 169-171.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.