МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И. Раззакова

Кафедра «Прикладная математика»

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Типовые расчеты для самостоятельной работы студентов второго курса по курсу «**Прикладная математика**»

Бишкек 2011

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
«Прикладная математика»
Прот. № 9 от 26.05.2011

«Одобрено»
Методической комиссией
ФИТ
Прот. № 8 от 10.05..2011г.

УДК 517.5

Составители: ДЖАНАЛИЕВ Н.Р., АБДЫЛДАЕВА А.Р.

Задачи. Теории функции комплексного переменного. Типовые расчеты для самостоятельной работы студентов второго курса по курсу «Прикладная математика» / КГТУ им. И.Раззакова; сост.: Н.Р.Джаналиев, А.Р.Абдылдаева. - Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 26 с.

Предлагаемые контрольные задания по функциям комплексного переменного содержат необходимый минимум задач и упражнений. Для каждого задания даётся подробное решение типовых задач.

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Аширбаев Б.Ы.

Задания для самостоятельной работы студентов

Задание 1. Возвести в указанную степень комплексное число, найти все значения корней из данного комплексного числа.

1. $(4-4i)^3$	2. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$
3. $(2-2i)^7$	4. $\sqrt[5]{2-2i}$
5. $(1+\sqrt{3}i)^9$	6. $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$
7. $(\sqrt{3}-3i)^6$	8. $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$
9. $(1+\sqrt{3}i)^8$	10. $\sqrt[5]{-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i}$
11. $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^4$	12. $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$
13. $(-\sqrt{3}+i)^4$	14. $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$
15. $(1+i)^{10}$	16. $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$
17. $\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3$	18. $\sqrt[3]{2+2i}$
19. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$	20. $\sqrt[5]{-1+i}$
21. $\sqrt[4]{-18-18\sqrt{3}i}$	22. $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$
23. $\sqrt[4]{-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i}$	24. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$
25. $\sqrt[3]{27}$	26. $\sqrt[4]{-9}$
27. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$	28. $\sqrt[5]{i}$
29. $\sqrt[6]{-i}$	30. $\sqrt[3]{-8}$

Пример 1. Найти $z_1 = (\sqrt{3}-i)^3$.

Решение: Модуль данного числа $r=\sqrt{3+1}=2;\quad x>0,\quad y<0$ поэтому

$\varphi = arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6};.$

Комплексное число $z=\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме запишется $z\ = 2[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}).$ Возведём данное число в третью степень. $z_1 = z^3 = 2^3[(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}]^3 = 8(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}) = -8i.$

Пример 2. Найти все значение корня $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$ и построить их на комплексной плоскости.

Решение: Найдём модуль и аргумент комплексного числа: $r=|z|=\sqrt{1+3}=2,$ так как x<0, y<0, то

$$\varphi = arctg\ \left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + (-\pi) = arctg\ \sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa}{4} \right).$$

Полагая κ= 0, 1, 2, 3, найдём

При κ=0:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} \right) = \sqrt[3]{2}\left[cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}) \right] = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right),$$

При κ=1:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left[cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) \right] = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

При κ=2:

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left[cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}) \right] = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right),$$

При κ=3:

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(cos\,\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left[cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) \right] = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

Задание 2. Вычертить область плоскости *Д*, заданную системами неравенств; область заштриховать, границы области, ей принадлежащие, вычертить одним цветом, а не принадлежащие – другим.

1. $\begin{cases} 1 \le |z-i| < 2 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \\ \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} |z| > 1 \\ 0 < \operatorname{Re} z \le 2 \\ -1 < \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} |z-1| \le 1 \\ z > 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} |z+i| \ge 1 \\ |z| < 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} |z-i| \le 2 \\ \operatorname{Re} z > 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} |z+1| < 1 \\ |z-i| \le 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} |z-1| < 1 \\ \arg z \le \frac{\pi}{4} \\ \arg(z-1) > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

8. $\begin{cases} |z-1| > 1 \\ |z-1-2i| > 1 \\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} |z+1| \ge 1 \\ |z+i| < 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} |z+i| \le 2 \\ |z-i| > 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 1 < z \cdot \bar{z} < 2 \\ \operatorname{Re} z > 0 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} |z-1-i| \le 1 \\ \operatorname{Re} z \ge 1 \\ \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} |z-1| > 1 \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3 \\ -1 \le \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} |z-1+i| > 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \\ \operatorname{Im} z \le -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} z \cdot \bar{z} \le 2 \\ \operatorname{Re} z < 1 \\ \operatorname{Im} z \ge -1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} |z| < 2 \\ \operatorname{Re} z \ge 1 \\ \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

17. $\begin{cases} |z-i| \le 2 \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} |z-i| \le 1 \\ \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} |z-1-i| \ge 1 \\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 2 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1 \le |z-i| < 2 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \\ \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \operatorname{Im} z^2 < 4 \\ -1 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} |z| < 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1) \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

23. $\begin{cases} \operatorname{Im} \bar{z}^{2} > -2 \\ |z| < 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} |z-1-i| < 1 \\ \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

25. $\begin{cases} |z| \le 1 \\ \arg(z+i) > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

26. $\begin{cases} \operatorname{Im} \dfrac{2}{z} \le 1 \\ \arg z > -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

27. $\begin{cases} \operatorname{Im} z^2 > 1 \\ |z| \le 3 \end{cases}$

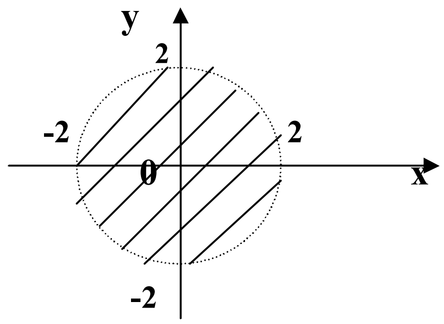
28. $\begin{cases} |z+i| < 1 \\ -\dfrac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \arg z < \dfrac{\pi}{4} \\ \arg(z-1) \ge \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le \operatorname{Im} z < 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} |z| < 2 \\ |z-2i| \le 2 \\ \operatorname{Re} z \ge 0 \end{cases}$

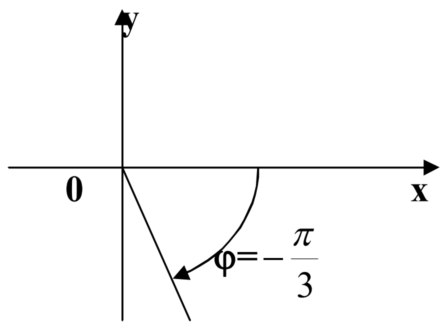
Пример 3. Вычертить область плоскости: $|z| < 2$.

Решение: Неравенству $|z| < 2$ удовлетворяют точки круга с центром в начале координат радиуса 2, за исключением его границы.



Пример 4. Вычертить линию на плоскости: $arg\ z = -\frac{\pi}{3}$.

Решение: По условию $\varphi = argz = -\frac{\pi}{3}$, следовательно, все точки этого множества лежат на одном луче $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.



Задание 3. В заданной функции выделить вещественную и мнимую части; проверить аналитичность функции, вычислить ее значение при заданном значении аргумента.

1. $w = e^{-i\bar{z}}; z = \frac{\pi}{4} + 2i.$
2. $w = \ln iz; z = 3 + 4i.$
3. $w = z \cdot \operatorname{Re} z^2\ ; z = -2 - 3i.$
4. $w = \sin i\bar{z}; z = \frac{1}{2} - \frac{\pi \cdot i}{6}.$
5. $w = z \cdot e^{z}; z = 2 - \frac{\pi}{3} i.$
6. $w = \ln \bar{z}; z = 2 + 2i.$
7. $w = \cos(2z - 3); z = 2i.$
8. $w = e^{\frac{1}{z}}; z = \frac{4 + 2\pi \cdot i}{\pi^2 + 4}.$
9. $w = e^{|z|^2} \cdot \operatorname{Im} z; z = 2 - 9i.$
10. $w = sh\bar{z}; z = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} i.$
11. $w = (e^{z} - 2)^2; z = \frac{\pi}{2} i.$
12. $w = shz; z = 1 - \frac{\pi}{2} i.$

13. $w = z^3 - i\bar{z}; z = -1 + i.$

14. $w = \sin z; z = \dfrac{\pi}{4} + i.$

15. $w = \sin z \cdot chz; z = \pi \cdot i.$

16. $w = i\bar{z}^2; z = e^{(1-i)^2}.$

17. $w = z + \dfrac{i}{z}; z = e^{1+\frac{\pi}{4}i}.$

18. $w = \bar{z} + i \cdot z; z = ch(2 + \dfrac{\pi}{4}i).$

19. $w = \sin z \cdot shz; z = \dfrac{\pi}{2}i.$

20. $w = \ln(1 + z^2); z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}.$

21. $w = e^{z^2}; z = 2(1+i) \cdot \sqrt{\pi}.$

22. $w = e^{z^{-}}; z = \dfrac{\pi}{4} + 2i.$

23. $w = z + \dfrac{i}{\bar{z}}; z = e^{1-\frac{3\pi}{4}i}.$

24. $w = i \cdot \ln \bar{z}; z = 2 - \dfrac{\pi}{2}i.$

25. $w = \dfrac{1}{z}; z = \sin(\dfrac{\pi}{4} + i).$

26. $w = i \cdot z + \dfrac{1}{z}; z = e^{2-\frac{\pi}{4}i}.$

27. $w = \sin\dfrac{i}{z}; z = \dfrac{8 + 2\pi \cdot i}{\pi^2 + 16}.$

28. $w = z^3; z = i \cdot e^{i \cdot \ln i}.$

29. $w = ch(i \cdot \bar{z}); z = \dfrac{\pi}{4} - 2i.$

30. $w = \dfrac{\bar{z}}{z}; z = 3 + 4i.$

Пример 5. Проверить аналитичность функции $w = \dfrac{1}{z}$.

Решение. Выделим вещественную и мнимую части:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Значит

$$U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; \qquad V(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Проверим условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{0-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Таким образом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Условия Коши-Римана выполняются, значит функция аналитична во всей плоскости за исключением точки *z=0.*

Задание 4. Определить круг сходимости для данных рядов, исследовать поведение ряда в заданных точках («сходится абсолютно», «сходится условно», «расходится»). Круг сходимости начертить, точки отметить на чертеже.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n (n+1) \cdot n^2}; \; z = 0, \; z = 2+3i, \; z = 5-i.$

2. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1)^{2n}}{n+\sqrt{n}}$; $z=0,\ z=-1+i,\ z=-2-i.$

3. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n}$; $z=1+2i,\ z=-4-i,\ z=\sqrt{3}.$

4. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^{2n}}{2^n(n+\ln n)}$; $z=1,\ z=1-i,\ z=-1+2i.$

5. . $\sum_{n=1}^{\infty}(1+in)(z+i-1)^n$; $z=-2+i,\ z=1-\sqrt{3}i,\ z=2-i.$

6. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{(\sqrt{n}+1)\cdot n}$; $z=0,\ z=1,\ z=2+i.$

7. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n}}{\sqrt{n}}$; $z=0,\ z=-i,\ z=1+i.$

8. . $\sum_{n=1}^{\infty}i^n(z-3+i)^n$; $z=2-i,\ z=1-i,\ z=3-\sqrt{2}i.$

9. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{(n+1)\cdot n}$; $z=0,\ z=1,\ z=-i.$

10. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$; $z=0,\ z=3i,\ z=1+2i.$

11. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n\sqrt{n}}$; $z=0,\ z=1,\ z=1-i.$

12. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{2^n(n+1)}$; $z=1+i,\ z=-2+i,\ z=\sqrt{5}+2i.$

13. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n(z-i)^n}{(2i)^n}$; $z=0,\ z=3i,\ z=2+2i.$

14. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n(z+1)^n}{n^2}$; $z=0,\ z=-\frac{3}{4},\ z=-1+\frac{1}{2}i.$

15. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{\ln(n+1)}$; $z=0,\ z=3,\ z=1+i.$

16. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+i)^n}{3^n}$; $z=-1+i,\ z=3+3i,\ z=\sqrt{5}+i.$

17. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{i^n\cdot n^2}$; $z=0,\ z=1+i,\ z=3i.$

18. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{4^n\cdot\sqrt{n+1}}$; $z=0,\ z=2+i,\ z=2+2i.$

19. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$; $z=0,\ z=1+2i,\ z=3i.$

20. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^n}$; $z=-1+i,\ z=2+\sqrt{7}i,\ z=5-i.$

21. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^n}{(n+1)^2}$; $z=0,\ z=2+\frac{i}{2},\ z=2{,}1.$

22. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^n}{2^n(n^2+4)}$; $z=0,\ z=1+i,\ z=i.$

23. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n(n+1)\cdot n^2}$; $z=0,\ z=2+3i,\ z=5-i.$

24. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{2n}(z-1)^n}{2^n}$; $z=1+i,\ z=2,\ z=\frac{3}{2}.$

25. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2-i)^n}{2^n\cdot n}$; $z=2+\frac{i}{2},\ z=2+3i,\ z=-1+i.$

26. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^{2n}}{n+1}$; $z=0, z=i, z=1-i.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n^2+n\cdot\ln n}$; $z=0, z=3-i, z=2-i.$

28. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n}}{n+\sqrt[3]{(n+1)^2}}$; $z=0,\ z=1,\ z=\frac{i}{2}.$

29. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{2^{2n}(n^2+1)}$; $z=4+i,\ z=2+3i,\ z=-6i.$

30. . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z-1)^n}{(n^2+1)\cdot n}$; $z=0,\ z=1+\frac{i}{2},\ z=\frac{3}{2}.$

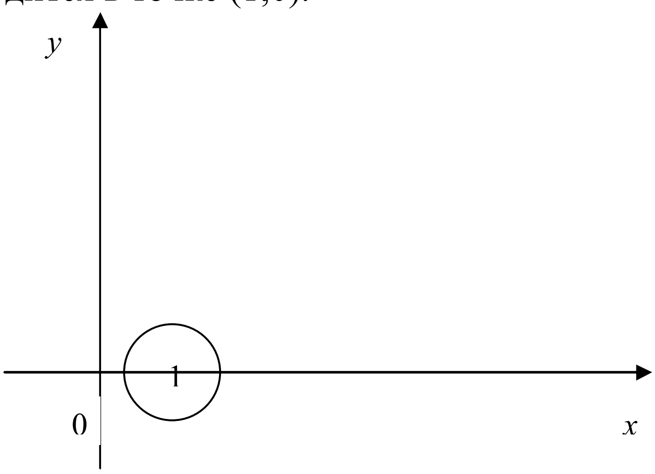
Пример 6. Определить круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(z-1)^n}{\sqrt{3n-2}\cdot 2^n}$ и исследовать его сходимость в точках $z=0,\quad z=\frac{5}{3},\quad z=1+\frac{i}{2}$

Решение. Найдем круг сходимости ряда, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(z-1)^{n+1}\sqrt{3n-2}\cdot 2^n}{\sqrt{3(n+1)-2}\cdot 2^{n+1}\cdot 3^n(z-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(z-1)\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}\cdot 2}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}|z-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}}=\frac{3}{2}|z-1|<1$$

$|z-1|<\frac{2}{3}$ - круг сходимости, радиус сходимости $R=\frac{2}{3}$, центр круга сходимости находится в точке (1;0).



Точка $z=0$ лежит вне круга сходимости, в этой точке ряд расходится.

Точка $z = 1 + \frac{i}{2}$ лежит внутри круга сходимости, в этой точке ряд сходится абсолютно.

Точка $z = \frac{5}{3}$ лежит на окружности круга сходимости. Исследуем поведение ряда в этой точке. Подставим в данный ряд значение $z = \frac{5}{3}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{5}{3} - 1 \right)^n}{\sqrt{3n-2} \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n}{\sqrt{3n-2} \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

Данный числовой ряд расходится (из теории числовых рядов в действительной области).

Задание 5. Найти все разложения по степеням заданных разностей данной функции. Указать область пригодности найденных разложений, сделать чертеж.

1. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ по степеням *(z+1)*;
2. $f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$ по степеням *z*;
3. $f(z) = \frac{1}{z^3 - z}$ по степеням *(z-1)*;
4. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}$ по степеням *z*;
5. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$ по степеням *z*;
6. $f(z) = \frac{1}{(2 - z)^2}$ по степеням *(z-3)*;
7. $f(z) = \frac{\sqrt[3]{1 + z^3}}{z}$ по степеням *z*;
8. $f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$ по степеням *(z+2)*;
9. $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + z^3}}$ по степеням *z*;
10. $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ по степеням *(z-1)*;
11. $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ по степеням *z*;
12. $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - z^3}}$ по степеням *z*;
13. $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ по степеням *(z+2)*;
14. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ по степеням *(z+1)*;

15. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ по степеням z;

16. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ по степеням *(z-1)*;

17. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3}$ по степеням z;

18. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4}$ по степеням *(z-1)*;

19. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-7z+10}$ по степеням *(z-2)*;

20. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z}$ по степеням *(z+1)*;

21. $f(z)=\dfrac{\sqrt[3]{1-z^3}}{z}$ по степеням z;

22. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z}$ по степеням *(z+2)*;

23. $f(z)=\dfrac{1}{(2-z)^2}$ по степеням *(z-1)*;

24. $f(z)=\sqrt{1+z^2}$ по степеням z;

25. $f(z)=\dfrac{2}{z^2-4z}$ по степеням *(z-2)*;

26. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}$ по степеням z;

27. $f(z)=\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ по степеням z;

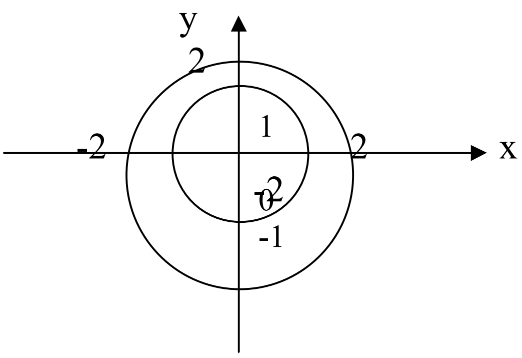
28. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$ по степеням *(z-2)*;

29. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z}$ по степеням *(z+1)*;

30. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ по степеням *(z-2)*.

Пример 7. Найти все разложения функции $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ по степеням *z*.

Решение. Функция *f(z)* имеет две особые точки: $z_1=-2$ *и* $z_2=1$.



Следовательно, получится три области:

1. круг $|z|<1$;
2. кольцо $1<|z|<2$;
3. внешность круга $|z|\le 2$ *т.е.* $2<|z|<+\infty$.

Найдем ряд Лорана для функций *f(z)* в каждом из этих областей. Для этого представим *f(z)* в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z-2)(z-1)}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}.$$

1. Разложение в круге $|z|<1$: Имеем $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}-\dfrac{1}{1-z}$.

Используя формулы разложения в ряд Тейлора, получим

$$\frac{1}{z-1}=1+z+z^2+z^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}.$$

Тогда окончательно разложение функции *f(z)* в ряд в области $|z|<1$ имеет вид:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+...-(1+z+z^2+z^3+...)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3+...$$

это разложение является рядом Тейлора функции *f(z)*.

2. Разложим функции *f(z)* в ряд в кольце $1<|z|<2$. Преобразуем функции $f(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}+\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$.

Применяя формулы разложения в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+...+(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

3. Разложение в области $|z|>2$. Функцию *f(z)* представим в следующем виде:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right)$$

Используя формулы разложения в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+...+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+\ldots\right) \quad \text{или} \quad f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\ldots.$$

Из рассмотренных примеров видно, что для одной и той же функции *f(z)* ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных областей.

Задание 6. Для данных функций определить все особые точки, установить их характер и определить вычеты в них.

1. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$
2. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2(1+z^2)}$
3. $f(z)=\dfrac{(z-1)^3}{z^3}$
4. $f(z)=\dfrac{1}{z}ch\dfrac{1}{z}$
5. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$
6. $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$
7. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2-1)^2}$
8. $f(z)=\dfrac{z^3}{z^3-1}$
9. $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin\dfrac{1}{z}$
10. $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z}$
11. $f(z)=\dfrac{1}{z}(1-e^{-\frac{1}{z}})$
12. $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z-2)}$
13. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{\sin z}$
14. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-2)^2}$
15. $f(z)=\dfrac{1-chz}{z^3}$
16. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$
17. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$
18. $f(z)=thz$
19. $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3+1}$
20. $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+4}$
21. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$
22. $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$
23. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$
24. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^3}$
25. $f(z)=z\cdot sh\dfrac{1}{z}$
26. $f(z)=\dfrac{z}{1-z^4}$
27. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$
28. $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z}$
29. $f(z)=\dfrac{shz}{z}$
30. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$

Пример 8. Определить характер особой точки *z=0* функции $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2chz}$.

Решение. Точка $z=0$ есть полюс функции $f(z)$, так как она является нулем знаменателя. Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=2+z^2-2chz.$

Для неё $\varphi(0)=0$. Найдем порядок нуля $z=0$ этой функции. Имеем

$\varphi'(z)=2z-2shz, \quad \varphi'(0)=0;$

$\varphi''(z)=2-2chz, \quad \varphi''(0)=0;$

$\varphi'''(z)=-2shz, \quad \varphi'''(0)=0;$

$\varphi'^{V}(z)=-2chz, \quad \varphi'^{V}(0)=-2\neq 0;$

Таким образом, $z=0$ есть нуль четвертого порядка для функции $\varphi(z)$, а значит, для данной функции $f(z)$ точка $z=0$ есть полюс четвертого порядка.

Пример 9. Найти вычеты функции $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$ в её особой точке.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть точка $z=0$. Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. В самом деле, лорановское разложение функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид

$f(z)=\left(z^3\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!\,z^6}+\frac{1}{5!\,z^{10}}-...\right)=z-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^7}-...$ т.е. содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z=0$ равен нулю, так как коэффициент C_{-1} в лорановском разложении равен нулю.

Задание 7. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int\limits_{\lvert z+i\rvert=1}\frac{z}{(z-1)\cdot(z^2+1)}dz$	2. $\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{e^z}{z\cdot(1-z)^3}dz$
3. $\int\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\frac{z}{z^4-1}dz$	4. $\int\limits_{\lvert z\rvert=1}z\cdot\sin^2\frac{1}{z}dz$
5. $\int\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{ctgz}{4z-\pi}dz$	6. $\int\limits_{\lvert z-1-i\rvert=1}\frac{z}{z^3+1}dz$
7. $\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{1}{z\cdot(z^2+1)}dz$	8. $\int\limits_{\lvert z\rvert=1}e^{\frac{3}{z}}dz$
9. $\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{z-1}{(z^2+1)^2}dz$	10. $\int\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{e^z}{z^2\cdot(z^2-9)}dz$
11. $\int\limits_{\lvert z\rvert=1}z\cdot\cos^2\frac{1}{z}dz$	12. $\int\limits_{\lvert z\rvert=4}\frac{1}{z\cdot(z+3)}dz$
13. $\int\limits_{\lvert z-2\rvert=\frac{3}{2}}\frac{z}{(z-1)\cdot(z-2)^2}dz$	14. $\int\limits_{\lvert z-1\rvert=1}\frac{1}{z^4-1}dz$
15. $\int\limits_{\lvert z-1-i\rvert=\sqrt{2}}\frac{1}{(z-1)^2\cdot(z^2+1)}dz$	16. $\int\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{\sin z}{z^2}dz$
17. $\int\limits_{\lvert z+i\rvert=\frac{3}{2}}\frac{1}{z+z^3}dz$	18. $\int\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{2z-1-i}{(z-1)\cdot(z-i)}dz$

19. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{z}{(z-i)\cdot(z-3)}dz$

20. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z-\pi\cdot i}dz$

21. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{shz\pi}{(z-1)\cdot(z^2+4)^2}dz$

22. $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=2} \frac{\cos 2z}{z^2+3z+2}dz$

23. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z\cdot(z-1)^2}dz$

24. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)^2\cdot(z^2+3)}dz$

25. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{-z}}{(z+\pi\cdot i)\cdot(z+5)}dz$

26. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos z}{z\cdot(z-2)^2}dz$

27. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}dz$

28. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{chz}{(z-\pi\cdot i)^2\cdot(z+\frac{\pi\cdot i}{2})^2}dz$

29. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$

30. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}dz$

Пример 10. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{\ell} \frac{dz}{z^3+1}$, где e – окружность $|z-1-i|=1$.

Решение. Решив уравнение $z^3+1=0$, находим простые нули знаменателя $z_1=-1,\quad z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad z_3=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, которые будут простыми полюсами функции $f(z)=\dfrac{1}{z^3+1}$. Только третий полюс лежит внутри окружности e.

Находим $res f(z_3)=\dfrac{1}{(z^3+1)'}\Big|_{z=z_3}=\dfrac{1}{3z^2}\Big|_{z=z_3}=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{6}$.

Следовательно,

$$\int\limits_{e}\frac{dz}{z^3+1}=2\pi i\left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{6}\right)=\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i).$$

Пример 11. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{e} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz,$ где e – окружность $|z|=3$.

Решение. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Полюсы *i, -i, 2* находятся внутри замкнутого контура ℓ.

Отсюда

$$res f(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-2)}=\frac{1}{2i(2-i)};.$$

$$res f(-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z-2)}=\frac{-1}{2i(2+i)};$$

$$res f(2)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{(z^2+1)}=\frac{4}{5}.$$

Тогда
$$\int_\ell \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz=2\pi i\left[\frac{1}{2i(2-i)}-\frac{1}{2i(2+i)}+\frac{4}{5}\right]=\pi\left(\frac{1}{2-i}-\frac{1}{2+i}+\frac{8}{5}i\right)=$$
$$=\pi\left(\frac{2}{5}i+\frac{8}{5}i\right)=2\pi i.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_\ell \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$, где ℓ – окружность $|z|=2$.

Решение. В круге $|z|\le 2$ подынтегральная функция имеет две особые точки *z=1* и *z=0*. Точка *z=1* есть простой полюс, поэтому

$$\underset{z=1}{res}\, f(z)=\underset{z=1}{res}\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right)=\left.\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\sin 1.$$

Для устанавления характера особой точки *z=0* напишем ряд Лорана для функции $\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ в окрестности этой точки. Имеем

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}=-(1+z+z^2+\ldots)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$
$$=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)\frac{1}{z}+\frac{C_{-2}}{z^2}+\frac{C_{-3}}{z^3}+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}C_n z^n$$

правильная часть, $C_{-к}\neq 0,\ к=2,3,\ldots$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями *z*, то точка *z=0* является существенно особой точкой. Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\underset{z=0}{res}\, f(z)=\underset{z=0}{res}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}=C_{-1}=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)=-\sin 1.$$

Следовательно, $\int_\ell \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i(\sin 1-\sin 1)=0.$

Ответы

Задание 1.

1. $-2^7(1+i)$

2. $\pm\sqrt{3}\mp i, \pm 1\pm i\sqrt{3}$

3. $2^{10}(1+i)$

4. $\sqrt[10]{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right], k=0,1,2,3,4$

5. -2^9

6. $\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right], k=0,1,2$

7. $864(1-i\sqrt{3})$

8. $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), \mp\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

9. $128(-1+i\sqrt{3})$

10. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right], k=0,1,2,3,4$

11. -16

12. $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)\right], k=0,1,2,3$

13. $-8(1+i\sqrt{3})$

14. $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)\right], k=0,1,2,3$

15. $32i$

16. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i), \mp\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$

17. $\frac{1}{8}$

18. $\sqrt[6]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right], k=0,1,2$

19. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

20. $\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right], k=0,1,2,3,4$

21. $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i\sqrt{3}), \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}-i)$

22. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mp\frac{i}{2}, \pm\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2})$

23. $\frac{1}{4}(\pm\sqrt{3}\pm i), \frac{1}{4}(\mp 1\pm i\sqrt{3})$

24. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(-1\pm i\sqrt{3})$

25. $3, \frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$

26. $\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)\right], k=0,1,2,3$

27. $\pm\sqrt{3}\pm i), \mp 1\pm i\sqrt{3})$

28. $\cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\right), k=0,1,2,3,4$

29. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}\right), k=0,1,2,3,4,5$

30. $-2, 1\pm i\sqrt{3}$

Задание 3.

1. $u=e^{-y}\cdot\cos x; v=-e^{-y}\cdot\sin x$; функция не аналитична; $e^{-2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

2. $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2); v=-arctg\frac{x}{y}$; функция аналитична всюду, кроме z=0; $\ln 5-i\cdot arctg\frac{3}{4}$.

3. $u=x^3-xy^2; v=x^2y-y^3$; функция не аналитична; $10+15i$.

4. $u=\sin y\cdot chx; v=\cos y\cdot shx$; функция не аналитична; $-\frac{1}{2}(ch\frac{1}{2}-i\sqrt{3}sh\frac{1}{2})$.

5. $u=e^x\cdot(x\cos y-y\sin x); v=e^x\cdot(x\sin y+y\cos y)$; функция аналитична; $e^2\frac{1}{2}(6-\pi\sqrt{3}-i(6\sqrt{3}+\pi))$.

6. $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2); v=-arctg\frac{y}{x}$;; функция не аналитична; $\ln\left|2\sqrt{2}\right|-\frac{\pi}{4}i$.

7. $u=\cos(2x-3)\cdot ch2y; v=-\sin(2x-3)\cdot sh2y$; функция аналитична; $\cos 3\cdot ch4+i\sin 3\cdot sh4$.

8. $u=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\cos\frac{y}{x^2+y^2}; v=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\sin\frac{y}{x^2+y^2}$; функция аналитична всюду, кроме z=0 ; $-i\cdot e$.

9. $u=e^{x^2+y^2}\cdot y; v=0$; функция не аналитична; $-9e^{85}$.

10. $u=\cos y\cdot shx; v=-chx\cdot\sin y$; функция не аналитична; $-\frac{i}{2\sqrt{2}}(e+1)$.

11. $u=e^{2x}\cos 2y-4e^x\cos y+4; v=e^{2x}\sin 2y-4e^x\sin y$; функция аналитична; $3-4i$.

12. $u=shx\cdot\cos y; v=\sin y chx$; функция аналитична; $-\frac{i}{2e}(e^2+1)$.

13. $u=x^3-3xy^2-y; v=3x^2y-y^3-x$; функция не аналитична; $1+3i$.

14. $u=\sin x\cdot chy; v=\cos x\cdot shy$; функция аналитична; $\frac{\sqrt{2}}{4e}\left[e^2+1+i(e^2-1)\right]$.

15. $u=\sin x\cdot chx\cdot chy\cdot\cos y-\cos x\cdot shy\cdot shx\cdot\sin y$;
$v=\cos x\cdot\cos y\cdot chx\cdot shy+\sin x\cdot\sin y\cdot shx\cdot chy$ функция аналитична; $-i\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}$.

16. $u=2xy; v=x^2-y^2$; функция не аналитична; $-\sin 4+i\cos 4$.

17. $u=x+\frac{y}{x^2+y^2}; v=y+\frac{x}{x^2+y^2}$; функция аналитична всюду, кроме z=0; $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{e^2+1}{e}$.

18. $u=x-y; v=x-y$; функция аналитична; $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2}(1+i)$.

19. $u=\sin x\cdot shx\cdot chy\cdot\cos y-\cos x\cdot chy\cdot shx\cdot\sin y$;
$v=\cos x\cdot\cos y\cdot shx\cdot shy+\sin y\cdot\sin x\cdot chx\cdot chy$
функция аналитична; $\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}-e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$.

20. $u=\frac{1}{2}\ln(1+2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)^2); v=arctg\frac{2xy}{1+x^2-y^2}$;; функция аналитична; $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i$

21. $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy; v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$;; функция аналитична; 1

22. . $u=\cos 2y; v=\sin 2y$;; функция не аналитична; -1

23. . $u=x-\frac{y}{x^2+y^2}; v=y+\frac{x}{x^2+y^2}$;; функция не аналитична; $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{e^2-1}{e}+i\frac{e^2+1}{e})$

24. . $u = arctg\frac{y}{x}; v = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$;; функция не аналитична; $-1+\frac{i}{2}\ln(\frac{16+\pi^2}{4})$

25. . $u = \frac{x}{x^2+y^2}; v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;; функция аналитична всюду, кроме z=0;

$-\frac{\sqrt{2}}{ch2}(ch1+ish1)$

26. . $u = -y+\frac{x}{x^2+y^2}; v = x-\frac{y}{x^2+y^2}$;; функция аналитична всюду, кроме z=0;

$\sqrt{2}(1+i)ch2$

27. . $u = \sin\frac{y}{x^2+y^2}\cdot ch\frac{x}{x^2+y^2}; v = \cos\frac{y}{x^2+y^2}\cdot sh\frac{x}{x^2+y^2}$;; функция аналитична всюду, кроме z=0; $ch2$

28. . $u = x^3-3y^2x; v = 3x^2y-y^3$;; функция аналитична; $-ie^{-\frac{3\pi}{2}}$)

29. . $u = chy\cdot\cos x; v = shy\cdot\sin x$;; функция не аналитична; $\frac{\sqrt{2}}{2}(ch2-i\cdot sh2)$

30. . $u = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}; v = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$;; функция не аналитична; $-\frac{1}{25}-\frac{24}{25}i$

Задание 4.

1. $|z-2|\le 3, z=0, z=2+3i$ абсолютно сходится; $z=5-i$ расходится.
2. $|z+1|<1, z=0$ условно сходится; $z=-1+i, z=-2-i$ расходится.
3. $|z-i|<2, z=1+2i$ абсолютно сходится; $z=-4-i, z=\sqrt{3}$ расходится.
4. $|z+1|<2, z=-1+2i$ условно сходится; $z=1, z=1-i$ расходится.
5. $|z-1+i|<1, z=1-\sqrt{3}i$ абсолютно сходится; $z=-2+i, z=2-i$ расходится.
6. $|z-1-i|\le 1, z=1, z=2+i$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.
7. $|z-i|<1, z=0$ условно сходится; $z=-i, z=1+i$ расходится.
8. $|z-3+i|<1, z=3-\sqrt{2}i$ абсолютно сходится; $z=2-i, z=1-i$ расходится.
9. $|z-1+i|\le 1, z=1, z=-i$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.
10. $|z-2i|\le 1, z=1+2i, z=3i$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.
11. $|z+i|\le 1, z=0, z=1-i$ абсолютно сходится; $z=1$ расходится.
12.. $|z-i|<2, z=1+i$ абсолютно сходится; $z=-2+i, z=\sqrt{5}+2i$ расходится.
13. $|z-i|<2, z=0$ абсолютно сходится; $z=3i, z=2+2i$ расходится.
14. $|z+1|\le\frac{1}{2}, z=-\frac{3}{4}, z=-1+\frac{i}{2}$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.
15. $|z-1|<1, z=0, z=1+i$ условно сходится; $z=3$ расходится.
16. $|z+i|<3, z=-1+i$ абсолютно сходится; $z=3+3i, z=\sqrt{5}+i$ расходится.
17. $|z-i|\le 1, z=0, z=1+i$ абсолютно сходится; $z=3i$ расходится.
18. $|z-2|<2, z=2+i$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится; z=2+2i условно сходится.

19. $|z-2i| \le 1, z=3i, z=1+2i$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.
20. $|z+1| < 4, z=-1+i$ абсолютно сходится; $z=5-i, z=2+\sqrt{7}i$ расходится.
21. $|z-2| < \frac{1}{2}, z=2+\frac{i}{2}, z=2{,}1$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.
22. $|z+i| \le 2, z=0, z=i$ абсолютно сходится; $z=1+i$ расходится.
23. $|z-2| < 1, z=1$ условно сходится; $z=0, z=2+i$ расходится.
24. $|z-1| < 1, z=\frac{3}{2}$ абсолютно сходится; $z=2, z=1+i$ расходится.
25. $|z-2-i| < 2, z=2+\frac{i}{2}$ абсолютно сходится; $z=-1+i$ расходится, $z=2+3i$ условно сходится.
26. $|z+i| < 1, z=0$ условно сходится; $z=i, z=1-i$ расходится.
27. $|z-3| \le 1, z=3+i$ абсолютно сходится; $z=0, z=2-i$ расходится.
28. $|z-i| < 1, z=\frac{i}{2}$ абсолютно сходится; $z=1$ расходится, $z=0$ условно сходится.
29. $|z-2+i| \le 4, z=4+i, z=2+3i$ абсолютно сходится; $z=-6i$ расходится.
30. $|z-1| \le \frac{1}{2}, z=\frac{3}{2}, z=1+\frac{i}{2}$ абсолютно сходится; $z=0$ расходится.

Задание 5.

1.
$$a) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z+1)^n, |z+1| < 2$$
$$b) f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}} + \frac{2^n}{(z+1)^{n+1}}\right], 2 < |z+1| < 3$$
$$c) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(3^n - 2^n)\frac{1}{(z+1)^{n+1}}, |z+1| > 3$$

2.
$$a) f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{2n-1}, |z| < 1$$
$$b) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+1}}, |z| > 1$$

3.
$$a) f(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}} - 1\right)(z-1)^n, |z-1| < 1$$
$$b) f(z) = \frac{2}{2(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n, 1 < |z-1| < 2$$
$$c) f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}-1}{(z-1)^{n+1}}, |z-1| > 2$$

$$a)\, f(z)=\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{z}{4})^n-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{z}{2})^n, |z|<2$$

4. $$b)\, f(z)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{z}{4})^n, 2<|z|<4$$

$$c)\, f(z)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\left[1+(-1)^{n+1}2^n\right], |z|>4$$

5.
$$a)\, f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}z^{2n}, |z|<1$$
$$b)\, f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{1}{z^{2n+1}}, |z|>1$$

6.
$$a)\, f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}(z-3)^{n-1}, |z-3|<1$$
$$b)\, f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(z-3)^{n+1}}, |z-3|>1$$

7.
$$a)\, f(z)=\frac{1}{z}+\frac{z^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{3^n n!}z^{3n+2}, |z|<1$$
$$b)\, f(z)=1+\frac{1}{3z^3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\frac{1}{z^{3n+3}}, |z|>1$$

8.
$$a)\, f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}, |z+2|<1$$
$$b)\, f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}, 1<|z+2|<3$$
$$c)\, f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+2)^{n+1}}, |z+2|>3$$

9.
$$a)\, f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n n!}z^{3n}, |z|<1$$
$$b)\, f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n\cdot n!}\frac{1}{z^{3n+1}}, |z|>1$$

10.
$$a)\, f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^{2n}, |z-1|<1$$
$$b)\, f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{2n}}, |z-1|>1$$

11.
$$a)\, f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{2n-1}, |z|<1$$
$$b)\, f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n-1}}, |z|>1$$

12.
$$a)\, f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n n!}z^{3n}, |z|<1$$
$$b)\, f(z)=-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n\cdot n!}\frac{1}{z^{3n+1}}, |z|>1$$

13.
$$a) f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{2n}}, |z+1|>1$$
$$b) f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(z+1)^{2n}, |z+1|>1$$

14.
$$a) f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(\frac{z+1}{2})^{n}, |z+1|<2$$
$$b) f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{2^{n}}{(z+1)^{n+2}}, |z+1|>2$$

15.
$$a) f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^{n}, |z|<1$$
$$b) f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z^{n}}{2^{n+1}}+\frac{1}{z^{n+1}}\right], 1<|z|<2$$
$$c) f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}-1}{z^{n+1}}, |z|>2$$

16.
$$a) f(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(z-1)^{n-1}, |z-1|<1$$
$$b) f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(z-1)^{n}}, |z-1|>1$$

17.
$$a) f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{z}{\sqrt{3}})^{2n}, |z|<\sqrt{3}$$
$$b) f(z)=\frac{1}{z^{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{\sqrt{3}}{z})^{2n}, |z|>\sqrt{3}$$

18.
$$a) f(z)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n}\left[1+\frac{(-1)^{n}}{3^{n+1}}\right], |z-1|<1$$
$$b) f(z)=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(z-1)^{n}}{3^{n+1}}), 1<|z-1|<3$$
$$c) f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\left[1-(-1)^{n}\cdot 3^{n}\right], |z-1|>3$$

19.
$$a) f(z)=-\frac{1}{3(z-2)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{n}}{3^{n+2}}, |z-2|<3$$
$$b) f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(z-2)^{n+1}}, |z-2|>3$$

20.
$$a) f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{2n}, |z+1|<1$$
$$b) f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{2n}}, |z+1|>1$$

21.
$$a) f(z)=\frac{1}{z}+\frac{z^{2}}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{3^{n}n!}z^{3n+2}, |z|<1$$
$$b) f(z)=1+\frac{1}{3z^{3}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\frac{1}{z^{3n+3}}, |z|>1$$

22. $a) f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+2}{2})^n - \frac{1}{2(z+2)}, |z+2| < 2$

$b) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z+2)^{n+2}}, |z+2| > 2$

23. $a) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(z-1)^{n-1}, |z-1| < 1$

$b) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z-1)^{n+1}}, |z-1| > 1$

24. $a) f(z) = 1 + \frac{z^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}z^{2n+2}, |z| < 1$

$b) f(z) = z + \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}, |z| > 1$

25. $a) f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{2^{2n+1}}, |z-2| < 1$

$b) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(z-2)^{2n}}, |z-2| > 1$

26. $a) f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} + \frac{1}{2z}, |z| < 2$

$b) f(z) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}, |z| > 2$

27. $a) f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}z^{2n+1}, |z| < 1$

$b) f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{1}{z^{2n}}, |z| > 1$

28. $a) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right], |z-2| < 2$

$b) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n}{(z-2)^{n+1}} - \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}\right], 2 < |z-2| < 3$

$c) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^n - 3^n)\frac{1}{(z-2)^{n+1}}, |z-2| > 3$

29. $a) f(z) = \frac{1}{2(z+1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\left[1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right], |z+1| < 1$

$b) f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}, 1 < |z+1| < 2$

$c) f(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^{n-2}-1}{(z+1)^n}, |z+1| > 2$

30. $a) f(z) = \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, |z-2| < 1$

$b) f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}, |z-2| > 1$

Задание 6.

1. $z=0$ устранимая особая точка, $resf(0)=0$
2. $z=0$ полюс второго порядка, $resf(0)=1$

   $z=\pm i$ полюсы первого порядка, $resf(\pm i)=-\frac{1}{2}\mp\frac{i}{2}$
3. $z=0$ полюс третьего порядка, $resf(0)=-3$
4. $z=0$ существенно особая точка, $resf(0)=1$
5. $z=\pm 2$ полюсы первого порядка, $resf(2)=\frac{1}{2}, resf(-2)=\frac{1}{2}$
6. $z=0$ полюс второго порядка, $resf(0)=-1$

   $z=1$ полюс первого порядка, $resf(1)=1$
7. $z=\pm 1$ полюсы второго порядка, $resf(\pm 1)=\pm\frac{1}{4}$
8. $z=1$ полюс первого порядка, $resf(1)=\frac{1}{3}$

   $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ полюсы первого порядка, $resf(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}i$
9. $z=0$ существенно особая точка, $resf(0)=0$
10. $z=0$ полюс первого порядка, $resf(0)=1$

    $z=\pm i$ полюсы первого порядка, $resf(\pm i)=-\frac{1}{3}$
11. $z=0$ существенно особая точка, $resf(0)=0$
12. $z=0$ полюс первого порядка, $resf(0)=\frac{1}{3}$

    $z=2$ полюс первого порядка, $resf(2)=\frac{1}{2}$
13. $z=0$ устранимая особая точка, $resf(0)=0$
14. $z=2$ полюс второго порядка, $resf(2)=12$
15. $z=0$ полюс первого порядка, $resf(0)=-\frac{1}{2}$
16. $z=0$ полюс первого порядка, $resf(0)=1$
17. $z=1$ полюс второго порядка, $resf(1)=2$
18. $z=(k+\frac{1}{2})\pi\cdot i$ полюсы первого порядка, $resf\left[(k+\frac{1}{2})\pi\cdot i\right]=1$
19. $z=-1$ полюс первого порядка, $resf(-1)=\frac{1}{3}$

    $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ полюс первого порядка, $resf(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{1}{3}$
20. $z=\pm 2i$ полюсы первого порядка, $resf(\pm 2i)=\pm i$
21. $z=\pm i$ полюсы первого порядка, $resf(\pm i)=\pm i$
22. $z=1$ полюс второго порядка, $resf(1)=-1$

    $z=0$ полюс первого порядка, $resf(0)=1$
23. $z=0$ полюс первого порядка, $resf(0)=1$

24. $z=1$ полюс третьего порядка, $resf(1)=1$

25. $z=0$ существенно особая точка, $resf(0)=0$

26. $z=\pm 1$ полюсы первого порядка, $resf(\pm 1)=-\dfrac{1}{4}$

$z=\pm i$ полюсы первого порядка, $resf(\pm i)=\dfrac{1}{4}$

27. $z=\pm i$ полюсы второго порядка, $resf(\pm i)=0$

28. $z=0$ существенно особая точка, $resf(0)=-\dfrac{1}{2}$

29. $z=0$ устранимая особая точка, $resf(0)=0$

30. $z=\pm 1$ полюсы первого порядка, $resf(1)=\dfrac{1}{2}, resf(-1)=\dfrac{1}{2}$

Задание 7.

1. $-\dfrac{\pi}{2}(1+i)$

2. $2\pi\cdot i(1-\dfrac{e}{2})$

3. $\dfrac{\pi\cdot i}{2}$

4. $2\pi\cdot i$

5. $2\pi\cdot i(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\pi})$

6. $\dfrac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$

7. 0

8. $6\pi\cdot i$

9. 0

10. $-\dfrac{2\pi\cdot i}{9}$

11. $-2\pi\cdot i$

12. 0

13. 0

14. $\dfrac{\pi\cdot i}{2}$

15. $-\dfrac{\pi\cdot i}{2}$

16. $2\pi\cdot i$

17. $\pi\cdot i$

18. $4\pi\cdot i$

19. $\dfrac{\pi(3+i)}{5}$

20. $2\pi\cdot i$

21. $\dfrac{2\pi\cdot i}{25}sh\pi$

22. $2\pi\cdot i(\cos 2-\cos 4)$

23. $2\pi\cdot i$

24. $\dfrac{\pi\cdot i}{4}$

25. $\dfrac{2\pi^2-10\pi\cdot i}{25+\pi^2}$

26. $\dfrac{\pi\cdot i}{2}(1-\cos 2-2\sin 2)$

27. $2\pi\cdot i$

28. $-\dfrac{8}{9\pi}-\dfrac{32}{27\pi^2}$

29. 0

30. $\dfrac{\pi\cdot e^i}{2}(1+i)$

Литература

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1967.
2. Бугров М.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.
3. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
5. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльгольц А.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 10.08.2011 г. Формат бумаги 60x84$^{1}/_{16}$. Бумага офс. Печать офс.
Объем 1,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 288. Цена 34,2 с.
Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru