

УДК. 627.43 (575.2) (04)

ОЦЕНКА ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОТИНЫ ВОДОЕМА

Б. Жумабаев – докт. техн. наук, проф. КАУ

К.Д. Исмаилова – аспирант КАУ

Boundary problems of determination of dams stress are solved by definition of two complex potentials when a semi-plane with two buttresses is under gravitational and seismic forces and its contour is free of environmental stress.

Модель водоема. В статической постановке модель массива водоема будем рассматривать как полуплоскость с двумя выступами, один из которых основной исследуемый объект – плотина, а другой вспомогательный, необходимый для целостного представления водоема. Поскольку формы водоемов разнообразны, то возникает необходимость обобщенного представления их на языке математики.

Полуплоскость с двумя выступами отобразим на нижнюю полуплоскость $\eta \leq 0$ в вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью отображающей функции:

$$z = \omega(\zeta) = \alpha \zeta + \sum_{k=0}^3 a_k (\zeta - i)^k + b_1 / (\zeta + t_0 - i), \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $a_0 = -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3$, $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $a_2 = \beta_2 + i\alpha_2$,
 $a_3 = \alpha_3 + i\beta_3$; $\alpha > 0$, b_1, t_0 – действительные постоянные;

$i = \sqrt{-1}$. Геометрические формы контура L двухвыступной полуплоскости в плоскости $ХОУ$ описываются параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t) &= f_1(t) / (t^2 + 1)^3 + b_1(t + t_0) / [(t + t_0)^2 + 1], \\ y(t) &= f_2(t) / (t^2 + 1)^3 + b_1 / [(t + t_0)^2 + 1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти уравнения вытекают из (1), при $\zeta = \xi = t$, $\eta = 0$, после разделения действительной части от мнимых, и если принять обозначения:

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^7 c_k t^k; \quad f_2(t) = \sum_{k=0}^5 s_k t^k.$$

Здесь	$c_1 = \alpha + \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3$	$s_1 = \beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3$
	$c_2 = -2\beta_1 - 3\beta_3$	$s_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_3$
	$c_3 = 3\alpha + 2\alpha_2 + \alpha_3$	$s_3 = 2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3$
	$c_4 = \beta_2 - \beta_1$	$s_4 = \alpha_1 + \alpha_2$
	$c_5 = 3\alpha + \alpha_1$	$s_5 = \beta_1$
	$c_6 = -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3$	$s_0 = -\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1$
	$c_7 = \alpha$	

Модель напряженного состояния водоема. Представим упругую полуплоскость с двумя выступами, находящуюся под действием объемных сил γ и γ_c . Гравитационная сила $\gamma = \rho g$, где ρ –

плотность горной породы; g – гравитационное ускорение; сейсмическая сила $\gamma_c = \kappa_c \rho g$, где κ_c – коэффициент сейсмичности горного региона.

Напряженное состояние полуплоскости с двумя выступами возникает от действия указанных сил и может быть представлено в виде [1]:

$$\sigma_x^0 = A_1 y + \sigma_x^*; \quad \sigma_y^0 = A_2 y + \sigma_y^*; \quad \tau_{xy}^0 = A_3 y + \tau_{xy}^* \quad (3)$$

где $A_1 = \lambda \gamma (1 - \kappa_c \cos \delta)$; $A_2 = \gamma (1 - \kappa_c \cos \delta)$; $A_3 = \kappa_c \gamma \sin \delta$; σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* – поля напряжений, которые характеризуют наличие двух выступов в несомой полуплоскости; δ – угол между направлением сейсмической силы и оси ОУ.

Поскольку дневная поверхность водоема до образования водохранилища свободна от внешних нагрузок, то должны выполняться на контуре следующие граничные условия [2]:

$$X_n^0 = \sigma_x^0 \cos(n, x) + \tau_{xy}^0 \cos(n, y) = 0; \\ Y_n^0 = \tau_{xy}^0 \cos(n, x) + \sigma_y^0 \cos(n, y) = 0. \quad (4)$$

Здесь n – направление внешней нормали в какой-либо точке контура полуплоскости с двумя выступами (2). Направляющие косинусы выражаются через элементы дуги ds с помощью известных [2] соотношений:

$$\cos(n, x) = -dy/ds; \quad \cos(n, y) = -dx/ds \quad (5)$$

Подставляя поле напряжений (3) в (4) с учетом (5) будем иметь:

$$X_n^* = A_1 y dy/ds - A_3 y dx/ds; \quad Y_n^* = A_3 y dx/ds - A_2 y dy/ds \quad (6)$$

В рамках метода Колосова-Мусхелишвили [3] определение напряжений σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* сводится к граничной задаче определения двух аналитических функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ из граничного условия:

$$\overline{\omega'(t)\Phi(t)} + \overline{\omega'(t)\Phi(t)} + [\overline{\omega(t)\Phi'(t)} + \overline{\omega'(t)\Psi(t)}] = F_1(t) = (N + iT)\overline{\omega'(t)}; \quad (7)$$

$$\overline{\omega'(t)\Phi(t)} + \overline{\omega'(t)\Phi(t)} + [\overline{\omega(t)\Phi'(t)} + \overline{\omega'(t)\Psi(t)}] = F_2(t) = (N - iT)\omega'(t);$$

где N , T – нормальные и касательные составляющие внешних сил в произвольной точке (t) контура L .

$$N + iT = y [- (A_1 + A_2) + (A_1 - A_2 - 2iA_3) e^{2i\alpha}] / 2, \quad (8)$$

где α – угол между касательной контура и осью ОХ, отсчитываемый против часовой стрелки,

$$e^{2i\alpha} = \overline{\omega'(t)} / \omega'(t).$$

Обозначим через

$$T_2 = -\alpha (iA_2 + A_3)/2; \quad T_3 = -i(A_1 + A_2)/4; \quad T_4 = i(A_1 - A_2 + 2iA_3)/4; \\ T_5 = \alpha (iA_2 - A_3)/2; \quad T_6 = i(A_1 + A_2)/4; \quad T_7 = -i(A_1 - A_2 - 2iA_3)/4. \\ \omega(t) = a_0 + \alpha t + \omega_0(t); \quad \omega'(t) = \alpha + \omega_0'(t); \\ \overline{\omega(t)} = \overline{a_0} + \overline{\alpha} t + \overline{\omega_0(t)}; \quad \overline{\omega'(t)} = \overline{\alpha} + \overline{\omega_0'(t)}.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\omega_0(t) = \frac{a_1}{t-i} + \frac{a_2}{(t-i)^2} + \frac{a_3}{(t-i)^3} + \frac{b_1}{t+t_0-i}; \\ \omega_0'(t) = -\frac{a_1}{(t-i)^2} - \frac{2a_2}{(t-i)^3} - \frac{3a_3}{(t-i)^4} - \frac{b_1}{(t+t_0-i)^2}; \\ \overline{\omega_0(t)} = \frac{\alpha_1}{t+i} + \frac{\alpha_2}{(t+i)^2} + \frac{\alpha_3}{(t+i)^3} + \frac{b_1}{t+t_0+i}; \\ \overline{\omega_0'(t)} = -\frac{\alpha_1}{(t+i)^2} - \frac{2\alpha_2}{(t+i)^3} - \frac{3\alpha_3}{(t+i)^4} - \frac{b_1}{(t+t_0+i)^2}.$$

Тогда из (7) и (8) следует:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= [\omega_0(t) - \overline{\omega_0(t)}][T_5 + T_6 \overline{\omega'_0(t)} + T_7 \omega'_0(t)]; \\ F_2(t) &= [\omega_0(t) - \overline{\omega_0(t)}][T_2 + T_3 \omega'_0(t) + T_4 \overline{\omega'_0(t)}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Умножая уравнение (7) на ядро Коши $dt / 2\pi i(t-i)$ и проинтегрировав, когда ζ принадлежит нижней полуплоскости $\eta \leq 0$ в плоскости вспомогательного комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega(\zeta)\Phi(\zeta) + \overline{\omega(\zeta)\Phi(\zeta)} - k_1/\zeta + i - k_2/(\zeta+i)^2 - k_3/(\zeta+i)^3 - p_1/\zeta + t_0 + i - \omega'(\zeta)\psi(t) &= A(\zeta); \\ \omega(\zeta)\Phi(\zeta) + \overline{k_1/(\zeta-i) + k_2/(\zeta-i)^2 + k_3/(\zeta-i)^3 + p_1/(\zeta+t_0-i)} &= B(\zeta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$A(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int F_1(t) \frac{dt}{t-\zeta}; \quad B(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int F_2(t) \frac{dt}{t-\zeta}. \quad (11)$$

Для вычисления интегралов (11) сначала разложим произведения $\omega_0(t)\overline{\omega'_0(t)}$ и $\overline{\omega'_0(t)}\omega_0(t)$ на суммы простых дробей типа

$$\begin{aligned} \omega_0(t)\overline{\omega'_0(t)} &= \sum_{k=1}^3 \frac{B_k}{(t-i)^k} + \sum_{k=1}^4 \frac{\overline{\Gamma_k}}{(t+i)^k} + \frac{B_4}{t+t_0-i} + \frac{\overline{\Gamma_5}}{(t+t_0+i)} + \frac{\overline{\Gamma_6}}{(t+t_0+i)^2}; \\ \overline{\omega'_0(t)}\omega_0(t) &= \sum_{k=1}^3 \frac{\overline{B_k}}{(t+i)^k} + \sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma_k}{(t-i)^k} + \frac{\overline{B_4}}{t+t_0+i} + \frac{\Gamma_5}{t+t_0-i} + \frac{\Gamma_6}{(t+t_0-i)^2}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= a_1 \omega'_0(-i) + a_2 \overline{\omega''_0(-i)} + a_3 / 2 \overline{\omega'''_0(-i)}; & B_3 &= a_3 \overline{\omega'_0(-i)}; \\ B_2 &= a_2 \overline{\omega'_0(-i)} + a_3 \overline{\omega''_0(-i)}; & B_4 &= b_1 \overline{\omega'_0(-t_0-i)}; \\ \Gamma_1 &= -a_1 \overline{\omega'_0(-i)} - a_2 \overline{\omega''_0(-i)} - a_3 / 2 \overline{\omega'''_0(-i)}; & \Gamma_4 &= -3a_3 \overline{\omega_0(-i)}; \\ \Gamma_2 &= -a_1 \overline{\omega_0(-i)} - 2a_2 \overline{\omega'_0(-i)} - 3a_3 / 2 \overline{\omega_0(-i)}; & \Gamma_5 &= -b_1 \overline{\omega'_0(-t_0-i)}; \\ \Gamma_3 &= -2a_2 \overline{\omega_0(-i)} - 3a_3 \overline{\omega'_0(-i)}; & \Gamma_6 &= -b_1 \overline{\omega_0(-t_0-i)}; \\ \omega_0(-i) &= a_1/(-2i) + a_2/(-2i)^2 + a_3/(-2i)^3 + b_1/(t_0-2i) = ia_1/2 - a_2/4 - ia_3/8 + b_1/(t_0-2i); \\ \omega'_0(-i) &= -a_1/4 + ia_2/4 - 3a_3/16 - b_1/(t_0-2i)^2; \\ \omega''_0(-i) &= -ia_1/4 + 3a_2/8 + 3ia_3/8 + 2b_1/(t_0-2i)^3; \\ \omega'''_0(-i) &= -3a_1/8 - 3ia_2/4 + 15a_3/16 - 6b_1/(t_0-2i)^4; \\ \omega_0(-t_0-i) &= -a_1/(t_0+2i) + a_2/(t_0+2i)^2 - a_3/(t_0+2i)^3 + b_1/2; \\ \omega'_0(-t_0-i) &= -a_1/(t_0+2i)^2 + 2a_2/(t_0+2i)^3 - 3a_3/(t_0+2i)^4 + b_1/4. \end{aligned}$$

Положив эти разложения в (11), находим, что

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int F_1(t) \frac{dt}{t-\zeta} = [T_5 + T_7 \omega'_0(\zeta)]\omega_0(\zeta) + \\ &+ T_6 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{B_k}{(t-i)^k} + \frac{B_4}{t+t_0-i} \right) - T_7 \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma_k}{(t-i)^k} + \frac{\Gamma_5}{t+t_0-i} + \frac{\Gamma_6}{(t+t_0-i)^2} \right); \\ B(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int F_2(t) \frac{dt}{t-\zeta} = T_3 \omega_0(\zeta)\omega'_0(\zeta) + T_2 \omega_0(\zeta) + \\ &= T_4 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{B_k}{(t-i)^k} + \frac{B_4}{t+t_0-i} \right) - T_3 \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma_k}{(t-i)^k} + \frac{\Gamma_5}{t-t_0-i} + \frac{\Gamma_6}{(t+t_0-i)^2} \right) \end{aligned}$$

На основании изложенного, выше описанное аналитическим методом напряженное геомеханическое состояние плотины водоема – полуплоскость с двумя выступами плотины и его основания;

в отличие от ранее используемых расчетных схем [4–5] предложенная схема расчета рассматривается как совместная взаимовлияющая конструкция.

Полученное методом Колосова – Мухелишвили решение задачи напряженного состояния плотин, которая возникает при совместном действии гравитационных и сейсмических сил, позволяет выполнить анализ деформированного состояния и определить смещения во всех частях плотины в пределах упругости, проявить свойства ползучести горных пород.

Литература

1. Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. – Фрунзе: Илим, 1988. – 190 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. Ничипорович А.А. Плотины из местных материалов. – М.: Стройиздат, 1973. – 320 с.
5. Цытович Н.А., Тер-Мартirosян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. – М.: Высшая школа, 1981. – 340 с.