

УДК 517.94 (575.2) (04)

О РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЯДРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Саадабаев – докт. физ.-мат. наук, проф.

For the solution of nonlinear integrated equation of the first order the regulating operator is constructed in the article. The convergence of the approached solution to the exact solution of the initial equation is received.

Линейное интегральное уравнение первого рода исследовано в работах [1–3]. Нелинейное интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром рассматривалось в [4] и построен регуляризующий оператор для ее решения. В данной работе для слабо нелинейного интегрального уравнения с несимметричным ядром построен регуляризующий оператор.

Рассмотрим интегральное уравнение I-рода

$$Az = \int_0^1 K(t, s)z(s)ds = u(t) + \delta \int_0^1 M(t, s, z(s))ds, t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $K(t, s)$ – непрерывная функция по $0 \leq t, s \leq 1$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \int_0^1 K(t, s)z(s)z(t)dsdt > 0, \forall z \neq 0, \quad (2)$$

$z(t)$ – искомая функция, $u(t)$ – заданная функция, $M(t, s, z(s))$ – известная непрерывная функция по z и удовлетворяет условию Липшица.

Допустим, что при $u(t) = u_0(t) \in C[0, 1]$ и $\delta = 0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0(t) \in C(0, 1)$. Но в практических задачах вместо функции $u_0(t)$ задается ее приближенное значение $u_\delta(t)$ такое, что

$$\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{C(0, 1)} \leq \delta. \quad (3)$$

Уравнение (1) с заданной функцией $u_\delta(t)$ вообще говоря, решения не имеет, если даже имеет решение, то оно не является близким по норме к $z_0(t)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение [2]

$$\alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K(t, s)z_\alpha(s)ds = u(t) + \delta \int_0^1 M(t, s, z(s))ds, \text{ где } \alpha > 0. \quad (4)$$

и покажем, что при выполнении некоторых условий решение уравнения (4) является близким по норме пространства $C[0, 1]$ к решению уравнения (1).

Л е м м а 1. Пусть: 1) ядро $K(t, s)$ непрерывно по $0 \leq t, s \leq 1$ и удовлетворяет условию (2); 2) функция $M(t, s, z)$ непрерывна по $0 \leq t, s \leq 1$ и удовлетворяет условию Липшица по z ; 3) параметр α удовлетворяет условию $\frac{\delta}{\alpha^2(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда при любом $u(t) \in C(0, 1)$ и при достаточно малом δ уравнение (4) имеет единственное решение $z_\alpha(t) \in C(0, 1)$ и справедлива оценка

$$\|z_\alpha(t)\|_{C(0,1)} \leq \frac{A_0}{\alpha^2} \|u(t)\|_{C(0,1)}, \text{ где } A = \text{const}. \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем оператор

$$A^* z = \int_0^1 K(s, t) z(s) ds.$$

Тогда операторы $A^* A$ и AA^* являются положительными и сопряженными. Пусть $\{\psi_i(t)\}$ и $\{\varphi_i(t)\}$ – ортонормированные собственные функции операторов $A^* A$ и AA^* , соответствующие характеристическим числам $\{\lambda_i^2\}$, соответственно. Используя обобщенную теорему Гильберта-Шмидта, имеем

$$\int_0^1 K(t, s) z_\alpha(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} z_k, \quad (6)$$

где $z_k = \int_0^1 z_\alpha(s) \psi_k(s) ds$, $k = 1, 2, \dots$. Подставляя (6) в (4), получаем

$$z_\alpha(t) = \frac{u(t)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} z_k + \frac{\delta}{\alpha} \int_0^1 M(t, s, z_\alpha(s)) ds. \quad (7)$$

В правой части (7) неизвестными являются коэффициенты z_k . Обе части выражения (7) умножаем на функции $\psi_i(t)$ и интегрируем от 0 до 1.

$$z_i = \frac{U_i}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ik}}{\lambda_k} z_k, i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$U_i = \int_0^1 u(s) \psi_i(s) ds + \delta \int_0^1 \left(\int_0^1 M(t, s, z_\alpha(s)) ds \right) \psi_i(t) dt; \alpha_{ik} = \int_0^1 \psi_i(s) \varphi_k(s) ds.$$

Бесконечную линейную систему (8) можно выписать в операторном виде

$$\alpha \mathcal{G} + B \mathcal{G} = \overline{U}, \quad (9)$$

где $\mathcal{G} = (z_i)_{i=1}^{\infty}$, $B = (\alpha_{ik} / \lambda_k)_{i,k=1}^{\infty}$, $\overline{U} = (U_i)_{i=1}^{\infty}$.

Из условия (2) следует, что оператор B в пространстве l_2 является положительным [3]. В силу свойства коэффициента Фурье $\|\overline{U}\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} U_i^2 \right)^{1/2} < \infty$, т.е. $\overline{U} \in l_2$. Отсюда следует, что при любом $\overline{U} \in l_2$ уравнение (9) имеет единственное решение $\mathcal{G} \in l_2$, т.е. оператор $(\alpha E + B)$ обратим

$$\mathcal{G} = (\alpha E + B)^{-1} \overline{U}, \quad (10)$$

причем для нормы обратного оператора справедлива оценка [2]

$$\|\mathcal{G}\|_{l_2} = \|(\alpha E + B)^{-1} \overline{U}\|_{l_2} \leq \|\overline{U}\|_{l_2} / \alpha. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (7), получаем

$$z_{\alpha}(t) = \frac{u(t)}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \int_0^1 M(t, s, z_{\alpha}(s)) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} ((\alpha E + B)^{-1} \bar{U})_k. \quad (12)$$

Уравнение (12) является нелинейным интегральным уравнением относительно $z_{\alpha}(t)$.

Правая часть нелинейного уравнения (12) при $\frac{\delta}{\alpha^2(\delta)} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ является оператором сжатия в пространстве $C[0,1]$. В силу принципа сжимающих отображений уравнение (12) имеет единственное решение, которое обозначим через $z_{\alpha}(t)$.

Покажем, что при $\alpha > 0$ решение $z_{\alpha}(t) \in C(0,1)$. Из (12) имеем

$$|z_{\alpha}(t)| \leq \frac{|U(t)|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} ((\alpha E + B)^{-1} \bar{U})_k \right| \leq \frac{|U(t)|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \|\bar{U}\|_{\ell_2} R(t) \leq \frac{A_0}{\alpha^2} \|U\|_{C(0,1)},$$

где $U(t) = u(t) + \delta \int_0^1 M(t, s, z_{\alpha}(s)) ds$.

$$R(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2} \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 K^2(t, s) ds \right)^{1/2}, A_0 = 1 + \|R(t)\|_{C(0,1)}.$$

Лемма доказана.

Решение уравнения (4) при $u(t) = u_0(t)$ обозначим через $z_{\alpha}^0(t)$. Это решение в силу формулы (12) представимо в виде

$$z_{\alpha}^0(t) = \frac{u_0(t)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} ((\alpha E + B)^{-1} \bar{U}_0)_k + \frac{\delta}{\alpha} \int_0^1 M(t, s, z_{\alpha}^0(s)) ds. \quad (13)$$

Имеем, что $u_0(t)$ удовлетворяет тождеству

$$u_0(t) = \int_0^1 K(t, s) z_0(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} z_{0k}.$$

Подставляя это в (13), получаем

$$z_{\alpha}^0(t) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} z_{0k} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} ((\alpha E + B)^{-1} B \bar{z}_0)_k + G(z_{\alpha}^0), \quad (14)$$

где $G(z_{\alpha}^0) = \frac{\delta}{\alpha} \int_0^1 M(t, s, z_{\alpha}^0(s)) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \left((\alpha E + B)^{-1} \delta \int_0^1 \left(\int_0^1 M(t, s, z_{\alpha}^0(s)) ds \right) \psi_i(t) dt \right)_k$

является нелинейным интегральным оператором.

Обозначим через

$$\bar{\varphi}(t) = \left(\frac{\varphi_1(t)}{\lambda_1}, \frac{\varphi_2(t)}{\lambda_2}, \dots, \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}, \dots \right), \quad \bar{z}_0 = (z_{0,1}, z_{0,2}, \dots, z_{0,k}, \dots).$$

Тогда (14) запишем в виде

$$z_{\alpha}^0(t) = \frac{1}{\alpha} \bar{\varphi}(t) \cdot \bar{z}_0 - \frac{1}{\alpha} \bar{\varphi} \cdot ((\alpha E + B)^{-1} B \bar{z}_0) + G(z_{\alpha}^0) = \frac{1}{\alpha} \bar{\varphi} (\alpha E + B)^{-1} (\alpha \bar{z}_0 + B \bar{z}_0 - B \bar{z}_0) + G(z_{\alpha}^0) = \frac{1}{\alpha} \bar{\varphi} (\alpha E + B)^{-1} \alpha \bar{z}_0 + G(z_{\alpha}^0) = \bar{\varphi} (\alpha E + B)^{-1} \bar{z}_0 + G(z_{\alpha}^0) \quad (15)$$

Уравнение (15) является нелинейным интегральным, причем правая часть является в пространстве $C[0,1]$ – оператором сжатия.

Допустим, что точное решение $z_0(t)$ принадлежит множеству M_r :

$$M_r = \{z_0(t) \in K\mathcal{G}_0(t), \|z_0\|_{L_2(0,1)} \leq r\}.$$

Множество $M_r[0,1]$ является компактным в пространстве $C[0,1]$. Из представления

$$z_0(t) = K\mathcal{G}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \mathcal{G}_{0k} = \bar{\varphi} \bar{\mathcal{G}}_0$$

получаем, что

$$\bar{z}_0 = B\mathcal{G}_0.$$

Используя эти тождества, из (15) получаем

$$\begin{aligned} z_{\alpha}^0(t) - z_0(t) &= \bar{\varphi}(\alpha E + B)^{-1} z_0 - \bar{\varphi} \bar{\mathcal{G}}_0 + G(z_{\alpha}^0) = \bar{\varphi}(\alpha E + B)^{-1} B \bar{\mathcal{G}}_0 - \bar{\varphi} \bar{\mathcal{G}}_0 + G(z_{\alpha}^0) = \\ &= \bar{\varphi}(\alpha E + B)^{-1} (B \bar{\mathcal{G}}_0 - \alpha \bar{\mathcal{G}}_0 - B \bar{\mathcal{G}}_0) + G(z_{\alpha}^0) = -\alpha \bar{\varphi}(\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0 + G(z_{\alpha}^0) = \\ &= -\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} ((\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0)_k + G(z_{\alpha}^0). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя, что $G(z_{\alpha}^0)$ удовлетворяет условию Липшица, получаем

$$\|G(z_{\alpha}^0)\| \leq \|G(z_{\alpha}^0) - G(z_0)\| + \|G(z_0)\| \leq \frac{c_0 \delta}{\alpha^2} \|z_{\alpha}^0 - z_0\| + \|G(z_0)\|.$$

Допустим, что $\frac{\delta}{\alpha^2(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда при достаточно малых δ $q = \frac{c_0 \delta}{\alpha^2(\delta)} < 1$.

К обеим частям (16), применяя оператор K , получаем

$$\begin{aligned} \|Kz_{\alpha}^0(t) - Kz_0(t)\|_{C[0,1]} &\leq \alpha \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K\varphi_k}{\lambda_k} ((\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0)_k \right\| + \|KG(z_{\alpha}^0)\| \leq \alpha \|\bar{\varphi} B(\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0\| + \|KG(z_{\alpha}^0)\| = \\ &= \alpha \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} (B(\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0)_k \right\|_{C[0,1]} + \|KG(z_{\alpha}^0)\| \leq \alpha \max_{0 \leq t \leq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B(\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0)_k^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \|KG(z_{\alpha}^0)\| \leq \alpha \max_{0 \leq t \leq 1} K(t, t) \|B(\alpha E + B)^{-1} \bar{\mathcal{G}}_0\| + \|KG(z_{\alpha}^0)\| \leq \alpha K_0 \|B(\alpha E + B)^{-1}\| \cdot \|\mathcal{G}_0\| + \|KG(z_{\alpha}^0)\| \leq \\ &\leq \alpha K_0 \|\mathcal{G}_0\| + \|KG(z_{\alpha}^0)\| \leq \alpha K_0 r + q \|Kz_{\alpha}^{0(1)} - Kz_0(t)\| + \frac{\delta}{\alpha^2} c_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда из (17) получаем $\|Kz_{\alpha}^0(t) - K(z_0(t))\| \leq \frac{1}{1-q} \alpha K_0 \|\mathcal{G}_0\| + \frac{\delta}{\alpha^2} c_1 \frac{1}{1-q}$.

Решение $z_0(t)$ по предположению принадлежит множеству M_r . Из (15) следует, что элемент $z_{\alpha}^0(t)$ представим в виде:

$$z_{\alpha}^0(t) = K\mathcal{G}_{\alpha}(t), \quad (18)$$

где $\mathcal{G}_{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} ((\alpha E + B)^{-1} B \mathcal{G}_0)_k \psi_k$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \|g_\alpha(t)\|_{L_2[0,1]} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left((\alpha E + B)^{-1} B g_0 \right)_k^2 \right)^{1/2} + \|G(z_\alpha^0)\| \leq \|(\alpha E + B)^{-1} B \bar{g}_0\| + \\ &+ \|G(z_\alpha^0)\| \leq \|(\alpha E + B)^{-1} B\| \cdot \|\bar{g}_0\| \leq r + q(\delta), \end{aligned}$$

где $q(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Из этого и из (18) следует, что $z_\alpha^0(t) \in M_r^{\alpha(\delta)}$, где $M_r^{\alpha(\delta)} \rightarrow M_r$ при $\delta \rightarrow 0$.

В силу того, что оператор K является вполне непрерывным, множество M_r является компактным. По линейности пространства $C[0,1]$ элемент $z_\alpha^0(t) - z_0(t) \in M_r^\alpha$.

Оператор K^{-1} обратный к оператору K на множестве $N_r = K(M_r)$ является непрерывным [1]. Тогда из (17) следует, что

$$\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\|_{C[0,1]} \leq \omega(\alpha(\delta)K_0 \cdot r), \quad (19)$$

где ω – модуль непрерывности оператора K^{-1} на N_r , причем $\omega(\alpha K_0 r) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Справедлива

Т е о р е м а 1. Пусть:

- 1) ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $0 \leq t, s \leq 1$ и удовлетворяет условию (2);
- 2) при $u(t) = u_0(t)$, $\delta = 0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0(t) \in M_r$;
- 3) функция $M(t, s, z)$ удовлетворяет условию Липшица по z ;
- 4) параметр α удовлетворяет условию $\frac{\delta}{\alpha^2(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Тогда: 1) уравнение (4) при любом $u(t) \in C[0,1]$ и любом $\alpha^{(\delta)} > 0$, удовлетворяющее условию 4) при достаточно малых δ , имеет единственное решение $z_\alpha^0(t) \in C[0,1]$. 2) решение $z_\alpha^0(t)$ уравнения (4) при $u(t) = u_0(t)$ сходится к решению $z_0(t)$ уравнения (1) при $\delta \rightarrow 0$ по норме пространства $C[0,1]$.

Решение уравнения (4) при $u(t) = u_\delta(t)$ обозначим через $z_\alpha^\delta(t)$.

Оценим разность $z_\alpha^\delta(t) - z_0(t)$, используя неравенство треугольника, получаем

$$\|z_\alpha^\delta(t) - z_0(t)\|_{C[0,1]} \leq \|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\|_{C[0,1]} + \|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\|_{C[0,1]}. \quad (20)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|z_\alpha^\delta(t) - z_\alpha^0(t)\|_{C[0,1]} &= \|(\alpha E + K)^{-1}(u_\delta - u_0)\|_{C[0,1]} \leq \\ &\leq \|(\alpha E + K)^{-1}\|_{C[0,1] \rightarrow C[0,1]} \|u_\delta - u_0\|_{C[0,1]} \leq \frac{A}{\alpha^2} \delta. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь мы использовали неравенства (6) и (3). Используя неравенства (21) и (19), из неравенства (20) получаем

$$\|z_\alpha^\delta(t) - z_0(t)\|_{C[0,1]} \leq \omega(\alpha(\delta)K_0 r) + A_0 \left(\frac{\delta}{\alpha^2} \right). \quad (22)$$

Пусть α является корнем уравнения

$$A_0 \delta = \omega(\alpha K_0 r) \alpha^2. \quad (23)$$

Используя это, из (22) получаем

$$\|z_\alpha^\delta(t) - z_0(t)\|_{C[0,1]} \leq 2\omega(\alpha(\delta)K_0 r). \quad (24)$$

Отсюда следует, что
 $z_{\alpha}^{\delta}(t) \rightarrow z_0(t)$ при $\delta \rightarrow 0$
по норме пространства $C[0,1]$.

Доказана

Т е о р е м а 2. Пусть:

- 1) выполнены все условия теоремы 1,
- 2) функция $u_{\delta}(t)$ удовлетворяет неравенству (3),
- 3) параметр α удовлетворяет уравнению (23).

Тогда решение $z_{\alpha}^{\delta}(t)$ уравнения (4) сходится к решению $z_0(t)$ уравнения (1) при $\delta \rightarrow 0$.

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики // СО АН СССР. – Новосибирск, 1962.
2. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 5.
3. Саадабаев А.С. Предельный переход в решении сингулярно возмущенного уравнения в критическом случае // Табигый илимдер журналы. Кыргыз-Түрк Манас университети. – Бишкек, 2002.
4. Саадабаев А.С. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода. – Бишкек, 1997.