

УДК 517.968 (575.2) (04)

МЕТОД СРЕЗЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

С. Искандаров – докт. физ.-мат. наук

The limitation on half-axis of Volterra second order linear integro-differential equations solutions with delay arguments in case, when the solutions of corresponding differential equations may be unbounded on half-axis is studied with the help of author's method of cutting functions.

Все фигурирующие в работе функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

В настоящей работе рассматривается решение следующей задачи.

ЗАДАЧА. Изучить ограниченность на бесконечном полуинтервале J решений следующего линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра с запаздывающими аргументами:

$$x''(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) x'(\tau) d\tau = f(t) + \sum_{k=0}^m [b_k(t) x(\sigma_k(t)) + \int_{t_0}^t Q_k(t, \tau) x^{(k)}(\eta_k(\tau)) d\tau], \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

в случае, когда решения соответствующего линейного ДУ второго порядка с запаздывающими аргументами

$$x''(t) = f(t) + \sum_{k=0}^m b_k(t) x(\sigma_k(t)), \quad t \geq t_0 \quad (1_0)$$

могут быть неограниченными на полуинтервале J и при выполнении условий запаздывания:

$$\sigma_k(t) \leq t, \quad \eta_k(t) \leq t \quad (k = 0..m). \quad (d)$$

Речь идет о решениях $x(t) \in C^2(J, R)$ ИДУ (1) с любыми начальными данными $x(t_0)$, $x'(t_0)$. Каждое такое решение существует и единственно [1–3].

Отметим, что такая задача для скалярного и векторного ИДУ типа Вольтерра второго порядка с функционалами методом срезающих функций изучена соответственно в [4] и [5] в случае, когда функционалы ограничены по абсолютной величине или по норме известной функцией, т.е. в случае, когда ИДУ (1) не охватывается. Вопросы ограниченности решений других классов векторных и скалярных ИДУ с запаздывающими аргументами другими методами и при других условиях изучены в [1–3].

В настоящей работе метод срезающих функций [6, 7] развивается для решения поставленной выше задачи аналогично работам [4, 5]. Развитие метода срезающих функций состоит, в частности, в применении следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть для непрерывно дифференцируемых при $t \geq t_0$ функций $\psi(t) \neq 0$, $y(t)$, а также для непрерывных неотрицательных функций $v_k(t)$, $\sigma_k(t)$, $\omega_k(t, \tau)$, $\eta_k(t)$ при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$, причем $\sigma_k(t) \leq t$, $\eta_k(t) \leq t$, ($k=0..m$) и неотрицательной постоянной C выполняется интегральное неравенство

$$\left| \int_{t_0}^t \psi(s) y'(s) ds \right| \leq C + \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^m [v_k(s) |y(\sigma_k(s))| + \int_{t_0}^s \omega_k(s, \tau) |y(\eta_k(\tau))| d\tau] ds, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |y(t)| \leq & (C + |\psi(t_0)y(t_0)|) |\psi(t)|^{-1} \exp\left(\int_{t_0}^t \{|\psi'(s)(\psi(s))^{-1}| + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^m [v_k(s) |\psi(\sigma_k(s))|^{-1} + \int_{t_0}^s \omega_k(s, \tau) |\psi(\eta_k(\tau))|^{-1} d\tau] ds\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательствам лемм [1–3] и леммы 3.4 [7].

Из этой леммы при $\sigma_k(t) \equiv \eta_k(t) \equiv t$ ($k=0$), $v_k(t) \equiv \omega_k(t, \tau) \equiv 0$ ($k=1..m$) вытекает лемма 1 [4].

Переходим к изложению основного результата настоящей работы.

Пусть

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^n K_i(t, \tau), \quad f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t), \quad (K), (f)$$

$\psi_i(t)$ ($i=1..n$) – некоторые срезающие функции,

$$R_i(t, \tau) \equiv K_i(t, \tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t) \equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$$

$$R_i(t, t_0) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i=1..n), \quad (R)$$

$c_i(t)$ ($i=1..n$) – некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (1) умножаем на $x'(t)$, затем производим интегрирование в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условия (K) и (f), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t, \tau)$, $E_i(t)$ ($i=1..n$), условие (R), функции $c_i(t)$ ($i=1..n$) и после применения лемм 1.4, 1.5 [8] приходим к тождеству

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + \sum_{i=1}^n \{A_i(t)(X_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t A'_i(s)(X_i(s, t_0))^2 ds + B_i(t)(X_i(t, t_0))^2 - \\ - 2E_i(t)X_i(t, t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^t [B'_i(s)(X_i(s, t_0))^2 - 2E'_i(s)X_i(s, t_0) + c'_i(s)] ds + \\ + \int_{t_0}^t R'_{i\tau}(t, \tau)(X_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R''_{i\tau\tau}(s, \tau)(X_i(s, \tau))^2 d\tau ds\} \equiv c_0 + \\ + 2 \int_{t_0}^t x'(s) \sum_{k=0}^m [b_k(s)x(\sigma_k(s)) + \int_{t_0}^s Q_k(s, \tau)x(\eta_k(\tau))d\tau] ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(s)x'(s)ds$ ($i=1..n$), $c_0 = (x'(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0)$.

ТЕОРЕМА. Пусть 1) выполняются условия (d), (K), (f), (R);

2) $A_i(t) \geq 0$, $B_i(t) \geq 0$, $B'_i(t) \leq 0$, $R'_{i\tau}(t, \tau) \geq 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$, $c_i(t)$, $R_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такие, что $A'_i(t) \leq A_i^*(t)A_i(t)$, $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ ($i = 1..n$; $k = 0, 1$);

3) $\psi_j(t) \neq 0$, $A_j(t) \geq A_{j0} > 0$ ($1 \leq j \leq n$);

4) $|\psi_j(t)|^{-1} \exp(\int_{t_0}^t [|\psi'_j(s)(\psi_j(s))^{-1}| + |b_k(s)| |\psi_j(\sigma_k(s))|^{-1} + \int_{t_0}^s |Q_k(s, \tau)| \times$
 $\times |\psi_j(\eta_k(\tau))|^{-1} d\tau] ds) = O(1)$ ($k = 0..m$; $1 \leq j \leq n$).

Тогда любое решение ИДУ (1) ограничено на полуинтервале J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поступая аналогично, как в доказательстве теоремы 3.15 [7], с учетом условия (2), из тождества (4) получаем неравенство

$$(x'(t))^2 + A_i(t)(X_i(t, t_0))^2 \leq \{\sqrt{c_0} + \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^m [b_k(s) |x_k(\sigma_k(s))| + \int_{t_0}^s |Q_k(s, \tau)| \times$$

$$\times |x_k(\eta_k(\tau))| d\tau] ds\}^2 c_*,$$
(5)

где $c_* = \exp(\int_{t_0}^\infty \sum_{i=1}^n [A_i^*(s) + R_i^*(s)] ds) < \infty$.

Из (5) на основании условия 3) вытекает интегральное неравенство

$$|\int_{t_0}^t \psi_j(s) x'(s) ds| \leq \sqrt{\frac{c_*}{A_{j0}}} \{\sqrt{c_0} + \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^m [b_k(s) |x_k(\sigma_k(s))| +$$

$$+ \int_{t_0}^s |Q_k(s, \tau) |x_k(\eta_k(\tau))| d\tau] ds\}.$$
(6)

Применяя к неравенству (6) сформулированную выше нами лемму, имеем оценку

$$|x(t)| \leq [\sqrt{\frac{c_0 c_*}{A_{j0}}} + |\psi_j(t_0) x(t_0)|] |\psi_j(t)|^{-1} \exp(\sqrt{\frac{c_*}{A_{j0}}} \int_{t_0}^t \{|\psi'_j(s)(\psi_j(s))^{-1}| +$$

$$+ \sum_{k=0}^m [b_k(s) |\psi_j(\sigma_k(s))|^{-1} + \int_{t_0}^s |Q_k(s, \tau) |\psi_j(\eta_k(\tau))|^{-1} d\tau] ds).$$
(7)

Из оценки (7) в силу условия 4) получаем, что любое решение ИДУ (1) ограничено на полуинтервале J . Теорема доказана.

ПРИМЕР. ИДУ с запаздывающими аргументами

$$x''(t) + \int_0^t (\exp(\frac{\cos t}{(t+1)^2}) + \tau)^{1/2} e^{4t+4\tau} x'(\tau) d\tau = e^{\frac{2t}{3}} x(\frac{t}{3}) + \int_0^t \frac{x(\frac{\tau}{4})}{t-\tau+1} d\tau, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы при $n=1$, $\psi_1(t) \equiv e^{4t}$, здесь $R_1(t, \tau) \equiv (\exp(\frac{\cos t}{(t+1)^2}) + \tau)^{1/2}$,

$A_1(t) \equiv \exp(\frac{\cos t}{(t+1)^2})$, $B_1(t) \equiv f_1(t) \equiv c_1(t) \equiv 0$, $A_1^*(t) \equiv R_1^*(t) \equiv \frac{t+3}{(t+1)^3}$, $\sigma_1(t) \equiv \frac{t}{3}$, $\eta_1(t) \equiv \frac{t}{4}$. Значит,

все решения этого ИДУ ограничены на полуоси R_+ . Однако соответствующее ДУ с запаздывающим аргументом $x''(t) = e^{\frac{2t}{3}} x(\frac{t}{3})$, $t \geq 0$ имеет решение $x(t) = e^t$, неограниченное при $t \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя оценки (7) из (5) можно получить оценку для первой производной любого решения ИДУ (1).

Литература

1. Веды Ю.А., Китаева Л.Н. О стремлении к конечным пределам решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып. 3. – С. 137–142.
2. Веды Ю.А. Начальная задача для интегро-дифференциальных систем вольтеррова типа с запаздывающим аргументом и асимптотические свойства ее решений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып. 17. – С. 94–108.
3. Веды Ю.А. О начальной задаче для интегро-дифференциальных уравнений вольтеррова типа с запаздывающим аргументом // Там же. – С. 109–118.
4. Искандаров С. Метод срезающих функций и ограниченность решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Наука и новые технологии. – Бишкек, 1998. – №4. – С. 26–32.
5. Искандаров С. Метод матричных весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. – Вып. 29. – С. 88–99.
6. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 149–184.
7. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
8. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Бишкек, 2003. – 34 с.