

УДК 627.43 (575.2) (04)

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАГМЕНТА ПЛОТИНЫ ТОКТОГУЛЬСКОЙ ГЭС

А.А. Землянский – канд. физ.-мат. наук, доц.

In work the dependence defining an arrangement of integrated curves of a phase portrait in everyone square of flat coordinates is received and investigated. The total phase portrait defining a special point – unit is resulted. The technique of definition of directions of movement of points on the integrated curves, being is shown by criterion of stability.

Фиксированные экспериментально датчиками проекции координат вектора скоростей $U(u,v)$, $V(u,v)$ представляют динамическую систему.

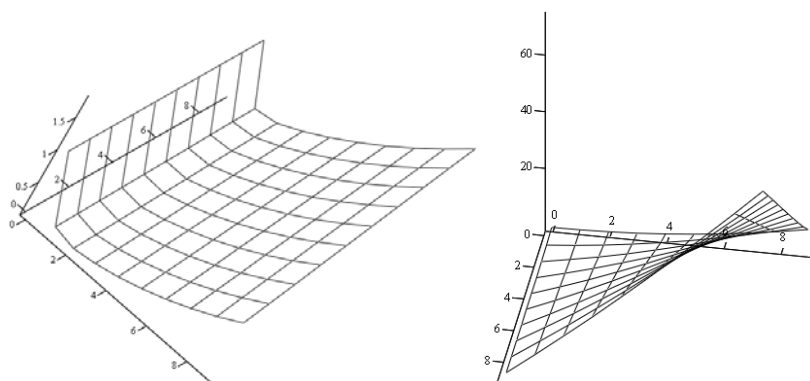


Рис. 1. Графики проекции вектора скоростей точек на ось U , V .

Постановка задачи. Исследовать зависимость, определяющую расположение интегральных кривых фазового портрета в каждом квадранте плоских координат. Построить суммарный фазовый портрет, определяющий особую точку. Показать методику определения направлений движения точек по интегральным кривым, являющимся критерием устойчивости. Функции двух переменных $U(u,v)$, $V(u,v)$, аппроксимированных кубическим сплайном, определяют координаты вектора скорости

$$\begin{aligned} U(u,v) &:= 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u \\ V(u,v) &:= 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем два уравнения, которые определяют динамическую систему исследуемого поля скоростей точек первого фрагмента плотины:

$$\frac{d}{dt}u := 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}v := 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u$$

Требуется исследовать полученную динамическую систему (2):

$$\frac{d}{dt}u := 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}v := 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u$$

Запишем систему уравнений для определения стационарных точек:

$$\begin{aligned} 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u &= 0 \\ 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Находим приближенное решение системы нелинейных уравнений (4):

$$\text{Find}(u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0467673824068885394 \\ -8.0205801363956174998 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Проверка решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} u_0 &:= 1.0467673824068885394 & v_0 &:= -8.0205801363956174998 \\ 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u &= (0) & 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u &= (0) \end{aligned} \quad (6)$$

Сделаем замену переменной и определим производную $\frac{dy}{dx}$:

$$z := \frac{x}{y} \quad y := z \cdot x \quad \frac{d}{dx}y := \frac{d}{dx}x(x) \cdot x + z(x)$$

Решение уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$(|y - \alpha_1 \cdot x|)^{k_1} \cdot (|y - \alpha_2 \cdot x|)^{-k_2} \rightarrow \frac{1}{(|y - \alpha_1 \cdot x|)^{1.9842819034909430389}} \cdot (|y - \alpha_2 \cdot x|)^{.9842819034909430389} \quad (7)$$

Введем новую систему координат

$$\xi := y - \alpha_1 \cdot x \quad \eta := y - \alpha_2 \cdot x \quad \xi^{-k_1} \cdot \eta^{k_2} := \Psi_1 \quad (8)$$

В ней получаем уравнение [1], [2], [3]:

$$\eta := \Psi_1 \cdot \xi^{k_1/k_2} \quad (9)$$

Отношение k_1, k_2 [1]:

$$k_1/k_2 = 2.016 \quad (10)$$

Первоначальный коэффициент, определяющий семейство интегральных кривых [2], $\Psi_1 := 1$.

Раскрывая абсолютную величину уравнения (7), имеем четыре случая его выражения [3], [4], [7] (см. рис. 1–4).

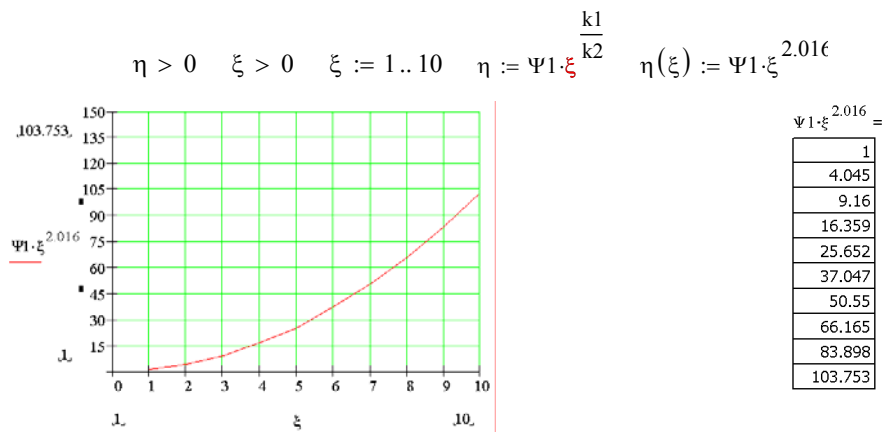


Рис. 1. Первый случай.

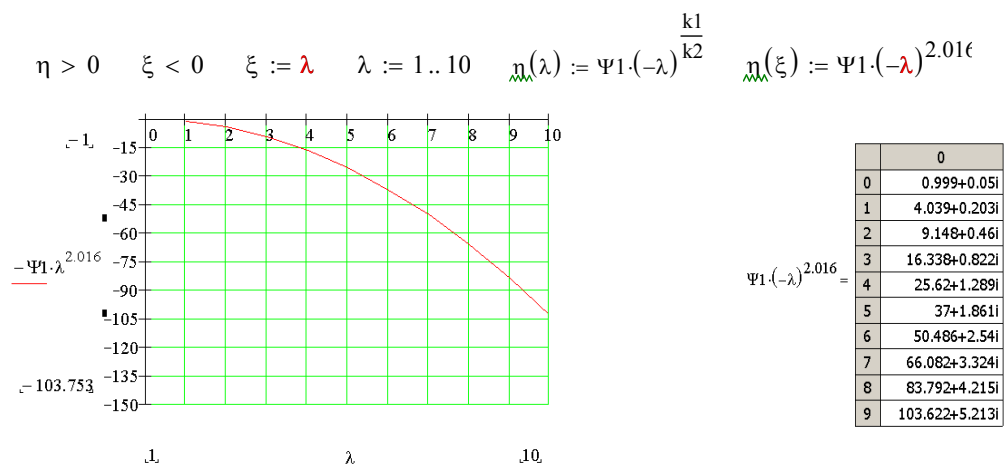


Рис. 2. Второй случай.

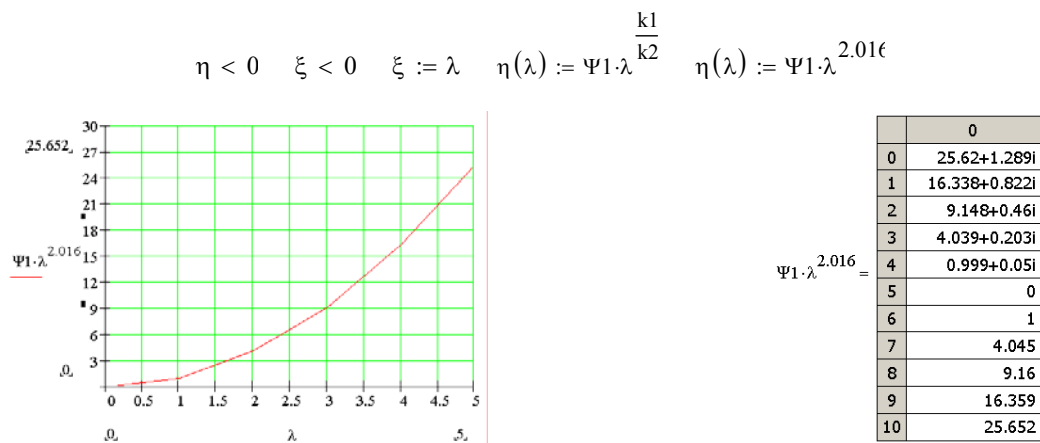


Рис. 3. Третий случай.

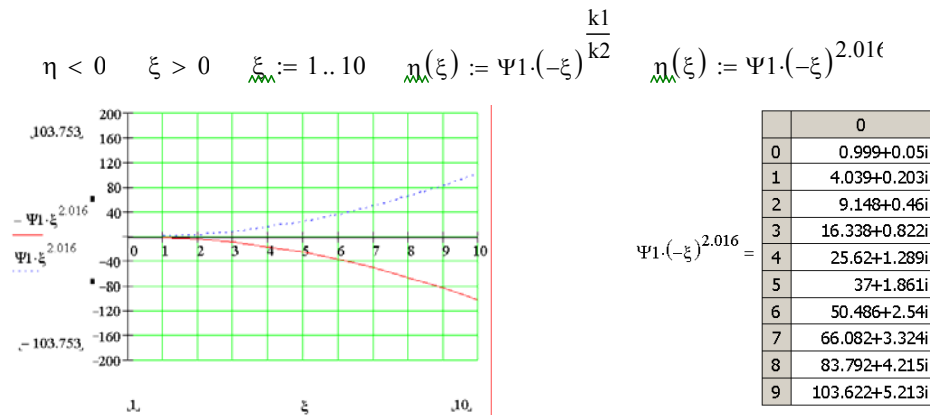


Рис. 4. Четвертый случай.

Косоугольная система координат несколько деформирует траектории фазового портрета, но не меняет принципиальной картины [5, 6]. Тип особой точки – узел – остается неизменным (рис. 5).

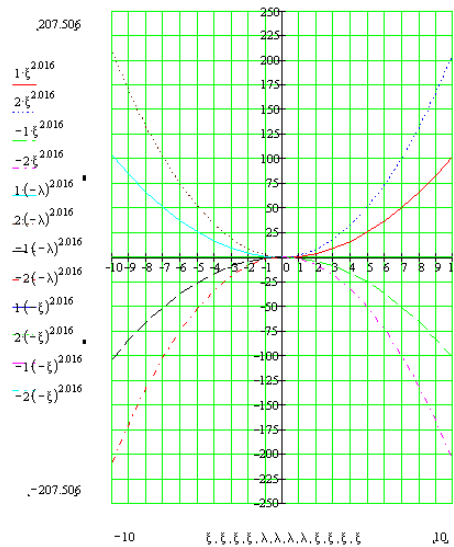


Рис. 5. Тип особой точки.

Объединяя результаты для каждого квадранта, получим фазовый портрет исследуемой точки. Эта точка находится в положении устойчивого равновесия.

Определение направления движения значения по траектории фазового портрета устанавливаем уровень устойчивости особой точки [6]. Для этого найдем вторые частные производные

$$\frac{d^2}{du^2} U(u, v) \rightarrow .2e-1 + 5.3018981104783980105.1^u \quad \frac{d^2}{dv^2} U(u, v) \rightarrow 0$$

$$\frac{d^2}{du^2} V(u, v) \rightarrow 1.4495505135564585580.3^u \quad \frac{d^2}{dv^2} V(u, v) \rightarrow .2$$

и их значения при $u=u_0, v=v_0$

$$u_0 := 1.0467673824068885394 \quad v_0 := -8.0205801363956174998$$

$$.2e-1 + 5.3018981104783980105 \cdot 1^u = (0.496) \quad \frac{d^2}{dv^2} U(u, v) := 0$$

$$1.4495505135564585580 \cdot 3^u = (0.411) \quad \frac{d^2}{dv^2} V(u, v) := 0.2$$

Первое, третье и четвертое значения положительные, второе равно нулю.

Если вторая производная исследуемой функции положительна, то первая производная этой функции возрастает, и если вторая производная исследуемой функции отрицательна, то первая производная этой функции убывает. В нулевом значении функция имеет локальный экстремум, функции фазового портрета будут возрастать или убывать. С помощью этого признака можно определить направление движения точки на графике. Это дает возможность определить степень устойчивости особой точки.

Литература

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гос. изд-во тех.-теоретич. лит., 1949. – 550 с.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
5. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
6. Себехей В.Дж. Неустойчивости в динамических системах. – М.: Мир, 1982. – 167 с.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 271 с.