УДК 517.946 (575.2) (04)

ОБ УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ СИСТЕМ

Ж.Н. Тасмамбетов, Р.У. Жахина

Методом Фробениуса-Латышевой устанавливаются условия определения нормальных и нормально-регулярных решений одной специальной системы в частных производных.

Ключевые слова: допустимая система; нормальное решение; регулярное решение; нормально-регулярное решение.

Постановка задачи. Изучается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\left(a_{20}^{(0)}\cdot x^2+a_{10}^{(0)}\cdot x+a_{00}^{(0)}\right)\cdot Z_{xx}+\left(a_{11}^{(1)}\cdot xy+a_{10}^{(1)}\cdot x+a_{01}^{(1)}\cdot y+a_{00}^{(1)}\right)\cdot Z_{xy}+$$
$$+\left(a_{10}^{(2)}\cdot x+a_{00}^{(2)}\right)\cdot Z_x+\left(a_{01}^{(3)}\cdot y+a_{00}^{(3)}\right)\cdot Z_y+a_{00}^{(4)}\cdot Z=0,$$
$$\left(b_{02}^{(0)}\cdot y^2+b_{01}^{(0)}\cdot y+b_{00}^{(0)}\right)\cdot Z_{yy}+\left(b_{11}^{(1)}\cdot xy+b_{10}^{(1)}\cdot x+b_{01}^{(1)}\cdot y+b_{00}^{(1)}\right)\cdot Z_{xy}+$$
$$+\left(b_{10}^{(2)}\cdot x+b_{00}^{(2)}\right)\cdot Z_x+\left(b_{01}^{(3)}\cdot y+b_{00}^{(3)}\right)\cdot Z_y+b_{00}^{(4)}\cdot Z=0, \quad (1)$$

где коэффициенты $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ (i=0,1,2,3,4; j=0,1; k=0,1,2) произвольные действительные числа, связанные с одним так называемым [1] допустимым дифференциальным уравнением

$$\left(A\cdot x^2+a_{10}\cdot x+a_{00}\right)\cdot Z_{xx}+2\left(A\cdot xy+b_{10}\cdot x+b_{01}\cdot y+b_{00}\right)\cdot Z_{xy}+\left(A\cdot y^2+\right.$$
$$\left.+c_{01}\cdot y+c_{00}\right)\cdot Z_{yy}+\left(B\cdot x+d_{00}\right)\cdot Z_x+\left(B\cdot y+g_{00}\right)\cdot Z_y=n\cdot\left(n\cdot A-A+B\right)\cdot Z \quad (2)$$

с заданными постоянными коэффициентами. Главные коэффициенты A и B в этом уравнении должны быть такими, чтобы при любом неотрицательном m выполнялось условие

$$A\cdot m+B\neq 0\,. \quad (3)$$

Целью работы является установление условия существования нормальных и нормально-регулярных решений системы (1), с использованием метода Фробениуса–Латышевой [2], а также изучение связи между системой (1) и допустимым дифференциальным уравнением (2).

Нормальные и нормально-регулярные решения системы (1). Специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) имеет некоторые особенности:

1. Особые кривые определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших частных производных. Однако очень мало известно о поведении решений в окрестности точек, где пересекаются более чем две особые кривые или в которых две особые кривые касаются.

2.Система (1) должна удовлетворять условиям совместности [3], и должно выполняться так называемое условие интегрируемости:

$$\frac{a_{11}^{(1)}\cdot xy+a_{10}^{(1)}\cdot x+a_{01}^{(1)}\cdot y+a_{00}^{(1)}}{a_{20}^{(0)}\cdot x^2+a_{10}^{(0)}\cdot x+a_{00}^{(0)}}\cdot\frac{b_{11}^{(1)}\cdot xy+b_{10}^{(1)}\cdot x+b_{01}^{(1)}\cdot y+b_{00}^{(1)}}{b_{02}^{(0)}\cdot y^2+b_{01}^{(0)}\cdot y+b_{00}^{(0)}}-1\not\equiv 0\,. \quad (4)$$

При выполнений условий интегрируемости (4) система (1) имеет четыре линейно-независимых решения, зависящих от произвольных постоянных.

3. Если все коэффициенты $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ (I =0,1,2,3,4; j =0,1; k =0,1,2) отличны от нуля, то ранг системы $p\leq 0$.

Понятие ранга $p=1+k$ (k – подранг), введенного А. Пуанкаре и антиранга $m=-1-\Re$ ($\Re$ – антиподранг), введенного Л. Томе, успешно применялись Ж.Н. Тасмамбетовым для построения аналитической теории изучаемых систем вида (1) [4].

Действительно, если ранг системы (1) $p\leq 0$ и антиранг $m\leq 0$, то соответствующие нормальные и нормально-регулярные решения ищутся в виде

$$Z=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}A_{\mu,\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu}\qquad\left(A_{0,0}\neq 0\right) \quad (5)$$

и

$$Z=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\qquad\left(B_{0,0}\neq 0\right). \quad (6)$$

Согласно методу Фробениуса–Латышевой в (5) и (6) для определения неизвестных постоянных ρ, σ, $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$ (μ,ν = 0,1,2,…) следует составить системы характеристических функций исходной системы (1), подставляя вместо $Z(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}$:

$$
\begin{aligned}
Z_1\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho-2}\cdot y^{\sigma-1}\Big\{ &\left[a_{20}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+a_{11}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{10}^{(2)}\cdot\rho+a_{01}^{(3)}\cdot\sigma+a_{00}^{(4)}\right]\cdot x^2y+\\
&+\left[a_{10}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+a_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(2)}\cdot\rho\right]\cdot xy+a_{00}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)\cdot y+\\
&+\left[a_{10}^{(0)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(3)}\cdot\sigma\right]\cdot x^2+a_{00}^{(1)}\cdot\rho\sigma\cdot x\Big\}\\
Z_2\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho-1}\cdot y^{\sigma-2}\Big\{ &\left[b_{02}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+b_{11}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{10}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(3)}\cdot\sigma+b_{00}^{(4)}\right]\cdot x^2y+\\
&+\left[b_{01}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+b_{10}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{00}^{(3)}\cdot\sigma\right]\cdot xy+b_{00}^{(1)}\cdot\sigma(\sigma-1)\cdot y+\\
&+b_{00}^{(1)}\cdot\rho\sigma\cdot y+\left[b_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{00}^{(2)}\cdot\rho\right]\cdot y^2\Big\}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Неизвестные постоянные ρ и σ определяются из систем определяющих уравнений относительно особенностей (∞,∞) и $(0,0)$. Поэтому для построения нормальных и нормально-регулярных решений системы (1):

во-первых, следует заранее установить при каких значениях коэффициентов $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ ($i=0,1,2,3,4$; $j=0,1$; $k=0,1,2$) можно определить системы определяющих уравнений относительно особенностей (∞,∞) и $(0,0)$. Во-вторых, проверить необходимое условие существования решений вида (5) и (6) и из них найти значения неизвестных постоянных ρ и σ.

Из (7) можно определить только систему определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞):

$$
\begin{cases}
f_{20}^{(1)}(\rho,\sigma)=a_{20}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+a_{11}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{10}^{(2)}\cdot\rho+a_{01}^{(3)}\cdot\sigma+a_{00}^{(4)}=0,\\
f_{02}^{(2)}(\rho,\sigma)=b_{02}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+b_{11}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{10}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(3)}\cdot\sigma+b_{00}^{(4)}=0.
\end{cases}
\tag{8}
$$

и исходная система (1) имеет только нормальные решения вида (5). Система (8) определяет до четырёх пар корней $(\rho_i,\ \sigma_i)$ ($i=1,2,3,4$). В свою очередь, это способствует определению четырёх линейно-независимых решений вида (5).

Выполнение условий (8) является *необходимым условием существования* решения вида (5). В рассмотренном случае особые кривые системы регулярные и построенные решения также будут регулярными. Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ ($\mu,\nu=0,1,2,\ldots$) определяются из рекуррентных систем уравнений.

Если ранг $p>0$, то особенность иррегулярная и возможно существование решений в виде нормальных рядов Томе двух переменных, а также в виде нормально-регулярных решений [4].

Нормально-регулярные решения обычно связывают с особенностью в (0, 0). Определим при каких значениях коэффициентов система (1) имеет нормально-регулярные решения. Наиболее простой случай имеем при $a_{00}^{(0)}=0$, $b_{00}^{(0)}=0$, где соответствующая система характеристических функций имеет систему определяющих уравнений относительно особенности (0, 0).

Она определяет одну пару корня: $(\rho_1=0,\ \ \sigma_1=0)$ и находимо одно решение в виде простого степенного ряда двух переменных. Этот случай интересен тем, что одновременно можно определить и систему определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞). Она имеет до четырёх пар корней $(\rho_i,\ \sigma_i)$ ($i=1,2,3,4$). Поэтому система (1) при $a_{00}^{(0)}=0$ и $b_{00}^{(0)}=0$ имеет четыре линейно-независимых нормальных решений вида (5).

Связь изучаемой системы с одним допустимым дифференциальным уравнением

Теорема 1. Основное уравнение

$$a\cdot Z_{xx}+2b\cdot Z_{xy}+c\cdot Z_{yy}+d\cdot Z_x+g\cdot Z_y=\lambda\cdot u,$$

(a, b, c, d, g – многочлены) допустимо тогда, когда оно имеет вид (2), где коэффициенты a_{km}, b_{km}, c_{km}, d_{00}, g_{00} произвольные фиксированные действительные числа, а числа A и B таковы, что при любом целом неотрицательном p выполняется условие (3) [1].

Определение 1. Совместная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) называется допустимой системой, если сумма двух её уравнений удовлетворяет условиям теоремы (1).

Определение 2. Основной дифференциальный оператор

$$Du = aD_1^2 \cdot Z_{xx} + 2bD_1D_2 \cdot Z_{xy} + cD_2^2 \cdot Z_{yy} + dD_1 \cdot Z_x + gD_2^2 \cdot Z_y$$

и основное уравнение

$$Du = \lambda \cdot u$$

будем называть **допустимыми,** если для каждого целого неотрицательного числа n существует такое число λ_n, что уравнение

$$Du = \lambda_n \cdot u$$

имеет n+1 линейно независимых решений в виде многочленов степени n

$$Q_{n0}(x,y),\ Q_{n1}(x,y),\ \ldots,\ Q_{nn}(x,y)$$

и не имеет нетривиальных решений во множестве многочленов степени меньшей, чем n.

Пример. Пусть задана система

$$\begin{aligned} &x^2 \cdot Z_{xx} + xy \cdot Z_{xy} + \left(a_{10}^{(2)} \cdot x + a_{00}^{(2)}\right) \cdot Z_x + \left(a_{01}^{(3)} \cdot y + a_{00}^{(3)}\right) \cdot Z_y + a_{00}^{(4)} \cdot Z = 0, \\ &y^2 \cdot Z_{yy} + xy \cdot Z_{xy} + \left(b_{10}^{(2)} \cdot x + b_{00}^{(2)}\right) \cdot Z_x + \left(b_{01}^{(3)} \cdot y + b_{00}^{(3)}\right) \cdot Z_y + b_{00}^{(4)} \cdot Z = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

с постоянными коэффициентами $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ (i=0,1,2,3,4; j=0,1; k=0,1). Она является частным случаем исходной системы и имеет решения при следующих случаях:

1. При $a_{00}^{(3)} = 0$, $b_{00}^{(2)} = 0$ – нормально-регулярные решения вида (6) и нормальные решения вида (5).

2. При $a_{00}^{(2)} = 0$, $b_{00}^{(3)} = 0$ – нормальные решения с показателем степени $(\rho = 0,\ \ \sigma = 0)$ и нормально-регулярные решения вида (6).

3. Конечные решения вида

$$Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i}, \quad Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i} \cdot \ln x, \quad Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i} \cdot \ln y, \quad Z_i = x^{\rho_i} \cdot y^{\sigma_i} \cdot \ln x \cdot \ln y,$$

поскольку при $a_{00}^{(j)} = 0$, $b_{00}^{(j)} = 0$ (j=2, 3) получается система типа Эйлера [2].

Допустимое уравнение, соответствующее системе (9), запишется в виде

$$x^2 \cdot Z_{xx} + 2xy \cdot Z_{xy} + y^2 \cdot Z_{yy} + \left(B \cdot x + d_{00}\right) \cdot Z_x + (B \cdot y + g_{00}) \cdot Z_y = n \cdot (n - 1 + B) \cdot Z.$$

Теория допустимых уравнений была построена рядом известных математиков, таких, как Г. Кролл, И. Шеффер, Г.К. Энгелис, Т. Корвиндер, Д. Джексон, П.К. Суетин и др. [1]. Решения их связаны с ортогональными многочленами двух переменных. Однако они изучены все еще недостаточно.

Литература

1. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
2. *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса–Латышевой. – Киев, 1991. – 44 с. (Препр. АН УССР. Институт математики; 894).
3. *Wilczynski E.J.* Projective differential geometry of curves and ruled sup faces. – Leipzig-Feubner, 1906. – 120 p.
4. *Тасмамбетов Ж.Н.* Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами: Автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук. – Алматы, 2004. – 41 с.