УДК 532.546

Султанбаев Э.А., Шамырканов М.Б.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Методом конечных элементов приближенно решается уравнение Буссинеска, учитывающее переток из нижележащего напорного пласта в покровный слой.

Движение грунтовых вод в неоднородной пористой среде с учетом перетока из нижележащего напорного горизонта описывается уравнением [1]

$$\mu_b \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k_b(h-b)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k_b(h-b)\frac{\partial h}{\partial y}\right] - \frac{k_П}{m_П}(H-h) = f(x,y,t), \qquad (1)$$

$$(x,y)\in D, \quad t>0,$$

с начальным

$$h(x,y,0) = h_0(x,y), \qquad (x,y)\in D \qquad (2)$$

и граничным

$$k_b(h-b)\frac{\partial h}{\partial n} = \beta h + \alpha, \qquad (x,y)\in S = \partial D, \quad t>0 \qquad (3)$$

условиями.

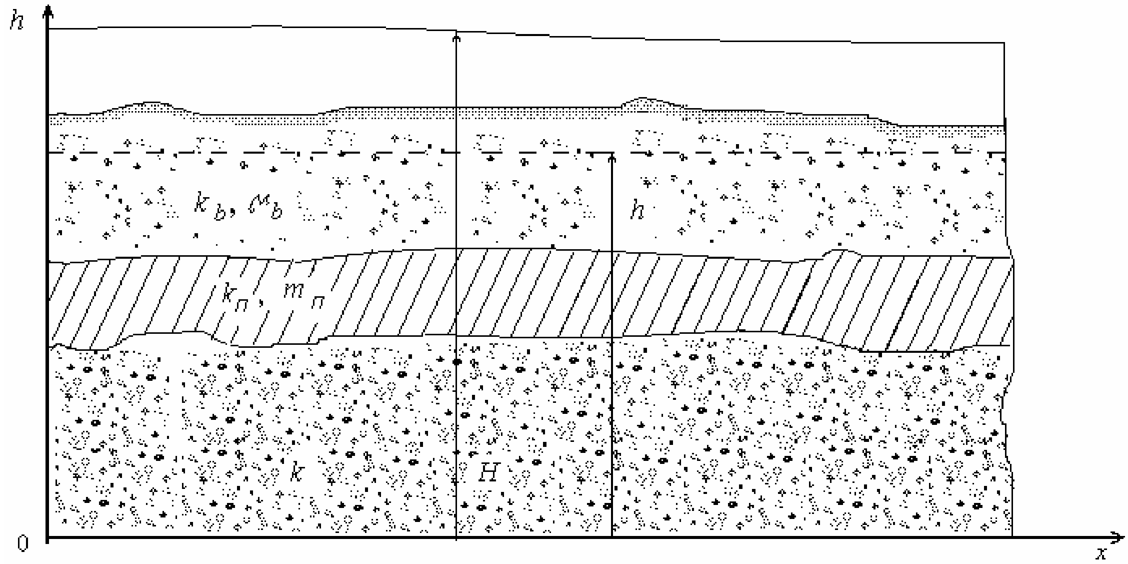

Рис. 1.

В задаче (1) – (3) приняты следующие обозначения (рис. 1): *h(x, y, t)* – уровень грунтовых вод (УГВ), (*м*); *H(x, y, t)* – напор подземных вод в нижележащем напорном горизонте, (*м*); *b(x, y)* – поверхность раздела верхнего покровного слоя и слабопроницаемой прослойки, (*м*); $k_b(x, y)$, $\mu_b(x, y)$ – коэффициент фильтрации (*м/сут*) и коэффициент водоотдачи покровного слоя; $k_П$ и $m_П$ – коэффициент фильтрации (*м/сут*) и мощность (*м*) слабопроницаемой прослойки соответственно; *f(x, y, t)* – функция, учитывающая инфильтрацию и испарение с поверхности грунтовых вод (*м/сут*); $h_0(x, y)$, $\beta(x, y, t)$, $\alpha(x, y, t)$ – заданные функции, (*м*), (*м/сут*), ($м^2/сут$); *D* – плоская область фильтрации, $S = \partial D$ – ее граница.

Задачу (1) – (3) решаем методом конечных элементов [2], при этом напорную функцию *H(x, y, t)* считаем известной. Поскольку задача нелинейна, для ее решения применяем метод итерации путем введения функции

$$T(x,y,t)=k_b\left(\tilde{h}-b\right), \qquad (4)$$

где $\tilde{h}$ – значения УГВ, полученные из предыдущей итерации. Разобьем область D на m треугольных элементов и функцию $h(x, y, t)$ в элементе (e) представим в виде линейной комбинации их значений в вершинах треугольника:

$$h^{(e)}(x,y,t)=h_i(t)N_i(x,y)+h_j(t)N_j(x,y)+h_k(t)N_k(x,y), \qquad (5)$$

где i, j, k – вершины элемента (e); $h_s(t) = h(x_s, y_s, t)$, $N_s(x, y) = a_s + b_s x + c_s y$, $s = i, j, k$ – линейные базисные функции, которые в вершинах i, j, k соответственно равны единице, в других вершинах – нулю, а в произвольной точке элемента их сумма равна единице [3]. Суммируя равенства (5) по всем элементам, получаем приближенное выражение для искомой функции

$$h(x,y,t)\approx h_n(x,y,t)=\sum_{e=1}^{m}h^{(e)}(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)N_i(x,y). \qquad (6)$$

Разобьем временной отрезок $(0, t_0)$ на q элементарных отрезков:

$$\Delta t_s = t_s - t_{s-1}, \qquad s = 1, 2, \ldots, q.$$

Подставляя в задаче (1)-(3) вместо $h(x, y, t)$ функцию $h_n(x, y, t)$ из формулы (6), проведя интегрирование на отрезке (t_{s-1}, t_s) и используя обобщенный принцип Галеркина, получаем:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\iint_D N_j\left(Lh_n-F\right)d\sigma=-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\int_S N_j\left(lh_n-\alpha\right)ds, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

где

$$L=\mu_b\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial}{\partial y}\right)+Q,$$

$$l=T\frac{\partial}{\partial n}-\beta=T\left[\frac{\partial}{\partial x}cos(n,x)+\frac{\partial}{\partial y}cos(n,y)\right]-\beta(x,y,t),$$

$$Q(x,y,t)=\frac{k_П}{m_П},$$

$$F(x,y,t)=f(x,y,t)+\frac{k_П}{m_П}H(x,y,t),$$

$\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе S области D.

Преобразуем первое слагаемое в левой части равенства (7). Имеем:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\iint_D N_i\mu_b(x,y)\frac{\partial H_n}{\partial t}d\sigma=\sum_{i=1}^{n}\iint_D\mu_b(x,y)N_j(x,y)*\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial}{\partial t}\left[h_i(t)N_i(x,y)\right]dtd\sigma=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\iint_D\mu_b(x,y)N_j(x,y)N_i(x,y)d\sigma*\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial h_i(t)}{\partial t}dt=\sum_{i=1}^{n}M_{ij}h_i^{(s)}-\sum_{i=1}^{n}M_{ij}h_i^{(s-1)},$$

где

$$M_{ij}=\iint_D\mu_b(x,y)N_j(x,y)N_i(x,y)d\sigma,$$

$$h_i^{(s)}=h_i(t_S), \quad h_i^{(s-1)}=h_i(t_{S-1}).$$

Для следующих слагаемых в левой части формулы (7), используя формулы Грина, получаем выражение:

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\iint_D N_j\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)-Qh_n\right]d\sigma=-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial}{\partial t}\left[h_i(t)\right]dt\iint_D N_j(x,y)*$$

$$*\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)-QN_i\right]d\sigma=-\sum_{i=1}^{n}\left[\gamma h_i(t_s)+(1-\gamma)h_i(t_{s-1})\right]\Delta t_s\,*$$

$$*\iint_D\left[T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)+QN_iN_j\right]d\sigma-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\int_S N_jT\frac{\partial h_n}{\partial n}ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\gamma h_i(t_s)A_{ij}\Delta t_s+\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma)h_i(t_{s-1})A_{ij}\Delta t_s-\int_{t_{s-1}}^{t_s}B_j\,dt\,.$$

Здесь

$$A_{ij}=\iint_D T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)d\sigma+\iint_D QN_iN_j\,d\sigma,$$

$$B_j=\int_S N_jT\frac{\partial h_n}{\partial n}ds\,.$$

В правой части равенства (7) имеем

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\int_S N_j(lh_n-\alpha)ds=\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_j\left(T\frac{\partial h_n}{\partial n}-\beta h_n-\alpha\right)dsdt=-B_j+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_j(\beta h_nN_i+\alpha)dsdt\,.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (7), получаем j-ое уравнение системы относительно неизвестных $h_i^{(s)}$:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(\gamma)}h_i^{(s)}=b_j\,,\qquad j=1,2,...,n\,, \tag{8}$$

где

$$a_{ij}^{(\gamma)}=M_{ij}+\gamma\left(A_{ij}-B_{ij}\right)\Delta t_s\qquad 0<\gamma\le 1,$$

$$b_j=\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_D N_jF(x,y,t)d\sigma dt+\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_j\alpha(x,y,t)dsdt+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(1-\gamma)}h_i^{(s)}\,,$$

$$B_{ij}=\int_S\beta N_jN_i\,ds\,.$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (8), получаем функцию $h^{(1)}(x, y, t_s)$. Подставляя эту функцию вместо $\tilde{h}(x,y,t)$ в формуле (4) и решая снова по описанному алгоритму задачу (1)-(3), получаем второе приближение $h^{(2)}(x, y, t_s)$ и т.д. Процесс продолжаем до выполнения условия

$$\max_i\left|h_i^{(\nu)}-h_i^{(\nu-1)}\right|\le\varepsilon\,,$$

где ν – номер итерации; ε – заданное малое положительное число; $i=0,1,...,n$.

Используя полученные значения УГВ $h(x, y, t_s)$ на s-ом временном слое в качестве начального условия, решаем задачу для $(s+1)$-го слоя и т.д.

Работа алгоритма апробирована на решении следующей модельной задачи. В круговой области с радиусом r = 3000 м происходит подъем уровней грунтовых и напорных вод. В начальный момент $t = 0$ УГВ находится на отметке $b(x, y) = 100$ *м*, а напорные воды – на отметке $b(x, y) + 5$ *м* и в течение t_0 суток УГВ поднимается в центре области на h_0 = 370 *м*, а на границе области – на $h_r = 350$ *м*. Коэффициент фильтрации покровного слоя $k_b(x,y)=\frac{10xy}{r^2}+5$ *м/сут*; коэффициент водоотдачи μ_b = 0.1; коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемой прослойки соответственно $k_П$ = 2 *м/сут* и $m_П$ = 10 *м*. Искомой функцией (УГВ) является функция

$h(x,y,t)=\frac{t}{t_0}\sqrt{h_r^2+\varepsilon\left(r^2-x^2-y^2\right)}\quad + \quad +b(x,y)$, а напор в нижележащем напорном горизонте $- H(x, y, t) = h(x, y, t) + 5$, где $\varepsilon = 16\cdot10^{-4}$.

Задача решалась с шагами по времени Δt = 1 *сут*; 5 *сут*; 10 *сут*; 20 *сут*; 30 *сут;* 45 *сут*; 90 *сут* для промежутка времени t_0 = 1 *год*. В табл. 1 приведены точные и приближенные значения УГВ на различных расстояниях от центра круга.

Таблица 1.

Радиус		**0**	**1000**	**2000**	**3000**
Точные значения		**470**	**467.831**	**461.248**	**450**
Приближенные значения					
t_0	Δt				
360	**1**	**469.636**	**467.016**	**461.014**	**450.000**
72	**5**	**469.789**	**467.218**	**461.162**	**450.000**
36	**10**	**469.807**	**467.244**	**461.179**	**450.000**
18	**20**	**469.816**	**467.257**	**461.188**	**450.000**
12	**30**	**469.819**	**467.261**	**462.190**	**450.000**
8	**45**	**469.821**	**467.264**	**461.192**	**450.000**
4	**90**	**469.823**	**467.267**	**461.194**	**450.000**

Литература:

1. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969. – 414 с.

2. Джаныбеков Ч.Дж., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. – Бишкек: Илим, 2005. – 180 с.

Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979, - 392 с.