**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. РАЗЗАКОВА**

ТОКМОКСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра «Фундаментальные дисциплины»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

**Методические указания к практическим занятиям
для студентов технических направлений:
5521102.02 «Организация безопасности движения»,
551700 «Электроэнергетика»**

БИШКЕК 2007

Рассмотрено	**Утверждено**
на заседании кафедры	на заседании Методического
«Фундаментальные науки»	Совета ТТИ КГТУ
Прот. № 4 от 12.12.06	Прот. № 8 от 19.04.07

УДК 517.948

Составитель ст. преп. Джанузакова А.А.

Аналитическая геометрия на плоскости: Методические указания к практическим занятиям для студентов технических направлений: 5521102.02 «Организация безопасности движения», 551700 «Электроэнергетика». / КГТУ им. И. Раззакова / Сост.: А.А. Джанузакова.- Б.: ИЦ «Текник», 2007. — 20 с.

Библиогр.: 9 наименов.

Рецензенты: к.ф-м.н., доц. Кутманов З.,
к.ф-м.н, Пахыров З.П.

Введение

В данном методическом указании отражен один из разделов аналитической геометрии.

Цель методического указания - оказание помощи студентам в самостоятельной работе, поэтому каждая практическая работа построена следующим образом:

1) краткий теоретический материал;
2) типовые примеры;
3) в конце приведены 10 задач с ответами.

В работе приведены координаты точки на плоскости, простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости и простейшие виды уравнений прямой на плоскости. Студентам необходимо уметь определить вид уравнения прямой на плоскости и построить чертеж.

Задачи, приведенные в конце работы, предназначены для самостоятельного решения студентами и закрепления теоретического материала.

Тема. Координаты точки на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.

Цель: Дать студентам понятие координаты точки на плоскости и научить решать задачи, применяя формулы простейших задач аналитической геометрии на плоскости.

Содержание.

Вспомним основные сведения из теории . Две взаимно перпендикулярные оси O_x и O_y, имеющие масштаб (рис.1), образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.
Ось O_x называется осью абсцисс, ось O_y – осью ординат,

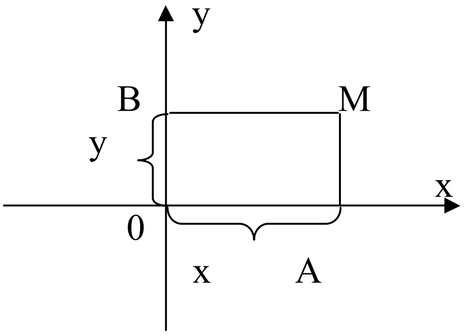


рис. 1

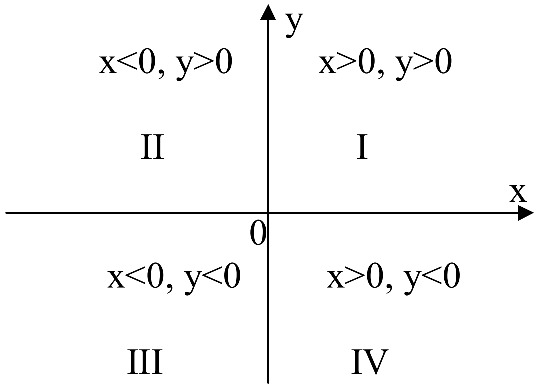


рис. 2.

точка 0 - началом координат. Плоскость, в которой расположены оси O_x и O_y, называются координатной плоскостью и обозначается ОХУ.

Координаты Х и У точки М называются соответственно ее абсциссой и ординатой. Символ М (х;у) означает, что точка М имеет координаты х и у. Начало координат имеет координаты (0;0).

Т.о., каждой точке М плоскости соответствует пара чисел (х; у)-ее прямоугольные координаты.

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют четвертями, квадрантами или координатными углами и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV, так, как показано на рис.2.

Простейшими задачами аналитической геометрии является:

1. Нахождение расстояния между двумя точками на плоскости.
2. Деление отрезка прямой в заданном отношении.
3. Определение площади треугольника по заданным трем точкам, являющимися вершинами этого треугольника.

Расстояние между двумя точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ находят по формуле.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad (1)$$

Если точка М (х;у) делит отрезок с концами $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ в отношении $\lambda=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad (2)$$

В частности, при делении пополам, т.е. в отношении $\lambda=1$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2} \quad (3)$$

Площадь S треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ вычисляется по формуле. $S=\frac{1}{2}\left|\ \left[(x_2-x_1)\cdot(y_3-y_1)-(x_3-x_1)\cdot(y_2-y_1)\right]\ \right|$ (4)

Формулу для площади треугольника можно записать в виде $S=\frac{1}{2}|\Delta|$,

где $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$.

Задача 1. Точки E(-2;1), F(2;3) и R(4;-1)-середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин и определить площадь этого треугольника.

Решение: Обозначим через $A(x_1; y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ вершины треугольника. По формуле (3) находим:

$-2=\frac{x_1+x_2}{2}$; $1=\frac{y_1+y_2}{2}$; $-4=x_1+x_2$, $2=y_1+y_2$

$2=\frac{x_2+x_3}{2}$; $3=\frac{y_2+y_3}{2}$; $4=x_2+x_3$, $6=y_2+y_3$

$4=\frac{x_1+x_3}{2}$; $-1=\frac{y_1+y_3}{2}$; $8=x_1+x_3$, $-2=y_1+y_3$

$x_1=-x_2-4$, $-2x_2=8$, $x_2=-4$, $y_1=-2-y_2$, $2y_2=-10$, $y_2=5$,

$x_3=-x_2+4$, $x_1==x_2-4=4-4=0$, $y_3=6-y_2$, $y_1=2-5=-3$,.

$8=-x_2-4-x_2+4$, $x_3=4+4=8$, $-2=2-y_3+6-y_2$, $y_3=6-5=1$

Координаты вершин Δ следующие: A(0;-3); B (-4;5); C(8;1)

Тогда по формуле (4) искомая площадь равна:

$$S=\frac{1}{2}\ |(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|=\frac{1}{2}\ |(-4-0)(1+3)-(8-0)(5+3)|=$$

$$=\frac{1}{2}\ |(-16-64)|=\frac{1}{2}\ |-80|=|-40|=40(\text{кв.ед.})$$

Задача 2. Показать что ΔABC с вершинами A(-4;-2), B(-3;5), C(0;1) прямоугольный и равнобедренный.

Решение:

$$|AB|=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(У_B-У_A)^2}=\sqrt{(-4+3)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$$

$$|AC|=\sqrt{(X_A-X_C)^2+(У_A-У_C)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$|BC|=\sqrt{(X_B-X_C)^2+(У_B-У_C)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(5-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$$

$|AC|=|BC|$.

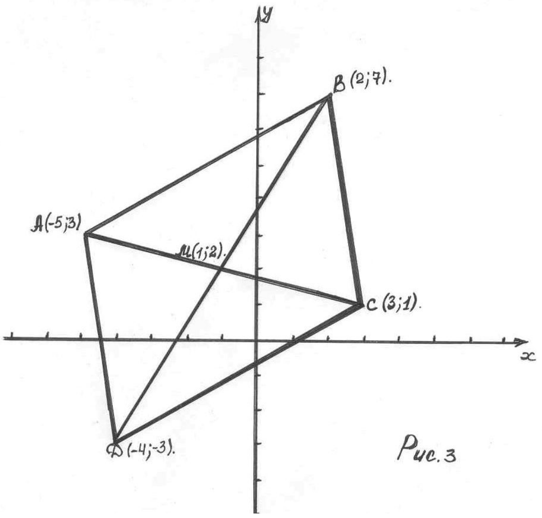
Следовательно, ΔABC - равнобедренный. Для прямоугольного треугольника имеет место теорема Пифагора. Проверим, $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2\Rightarrow\left(5\sqrt{2}\right)^2=5^2+5^2$; 50=50. Значит, ΔABC - прямоугольный.

Задача 3. Даны две последовательные вершины параллелограмма А(-5;3) и В(2;7) и точка пересечения его диагоналей М(-1;2). Найти остальные вершины параллелограмма (рис. 3).

Решение. Воспользуемся формулами деления отрезка пополам, $Х_М=(Х_А+Х_С)/2$, $У_М=(У_А+У_С)/2$, $Х_С=2Х_М-Х_А=-2+5=3$, $У_с=2У_М - У_А=2\cdot 2-3=1$; С(3;1)

$Х_М=(Х_В+Х_Д)/2$; $У_М=(У_В+У_Д)/2$; $Х_Д=2Х_М-Х_В=-2-2= -4$

$У_Д=2У_М-Х_В=4-7=-3$ **Ответ**. С(3;1), Д(-4;-3)



Задача 4. Даны точки А(1;-1) и В(2;3). До какой точки нужно продолжить отрезок $|AB|$ направлением от А к В (рис.4), чтобы длина его утроилось?

Решение. На прямой АВ берем такую точку С, что $|CB|/|BA| = 2/1$; $\lambda = 2$

$Х_В=(х_С+\lambda Х_А)/(1+\lambda)$, $Х_С=Х_В(1+\lambda)-\lambda Х_А=2\cdot 3-2\cdot 1=4$; $У_С=У_В(1+\lambda)-\lambda У_А=3\cdot 3+2\cdot 1=11$; **Ответ:** С(4;11)

5. Задача Дан ΔАВС с вершинами А(4;1), В(7;5), С(-4;7). Найти точку пересечения биссектрисы угла с противоположной стороной $|BC|$ (рис.5).

Решение. Биссектриса внутреннего угла треугольника делить противоположную сторону на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон, т.е.

$|СД|/|ДВ| = |CA|/|AB| = \lambda$,

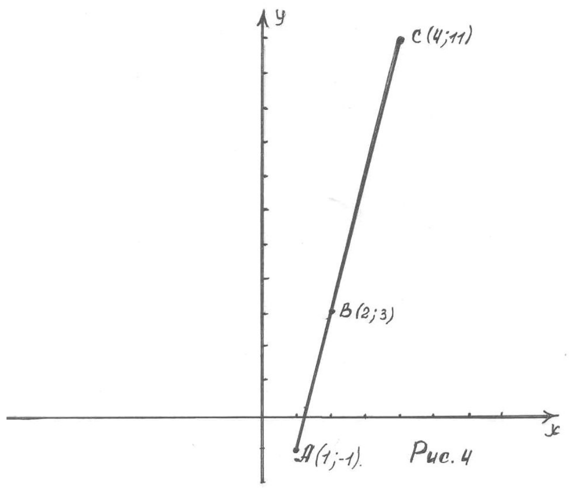
$|AC| = \sqrt{(4+4)^2+(1-7)^2} = \sqrt{64+36} = 10$;

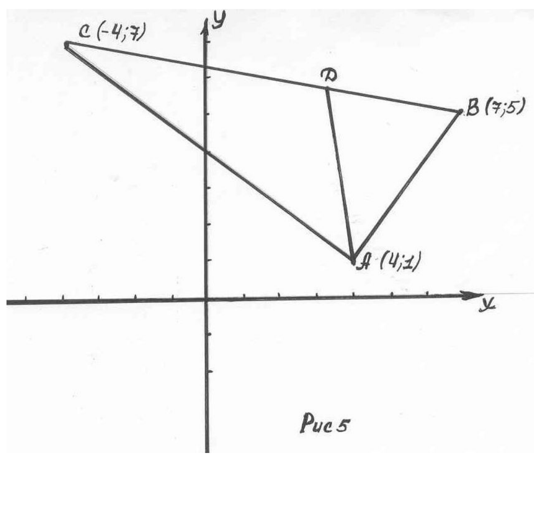
$|AB| = \sqrt{(4-7)^2+(1-5)^2} = 5$

Значит, $\lambda=10/5=2$ и $Х_Д=(Х_С+\lambda Х_В)/(1+\lambda)=(-4+2\cdot 7)/(1+2)=10/3=3\frac{1}{3}$;

$У_Д=(У_С+\lambda У_В)/(1+\lambda)=(7+2\cdot 5)/(1+2)=17/3=5\frac{2}{3}$.

Ответ: $(3\frac{1}{3};5\frac{2}{3})$





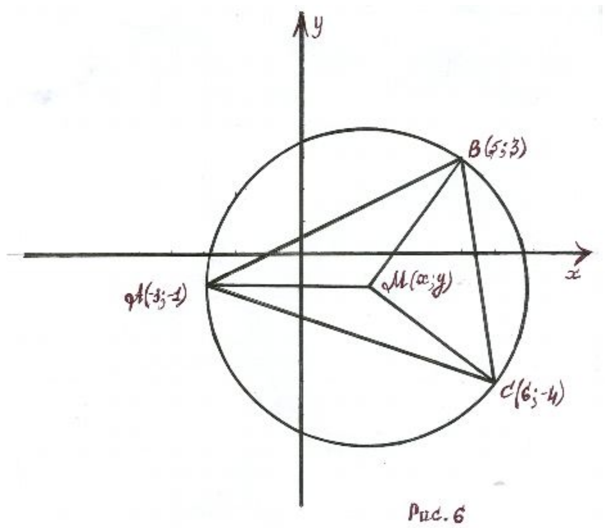


Рис. 6

Задача 6. Найти центр и радиус окружности, описанной около Δ ABC с вершинами A(-3;-1), B(5;3), C(6;-4) (рис.6).

Решение . Пусть M является центром окружности, описанной около ΔABC, тогда $|MA| = |MB| = |MC|$ (1).

$$|MA| = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10}\,,$$

$$|MB| = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 6y + 34}\,,$$

$$|MC| = \sqrt{(x-6)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2 + 8y + 16} = \sqrt{x^2 + y^2 - 12x + 8y + 52}\,,$$

Из (1) следует: $|MA| = |MB|$, $|MA| = |MC|$, $|MA|^2 = |MB|^2$, $|MA|^2 = |MC|^2$, выражаем эти равенства в координатах

$$-\begin{cases} x^2 + y^2 + 6y + 2y + 10 = x^2 + y^2 - 10x - 6y + 34 \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = x^2 + y^2 - 12x + 8y + 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 10x + 6y + 10 - 34 = 0 \\ 6x + 2y + 12x - 8y + 10 - 52 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 16x + 8y - 24 = 0 \\ 18x - 6y - 42 = 0 \end{cases} + \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases} \quad x = 2,\ y = -1;\ M(2;-1).$$

5x-10=0

R $\sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2}$ =5 Ответ. M(2;-1) и R=5

Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин: A(3;-2), B(5;2) и C(-1;4). Ответ. $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$ и $\sqrt{41}$

2. Найти вершины треугольника, зная середины его сторон: P(3;-2), Q(1;6) и R (-4;2).

Ответ: x_1=-2; y_1=-6, x_2=8, y_2=2, x_3=-6, y_3=10.

3. Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма $A\left(-4\frac{1}{2};-7\right)$ и B(2;6) и точки пересечения диагоналей M(3; $1\frac{1}{2}$). Вычислить координаты двух остальных его вершин.

Ответ: C(10,5;10), Д(4;-3)

4. Даны три вершины параллелограмма: A(4;2), B(5;7) и C(-3;4). Найти четвертую вершину Д, противоположную вершине B. Ответ: Д(-4;-1)

5. Отрезок между точками A(3;2) и B(15;1) разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления.

Ответ: $M_1(5,4;2,8)$, $M_2(7,8;3,6)$, $M_3(10,2;4,4)$, $M_4(12,6;5,2)$

6. Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин:(1;4),(-5;6)и (-2;-1).

Ответ: (-2;1)

7. Найти точку пересечения диагоналей AC и ВД четырехугольника: A(3;-2), B(3;5), C(0;4), Д(-1;-1).

Ответ: M(1;2).

8. Определить точку, в которой прямая, соединяющая точки A(4;1) и B(-2;4) пересекает ось абсцисс.

Ответ: C(6;0).

9. Два подобных треугольника имеют общую вершину A(3;-6) и при ней общий угол. Найти две другие вершины большего треугольника, если известны вершины меньшего: B(6,2;-3,6) и C(5;1), а отношение сходственных сторон равно 5/2.

Ответ: $B_1(11;0)$ C.(8;11,5)

Указание: Искомые вершины делят отрезки AB и AC в отношении $\lambda = -\frac{5}{3}$.

10. Даны вершины четырехугольника A(1;2;3), B(7;3;2), C(-3;0;6) и Д(9;2;4). Доказать, что его диагонали AC и ВД взаимно перпендикулярны .

<u>Тема:</u> Простейшие виды уравнений прямой на плоскости.

<u>Цель:</u> Научить студентов решать задачи на составление простейших уравнений прямой на плоскости.

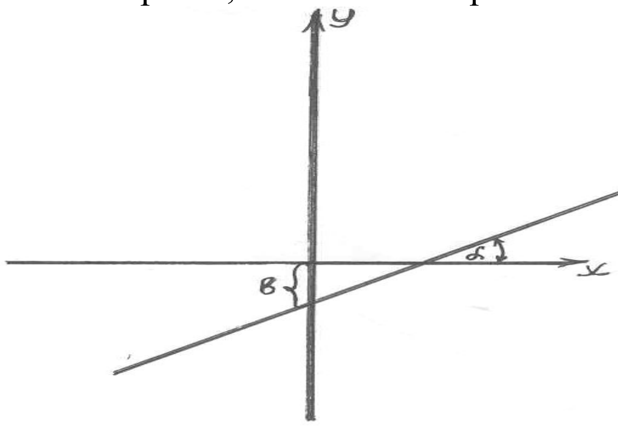
<u>Содержание:</u> Вспомним основные формулы уравнений прямой на плоскости.

1. Общее уравнение прямой на плоскости: **Ax + By+C=0** (1)
в котором A, B и C постоянные, причем из постоянных A и B хотя бы одна отлична от нуля.

2. Напомним частные случаи **общего уравнения и прямой**:

а) C=0, уравнение Ax+By=0 определяет прямую, проходящую через начало координат;
б) B=0, уравнение Ax+C=0 определяет прямую, параллельную оси оy;
в) A=0, уравнение By+C=0 определяет прямую, параллельную оси ox;
г) B=0 и C=0, уравнение x=0, определяет прямую совпадающую с осью оy;
д) A=0 и C=0, уравнение y=0 определяет прямую, совпадающую с осью ox.

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом: **y=kx+b**, (2)
где k=tgα- угловой коэффициент прямой, α – это угол наклона прямой к оси ох, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси оу, от начало координата.



4. Уравнение прямой проходящий через заданную точку M(x;y) и имеющий заданный угловой коэффициент k.

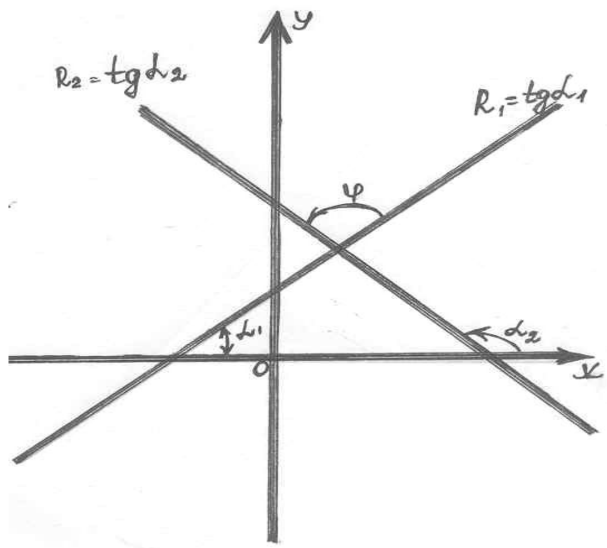
$$\mathbf{y-y_1=k(x-x_1)} \qquad (3)$$

5. Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$, (4)

где a – величине отрезка, отсекаемого прямой на оси Ох, b – величина отрезка отсекаемого прямой на оси Оу.

6. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки
$M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (5)$$



7. Угол между двумя прямыми

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (6)$$

Если $k_1=k_2$, то и прямые параллельны
Если $k\cdot k_2=-1$, то прямые перпендикулярны.

8. Нормальное уравнение прямой.
Если обе части общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ умножить на число $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (это число называется нормирующим множителем), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu\cdot C<0$, то получится уравнение
$x\cdot\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho=0.$ (7)

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь ρ – длина перпендикуляра, отпущенного из начала координат на прямую, а φ –

угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси *Ox*.

9. Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки М ($x_0; y_0$) *до прямой* $Ax + By + C = 0$ находятся по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ . \qquad (8)$$

10.Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$, с заданным нормальным вектором $\vec{n} = \{A; B\}$. (рис. 1)

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \qquad (9)$$

Нормальным вектором прямой называется всякий ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой.

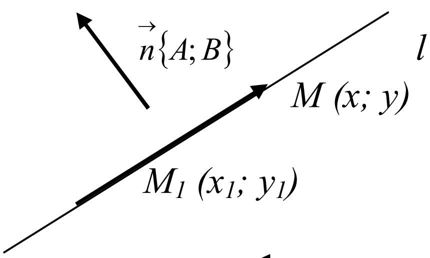


рис. 1

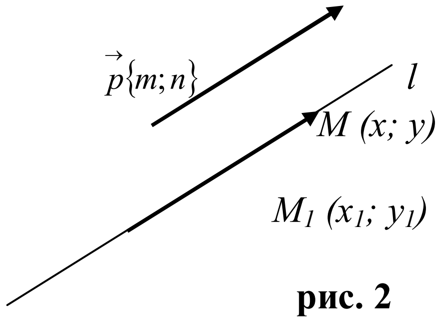


рис. 2

11. Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1; y_1), с заданным направлением вектором $\vec{p} = \{m; n\}$; (рис. 2)

$$(x-x_1)/m=(y-y_1)/n.$$

(10)

Направляющим вектором прямой называется всякий ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

12. Угол между двумя прямыми. *Углом между двумя прямыми* называется величина меньшего из углов, образованных этими прямыми : $(\widehat{l_1, l_2}) = \varphi, \varphi \in [0^0, 90^0]$. (рис. 3)

Угол между двумя прямыми можно вычислять по формуле

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right| \textit{ или } \quad \cos\varphi = \left|\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}\right|,$$

(11)

где $\vec{n}_1, \vec{n}_2$-нормальные векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 , а $\vec{p}_1, \vec{p}_2$-направляющие векторы этих прямых.

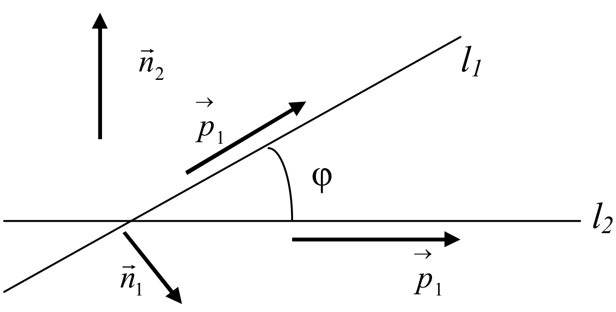


рис. 3

13. Условие параллельности двух прямых. Пусть на плоскости заданы две прямые:
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (l_1); $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (l_2). Если прямые параллельны $(l_1 \| l_2)$, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ коллениарны (рис. 4), а это значит, что их одноименные координаты пропорциональны: $A_1 / A_2 = B_1 / B_2$.

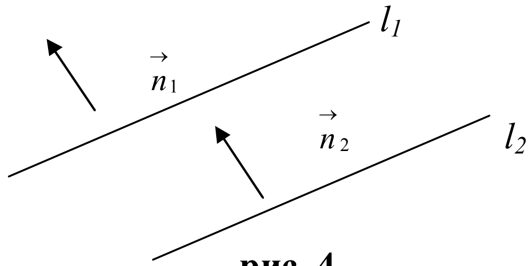


рис. 4

14. Условие перпендикулярности двух прямых. Если прямые перпендикулярны $(l_1 \perp l_2)$, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ также перпендикулярны (рис. 5), а это значит, что их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

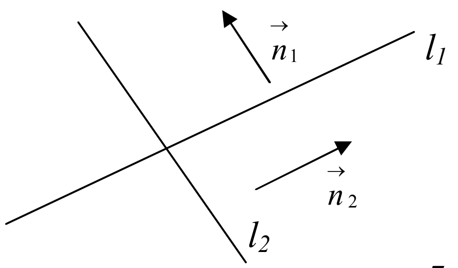


рис. 5

15. Точка пересечения двух прямых. Если прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ не параллельны, то для нахождения точки их пересечения надо решить систему, составленную из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Решение системы $(x_1; y_1)$ и дает координаты точки пересечения этих прямых.

<u>**Задача №1**</u> Прямая проходит через точку С (4;-3) и отсекает на оси ординат отрезок в=5. Найти ее уравнение.

<u>**Решение:**</u> Будем искать уравнение прямой в виде (2). Т.к. в условии задачи указана величина отрезка в=5, нам остается найти угловой коэффициент k. Т.к. прямая проходит через точку С(4;-3), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению прямой. Это означает, что после подстановки в (2) вместо х значение х=4, вместо у- значение у=-3 и вместо
b - значение $b = 5$ равенство (2) превращается в равенство
-3=4k+5, -4k=8, k= -2
тогда искомое уравнение прямой запишется в виде у= -2х+5.

<u>Задача 2.</u> Найти уравнение прямой вида Ax+By-3=0, проходящей через точки M(1;2) и N(2;1).

<u>Решение.</u> Нахождение уравнения искомой прямой в данном случае означает определение неизвестных коэффициентов A и B.

Поскольку прямая проходит через точки M и N, то координаты этих точек удовлетворяют данному уравнению, поэтому имеем.

$$\begin{cases} A+2B-3=0 \\ 2A+B-3-0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-2B \\ 2(3-2B)+B-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-2B \\ 6-4B+B-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-2B \\ -3B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-2B \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

Таким образом, уравнение искомой прямой имеет вид x+y-3=0.

<u>Задача 3.</u> Прямая проходит через точки A(3;-3) и B(-3;4).

Написать уравнение этой прямой в отрезках.

<u>Решение:</u> Так как прямая проходит через точки A и B, то их координаты удовлетворяют уравнению (4)

$$\begin{cases} \frac{3}{a}-\frac{3}{в}=1 \\ -\frac{3}{a}+\frac{4}{в}=1 \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, имеем $\frac{1}{в}=2$, откуда $в=\frac{1}{2}$. Подставляя в первое уравнение, находим $a=\frac{3}{7}$. Таким образом, искомое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x}{\frac{3}{7}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1 \quad или \quad \frac{7x}{3}+2y=1$$

<u>Задача 4.</u> Дано общее уравнение прямой *12x – 5y – 65 = 0*. Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках; в) нормальное уравнение.

<u>Решение.</u> а) Разрешив уравнение прямой относительно *y*, получаем уравнение с угловым коэффициентом $y=\frac{12}{5}x-13$, здесь $k=\frac{12}{5}$; $b=-13$.

б) Перенесем свободный член общего уравнения в правую сторону и разделим обе части на 65;

$\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1$. Переписав последнее уравнение в виде $\frac{x}{\frac{65}{12}}+\frac{y}{-\frac{65}{5}}=1$, получим уравнение данной прямой в отрезках. Здесь $a=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$; $b=-\frac{65}{5}=-13$.

в) Определяем нормирующий множитель $\mu=\frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{1}{13}$. Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получаем нормальное уравнение прямой $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-5=0$.

Здесь $\cos\varphi = \frac{12}{13}$; $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$; ρ = 5.

<u>Задача 5.</u> Определить расстояние от точки M (1; 2) до прямой *20x – 21y – 58 = 0.*

<u>Решение.</u> Расстояние от точки M (x_0; y_0) до прямой находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};\ d = \frac{|20\cdot 1 - 21\cdot 2 - 58|}{\sqrt{400+441}} = \frac{|20-42-58|}{29} = \frac{|-80|}{29} = 2\frac{22}{29}.$$

<u>Задача 6.</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 3x-2y+2=0 и x+2y+4=0 и имеющей нормальный вектор $\vec{n}$=(2;-3) (рис.7)

<u>Решение.</u> 1) Построим прямые по характерным точкам.

3x-2y-12=0; если x=0, то y=-6, A(0;-6); если y=0, то x=4, B(4;0);

x+2y+4=0; если x=0, то y=-2, C(0;-2); если y=0, то x=-4, Д(-4;0)

2) Найдем точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 4x - 8 = 0 \qquad}$$

x=2; y=-3; M(2;-3)

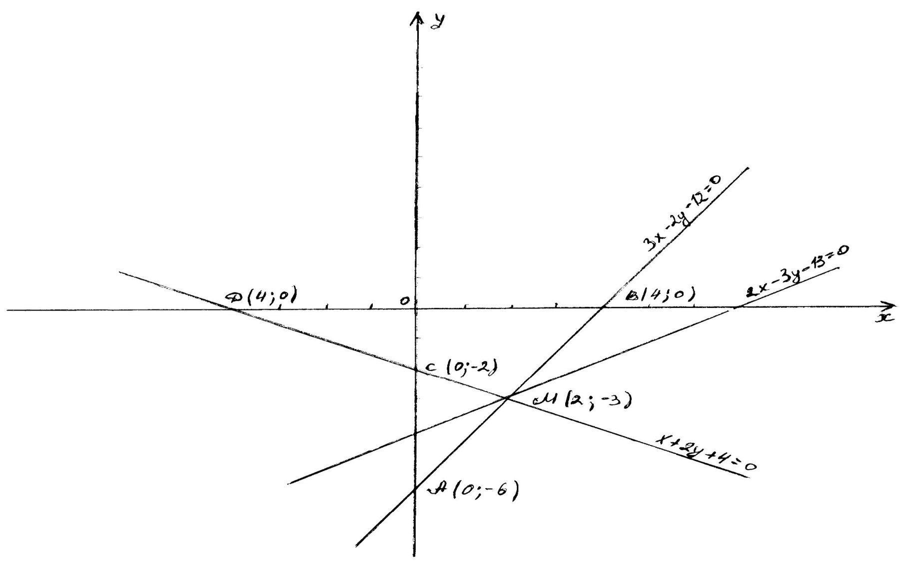


Рис. 7

3) Составим уравнение прямой, проходящий через точку M(2;-3) и имеющий нормальный вектор $\vec{n}$=(2;-3);

A(x-x_0)+B(y-y_0)=0; x_0=2, y_0=-3; A=2; B=-3

2(x-2)-3(y+3)=0; 2x-4-3y-9=0; 2x-3y-13=0

<u>Задача 7.</u> Даны точки P_1 (8;-4) и P_2 (16;20). Составить уравнение прямой, проходящий через точку P_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{P_1P_2}$.

<u>Решение.</u> Координат нормального вектора искомой прямой $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2}$, таковы:
x-x_0=16-8, y-y_0=20-(-4)=24. Подставив эти координаты в уравнение

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, получим $8(x-8)+24(y+4)=0$, откуда $8x+24y+32=0$, т.е. $x+3y+4=0$

Задача 8. Найти точку пересечения прямых $2x+3y-13=0$ и $3x+2y-12=0$
Решение. Задачи сводится к решению системы.

$$\begin{cases} 2x+3y-13=0 \\ 3x+2y-12=0 \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 3, второе на –2 и сложив оба уравнения получим

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 6x+8y-39=0 \\ -6x-4y+24=0 \end{cases} \\ \hline \quad 5y-15=0 \end{array}$$

, откуда $y=3$

Подставив $y=3$ в любое уравнение, получим $x=2$. Следовательно, прямые пересекаются в точке (2;3). Ответ: A(2;3)

Задача 9. Найти угол между прямой $x+2y-4=0$ и прямой, проходящей через точки A(-1;5) и
B(2;-4). Построить график (рис.8).
Решение. 1) $x+2y-4=0$ если $x=0$, то $y=2$ если $y=0$, то $x=4$.
2) составим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \qquad \frac{y+4}{5+4}=\frac{x-2}{-1-2}; \qquad \frac{y+4}{9}=\frac{x-2}{-3}; \qquad \frac{y+4}{3}=-\frac{x-2}{1};$$

$y+4=-3x+6$; $3x+y-2=0$; $\vec{n}_2=(3;1)$

I способ. $cos\alpha=\cos\left(\vec{n}_1;^\wedge\vec{n}_2\right)=\left|\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B^2{}_2}}\right|;$

$$cos\alpha=\left|\frac{1\cdot3+2\cdot1}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{4+1}}\right|=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

значит, $\alpha=45^0$.

II способ. $tg\alpha=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_2\cdot k_1}\right|$

$x+2y-4=0$, $3x+y-2=0$
$k_1=-1/2$, $k_2=-3$

$tg\alpha=\left|\dfrac{-1/2+3}{1-1/2\cdot(-3)}\right|=\dfrac{5/2}{5/2}=1$. Так как $tg\alpha=1$, $то\ \alpha=45^0$

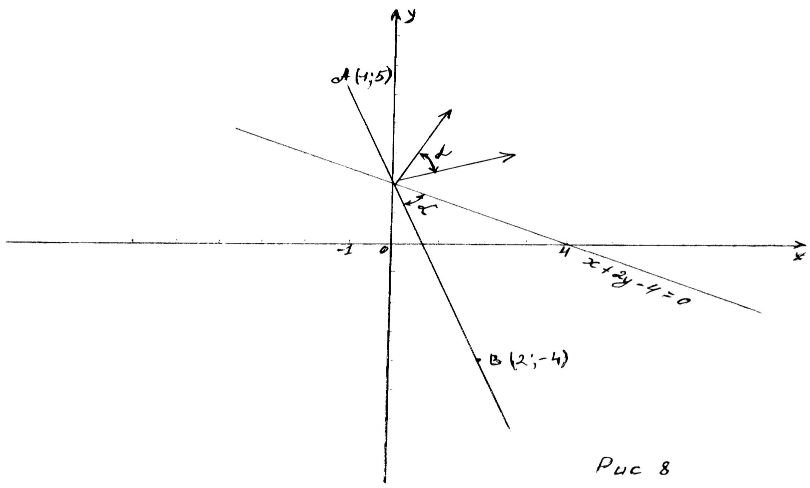


Рис 8

Задача 10. Найти расстояние от точки A(-1;2) до прямой 3x-5y-21=0 (рис.9). Построить график.

Решение. 1) 3x-5y-21=0; если x=0, то $y=-21/5$ Если y=0, то x=7.

2) $|AB|=\left|\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$, $|AB|=\left|\dfrac{3(-1)+(-5)\cdot 2+(4)}{\sqrt{9+25}}\right|=\left|\dfrac{-3-10-21}{\sqrt{34}}\right|=\dfrac{34}{\sqrt{34}}=\dfrac{34\cdot\sqrt{34}}{34}=\sqrt{34}$

Ответ $|AB|=\sqrt{34}.$

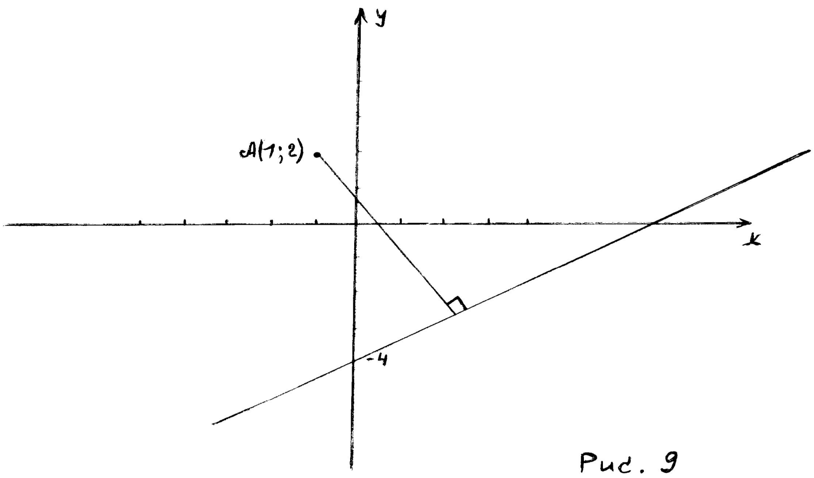


Рис. 9

Задача 11. Вычислить угол между прямыми 6x-2y+9=0 и 4x+2y-7=0. Сделать чертеж.

Решение. Угол между данными прямыми найти по формуле.

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right|,$$ где $\vec{n}_1(6;-2)$, $\vec{n}_2(4;2)$

Сначала найдем скалярное произведение нормальных векторов, их абсолютные величины и произведение нормальных векторов.

$$\vec n_1 \vec n_2 = 6\cdot 4 + (-2)\cdot 2 = 24 = 4 = 20$$

$$\vec n_1 = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{40} = \sqrt{4\cdot 10} = 2\sqrt{10},$$

$$\left|\vec n_2\right| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5},$$

$$\left|\vec n_1\right|\left|\vec n_2\right| = 2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{50} = 4\sqrt{25\cdot 2} = 4\cdot 5\cdot\sqrt{2} = 20\sqrt{2}.$$

$$\textit{тогда} \quad \cos\varphi = \left|\frac{20}{20\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};$$

Итак, угол между данными прямыми равен 45^0. Сделаем чертеж в системе координат (рис. 10); Данные прямые построим по точкам их пересечения с осями координат:

1) 6x-2y+9=0, $\quad 0x:\begin{cases} y=0 \\ x=-1{,}5 \end{cases} \quad 0y:\begin{cases} x=0 \\ y=4{,}5 \end{cases}$

2) 4x+2y-7=0, $\quad 0x:\begin{cases} y=0 \\ x=1{,}75 \end{cases} \quad 0y:\begin{cases} x=0 \\ y=3{,}5 \end{cases}$

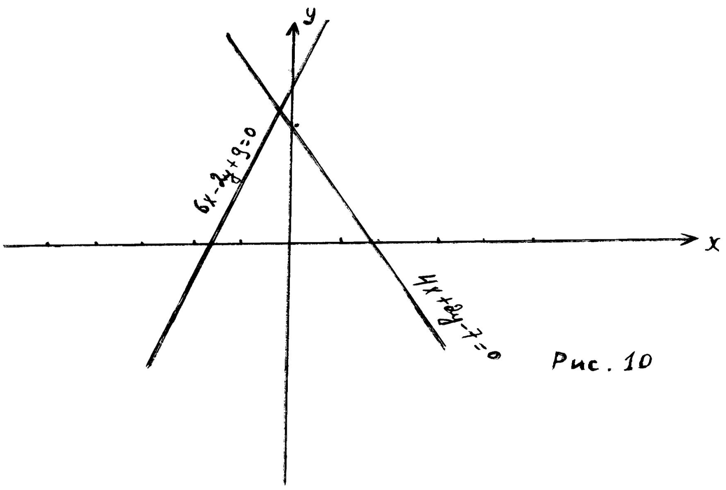


Рис. 10

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Даны вершины треугольника: A (4;6),B (-4;0) и C (-1;-4) составить уравнения : 1) трех его сторон; 2) медианы, проведенной из вершины C; 3) биссектрисы угла B; 4) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

   Ответ: 1) 3x-4y+12=0, 4x+3y+16=0, 2x-y-2=0;
   2) 7x-y+3=0 3) x+7y+4=0, 4) 3x-4y+12=0.

2. Написать уравнение прямой, соединяющий центр тяжести треугольника ABC с началом координат, причем координаты вершин такие: (2;-1), (4;5) и (-3;2).

   Ответ: y=2x.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых 3x-4y-20=0 и
   x+y-2=0 перпендикулярно прямой x+2y-8=0.

   Ответ: 2x-y-10=0

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку p(5;-6) перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-3;8)$.

Ответ: 3x-8y-63=0.

5. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки А(-5; 2) на прямую 4x-2y+3=0. Угол $\varphi = \pi/2$

Ответ: x+4y-3=0.

6. Точки А(-6; -1), В(3;6) и С(6;-5)- вершины треугольника. Составьте параметрические уравнения его сторон.

Ответ: x=3+9t, y=6+7t (AB) ; x=3+3t, y=6-11t (BC)

7. Определите острый угол между прямыми x+3y-2=0 и 2y=x+5.

Ответ: $\varphi = 45^0$

8. Найдите координаты точки пересечения прямых 2x+5y=4 и 3x+8y-7=0.

Ответ: (-3; 2).

9. Составьте, уравнение прямой, перпендикулярной прямой 2x-5y+10=0 и проходящей через точку Р (2;4).

Ответ: 5x+2y=6.

10. Уравнение сторон треугольника имеют вид x-2y+8=0, y=0 и 2x-y-4=0. Найдите внутренние углы треугольника.

Ответ: 116°34', 26°34', 36°52'.

Использованная и рекомендуемая литература.

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, 1971г.
2. Бугоров Я.С., Никольский С.М. элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва, 1980 г.
3. Выгодский М.Я. Аналитическая геометрия. Москва, 1963 г.
4. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф., Курс высшей математики Москва, 1964 г.
5. Клетник А.В. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1986г.
6. Миронский В.П. Сборник задач по высшей математике. Москва, 1987 г.
7. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Москва, 1961 г.
8. Цубербиллер С.К. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Москва, 1961г.
9. Апанасов П.Т., Орлов М.И. Сборник задач по математике-М., 1987г.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
НА ПЛОСКОСТИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов технических направлений:
5521102.02 «Организация безопасности движения»,
551700 «Электроэнергетика»

Составитель ***Джанузакова А.А.***

Корректор ***Монолдорова Т.А.***
Тех.редактор ***Исмаилбеков М.Э.***

Подписано к печати 02.05.07 г. Формат бумаги 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 1,25 п.л. Тираж 30 экз. Заказ 187
Цена 18,10 с.

г.Бишкек, ул, Сухомлинова, 20. ИЦ "Текник" КГТУ, т.: 56-14-55, 54-29-43
E-mail: ict@ktu.aknet.kg, beknur@mail