

### К оптимальной фильтрации непрерывных сигналов

Проблема оптимальной фильтрации сигналов при наличии случайных помех занимает одно из центральных мест при построении систем автоматического управления, электросвязи, радиолокации и анализаторов спектра сигналов. Для её решения в настоящее время используется целый ряд методов и алгоритмов [1-4]. В работе рассматривается один из возможных подходов к синтезу оптимального фильтра Винера.

Рассмотрим схему обработки сигналов, показанную на рис.1.

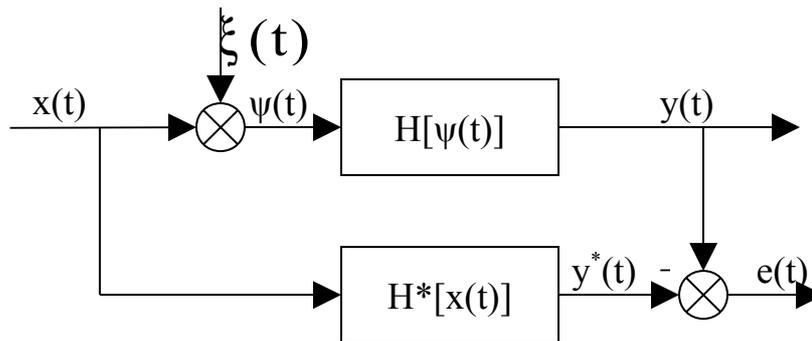


Рис.1.

Здесь  $x(t)$  – полезный сигнал;  $\xi(t)$  – помеха (шум);  $\psi(t) = x(t) + \xi(t)$  – сигнал на входе системы;  $H[z(t)]$  – оператор преобразования сигналов;  $H^*[x(t)]$  – идеальный (желаемый) оператор преобразования;  $y^*(t)$  – желаемый сигнал на выходе системы:

$$y^*(t) = H^*[x(t)]; \quad (1)$$

$y(t)$  – выходной сигнал системы, определяющий оценку желаемого выхода:

$$y(t) = H[\psi(t)]. \quad (2)$$

Общая задача оптимальной обработки сигналов заключается в определении оператора преобразования  $H[\psi(t)]$ , минимизирующего математическое ожидание квадрата невязки  $e(t)$ , т.е. функционал

$$I = M[e^2(t)]. \quad (3)$$

Пусть желаемый оператор  $H^*[x(t)]$  задан передаточной функцией

$$W^*(s) = \frac{Y^*(s)}{X(s)}. \quad (4)$$

В случае, когда желаемая передаточная функция системы

$$W^*(s) = 1, \quad (5)$$

то имеем задачу оптимальной фильтрации сигнала  $\psi(t)$ , а в случае когда

$$W^*(s) = e^{sT}, \quad (6)$$

то проблема обработки состоит в оптимальном предсказании (прогнозировании, экстраполяции, упреждении) сигнала на время  $T$ .

Далее предполагается, что справедливы следующие предположения:

- 1) полезный сигнал  $x(t)$  и помеха  $\xi(t)$  являются независимыми стационарными случайными процессами;

2) операторы преобразования  $H[\psi(t)]$  и  $H^*[x(t)]$  являются линейными.

Пусть известна автокорреляционная функция  $R_\psi(\tau)$  входного сигнала и взаимокорреляционная функция  $R_{x\psi}(\tau)$  сигналов  $x(t)$  и  $\psi(t)$ . В этих условиях решение задачи оптимальной фильтрации дается следующим уравнением Винера-Хопфа [1-3]:

$$R_{x\psi}(\tau) = \int_0^{\tau} R_x(\tau - \lambda) w(\lambda) d\lambda, \quad (7)$$

где  $w(t)$  – импульсная переходная функция (ИПФ) оптимального фильтра.

В случае когда решается задача оптимального предсказания уравнение Винера-Хопфа имеет вид [3]:

$$R_{x\psi}(\tau + T) = \int_0^{\tau} R_x(\tau - \lambda) \tilde{w}(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

где  $\tilde{w}(t)$  – оптимальная ИПФ прогнозирующего фильтра.

Основное требование заключается в том, что решение интегральных уравнений (7) и (8) должны удовлетворять условиям технической реализуемости фильтров:

$$w(t) = 0 \text{ для всех } t < 0;$$

$$\tilde{w}(t) = 0 \text{ для всех } t < 0. \quad (9)$$

Для решения интегральных уравнений (7) и (8) относительно искомых ИПФ оптимальных фильтров используются различные подходы: частотные методы [1,3,6]; спектральные алгоритмы [7]; методы, основанные на сведении уравнений (7) и (8) к системе линейных алгебраических уравнений [3].

Далее рассмотрим возможность синтеза оптимальных фильтров Винера и Колмогорова на основе решения интегральных уравнений (7) и (8). При этом методология их решения будет базироваться на функциональных соотношениях принципа гарантируемой динамики [8] и концепции настраиваемой модели [9]. Общая схема концепции настраиваемой модели показана на рис.2.

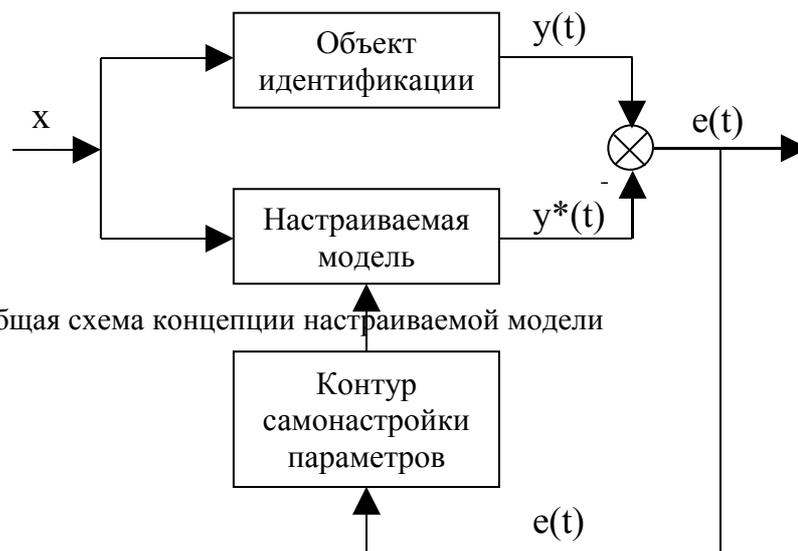


Рис.2. Общая схема концепции настраиваемой модели

Здесь  $x(t)$ ,  $y^*(t)$  – входной и выходной сигналы объекта соответственно;  $y^*(t)$  – выход настраиваемой модели;  $e(t)$  – ошибка (невязка) идентификации, определяемая следующим соотношением:

$$e(t) = y(t) - y^*(t).$$

Основная идея концепции настраиваемой модели состоит в следующем. Один и тот же сигнал  $x(t)$  одновременно подается на входы идентифицируемого объекта и модели. Структура настраиваемой модели задается, а ее параметры  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , являются неизвестными, которые составляют вектор  $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ . Функция контура самонастройки заключается в изменении вектор-параметра  $p$  так, чтобы с течением времени ошибка идентификации  $e(t)$  стремилась к нулю, что эквивалентно близости выходных сигналов объекта и модели.

Предположим, что для  $e(t)$  задано допустимое подмножество

$$E(t) = \{ e \in \mathbb{R}^1 : |e(t)| \leq \delta_1(t) \},$$

где  $\delta_1(t)$  – положительная непрерывно дифференцируемая функция. Она определяет границы допустимой области для  $e(t)$  и формируется на основе требований к точности идентификации объекта.

Математическое описание подмножества  $E(t)$  дается принципом гарантируемой динамики [8].

**Утверждение 1.** Пусть в начальный момент времени  $e(0) \in E(0)$ . Тогда для того, чтобы при  $t > 0$  невязка  $e(t) \in E(t)$  для каждого  $t$  достаточно выполнения соотношения

$$\int_0^t \dot{e}(\tau) e(\tau) d\tau \leq \int_0^t \dot{\delta}_1(\tau) \delta_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

где  $T$  – период идентификации.

Отметим, что выполнение условия (10) гарантированным образом обеспечивает принадлежность невязки  $e(t)$  допустимому множеству  $E(t)$ . Поставим задачу получения менее жесткого и в то же время эффективного критерия оценки качества идентификации объекта. Для этой цели рассмотрим интегральную функцию, которая входит в правую часть неравенства (10):

$$J(t) = \int_0^t \dot{e}(\tau) e(\tau) d\tau. \quad (11)$$

**Утверждение 2.** Пусть для каждого  $t \in [0, T]$  выполняется условие

$$\dot{e}(t) e(t) < 0. \quad (12)$$

Тогда модуль невязки  $|e(t)|$  монотонно убывает во времени и

$$\lim_{t \rightarrow T} e(t) = 0. \quad (13)$$

Действительно, анализ соотношения (12) показывает, что неравенство выполняется только в двух случаях:

- 1)  $e(t) > 0, \quad \dot{e}(t) < 0;$
- 2)  $e(t) < 0, \quad \dot{e}(t) > 0.$

Отсюда видно, что при выполнении соотношения (12) с течением времени невязка  $e(t)$  стремится к нулю, т.е. выполняется условие (13).

Настраиваемую модель фильтра представим в виде следующей линейной комбинации:

$$w(t) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(t), \quad (14)$$

где  $c_i$  – вещественные коэффициенты (параметры),  $\varphi_i(t)$  – функции, структура которых заданы.

В частности, в качестве  $\varphi_i(t)$  можно взять систему ортогональных базисных функций [7]. Далее рассмотрим случай, когда эти функции заданы в виде ряда экспонент:

$$\varphi_i(t) = e^{s_i t}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где  $s_i$  – вещественные параметры.

Из коэффициентов  $c_i$  и  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , образуем вектор-параметр синтезируемого фильтра:

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N, p_{N+1}, \dots, p_{2N-1}, p_{2N}] = [s_1, s_2, \dots, s_N, c_1, \dots, c_2, c_N]. \quad (16)$$

Теперь подставим выражение (14) в уравнение (7). В результате последнее принимает следующий вид

$$R_{xy}(\tau) = \mathbf{e} \int_0^{\tau} \mathbf{R}_x(\tau - \lambda) \tilde{\varphi}_i(\lambda) d\lambda, \quad (17)$$

где  $\tilde{\varphi}_i(\lambda) = c_i e^{s_i \lambda}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . (18)

Анализ соотношения (17) показывает, что интеграл в его правой части представляет собой реакцию  $i$ -ой подсистемы, имеющей импульсную переходную функцию  $\varphi_i(\tau)$ , на входной сигнал  $R_x(\tau)$ :

$$z_i(t) = \int_0^t R_x(\tau - \lambda) \tilde{\varphi}_i(\lambda) d\lambda, \quad i = \overline{1, N}. \quad (19)$$

При этом передаточная функция  $i$ -ой подсистемы с учетом (18) имеет вид

$$W_i(s) = \frac{c_i}{s + s_i}. \quad (20)$$

Структурная схема виртуальной динамической системы, состоящей из  $N$  подсистем, каждая из которых имеет передаточную функцию  $W_i(s)$ , показана на рис.3.

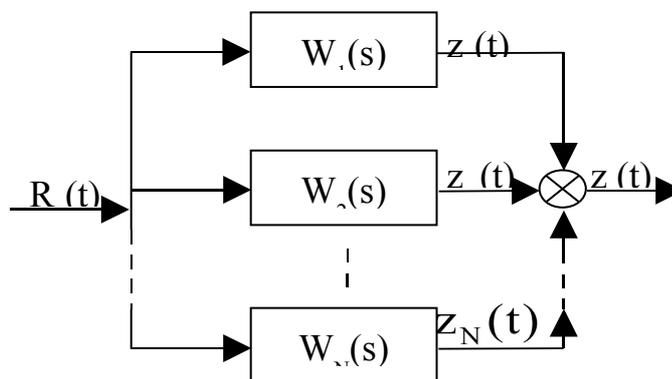


Рис.3. Структурная схема виртуальной динамической системы.

В результате уравнение (17) принимает следующий вид

$$R_{x\psi}(\tau) = \mathbf{e} \sum_{i=1}^N z_i(\tau). \quad (21)$$

Далее определяем ошибку идентификации и её производную

$$e(\tau) = R_{x\psi}(\tau) - \mathbf{e} \sum_{i=1}^N z_i(\tau), \quad (22)$$

$$\dot{e}(\tau) = \dot{R}_{x\psi}(\tau) - \mathbf{e} \sum_{i=1}^N \dot{z}_i(\tau). \quad (23)$$

С учетом (19) и (20) для определения  $z_i(\tau)$  получаем следующие уравнения:

$$\dot{z}_i(\tau) = -s_i z_i(\tau) + c_i R_x(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (24)$$

С учетом (24) производная невязки имеет вид

$$\dot{e}(\tau) = \dot{R}_{x\psi}(\tau) - \mathbf{e} \sum_{i=1}^N \dot{z}_i(\tau) - s_i z_i(\tau) + c_i R_x(\tau). \quad (25)$$

Подставим полученное выражение для  $\dot{e}(\tau)$  в формулу для критерия качества:

$$J(t) = \int_0^t e(\tau) \sum_{i=1}^N \dot{z}_i(\tau) - s_i z_i(\tau) + c_i R_x(\tau) dt. \quad (26)$$

После несложных преобразований критерий  $J(t)$  можно записать в виде

$$J(t) = \mathbf{e} \sum_{i=1}^N \int_0^t \dot{z}_i(\tau) - s_i z_i(\tau) dt + \mathbf{e} \sum_{i=1}^N \int_0^t s_i z_i(\tau) dt, \quad (27)$$

где  $\mathbf{e} \sum_{i=1}^N d_i = 1$ .

Теперь получим условия, при выполнении которых критерий  $J(t) < 0$ . Введем обозначение

$$\eta_i(t) = d_i \dot{z}_i(t) - c_i R_x(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (28)$$

Далее потребуем, чтобы законы изменения  $\eta_i(t)$  и  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , описывались следующими уравнениями:

$$\dot{\eta}_i(t) = \gamma_i^{-1} e(t), \quad (29)$$

$$\eta_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\dot{s}_i(t) = \alpha_i^{-1} e(t) z_i(t), \quad (30)$$

$$s_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

В результате выражение (27) для критерия  $J(t)$  принимает следующий вид:

$$J(t) = \mathbf{e} \sum_{i=1}^N \int_0^t \eta_i(\tau) \dot{\eta}_i(\tau) + \mathbf{e} \sum_{i=1}^N \int_0^t s_i(\tau) \dot{s}_i(\tau) dt. \quad (31)$$

Нетрудно доказать [5], что при  $\eta_i(0) = s_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , выражение (31) для  $J(t)$  преобразуется к виду:

$$J(t) = \prod_{i=1}^N \gamma_i \eta_i^2(\tau) + \prod_{i=1}^N \alpha_i s_i^2(\tau). \quad (32)$$

Отсюда видно, что  $J(t) < 0$  для всех  $t > 0$ , если выполняются условия

$$\begin{aligned} \gamma_i &< 0, \\ \alpha_i &< 0, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (33)$$

Динамику параметров  $c_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , можно получить, если продифференцировать вспомогательную переменную  $\eta(t)$ , определяемую формулой (28):

$$\dot{\eta}(t) = d_i \ddot{R}_{x\psi}(t) - \dot{c}(t)R_x(t) - c_i(t)\dot{R}_x(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (34)$$

С учетом (29) и (34) имеем, что

$$\dot{c}(t)R_x(t) - c_i(t)\dot{R}_x(t) = -\gamma_i^{-1}e(t) - d_i \ddot{R}_{x\psi}(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (35)$$

Начальные условия для уравнений (35) получаем из (28):

$$c_i(0) = d_i \dot{R}_{x\psi}(0) / R_x(0), \quad i = \overline{1, N}. \quad (36)$$

Таким образом, динамика контура самонастройки описываются уравнениями (30) и (35). В результате алгоритм синтеза оптимального фильтра Винера имеет следующий вид.

**Шаг 1.** Определение корреляционных функций  $R_x(\tau)$  и  $R_{x\psi}(\tau)$  по экспериментальным данным.

**Шаг 2.** Задание структуры ИПФ  $w(t)$  и составление вектор-параметра искомого фильтра  $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ .

**Шаг 3.** Формирование уравнений динамики (30) и (35) контура самонастройки.

**Шаг 4.** Задание параметров  $\alpha_i$  и  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , в соответствии с условиями (33).

**Шаг 5.** Решение уравнений динамики контура самонастройки (30) и (35).

**Шаг 6.** Определение искомого вектор-параметра  $p^* = \{p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*\}$  фильтра.

Следует отметить, что полученный алгоритм синтеза оптимального фильтра Винера можно использовать и для решения задачи оптимального прогнозирования. При этом вместо функций  $R_{x\psi}(\tau)$  и  $\ddot{R}_{x\psi}(\tau)$ , входящих в уравнения динамики контура самонастройки (30) и (35), необходимо взять соответственно  $R_{x\psi}(\tau + T)$  и  $\ddot{R}_{x\psi}(\tau)$ .

## Литература

1. Winer N. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley & Sons, Inc., New-York, №7, 1949.
2. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР, сер.матем., т.5, №1, 1941, с.15-16.

3. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960. – 542с.
4. Zadeh L.A., Ragazzini J.R. Extension of Wiener's theory of prediction, Journ. Appl. Phys., v.21, №7, 1950, pp. 45-655.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396с.
6. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и её приложения в связи и управлении. – Связь, 1976. – 496с.
7. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
8. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. Кн.1. Синтез линейных автоматических систем. – Бишкек, Илим, 2001. – 150с.
9. Кожекова Г.А., Оморов Т.Т. Идентификация передаточной функции динамической системы на основе концепции настраиваемой модели. //Научный мир Казахстана, вып. №2, Шымкент, 2008.