УДК 50.3.004.7 (575.2) (04)

МЕТОД РАЗБИЕНИЯ ИНТЕРВАЛА В ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ МАСШТАБЕ В ПРОБЛЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА

О.Н. Федяй

Изложен метод, упрощающий численное моделирование функции Планка, определена первообразная функция и выведена формула связи максимума первообразной с максимумом производной. В Релеевском приближении произведена оценка влияния атмосферы Земли на приходящее от Солнца излучение.

Ключевые слова: моделирование; тепловое излучение; оптика атмосферы.

1. Метод разбиения интервала в логарифмическом масштабе. Логарифмическая шкала часто используется в графическом представлении результатов расчета. Кроме того, вопрос заключается в том, что существует проблема связи аналитического представления решения и численным решением задачи на компьютере. Эта проблема вызвана техническими ограничениями компьютеров, с одной стороны, и искусством построения алгоритма расчета – с другой.

Итак, пусть

a – начало интервала > 0;

b – конец интервала > a;

N – количество точек разбиения > 1;

i – переменная разбиения, принадлежит интервалу от 1 до N.

Представим экспоненциальную функцию в виде

$$x_i = ae^{c(i-1)}, \tag{1}$$

где i – переменная разбиения, которая является показателем степени (логарифм это степень…);

с – множитель, который определяется на конце интервала, когда

$$x_N = b \cdot \tag{2}$$

После подстановки (2) в (1), исходя из условия конца интервала, когда $i = N$, получим следующее выражение:

$$b = ae^{c(N-1)} \cdot \tag{3}$$

Логарифмируя выражение (3), получим

$$c = \frac{\ln (b/a)}{(N-1)} \cdot \tag{4}$$

После подстановки (4) в (1) функция разбиения интервала примет следующий вид:

$$x_i = ae^{\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}(i-1)} \cdot \tag{5}$$

Исключительную особенность функции (5) представляет ее первая производная по i:

$$x_i' = a\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}e^{\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}(i-1)}. \qquad (6)$$

Представим (6) в следующем виде: $dx_i = x_i' di$.

$$dx_i = a\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}e^{\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}(i-1)}di. \qquad (7)$$

Поскольку di представляет собой равномерный шаг разбиения, равный единице, то корректно в (7) произвести замену знака дифференциала d на знак дельта Δ. Принимая во внимание, что $di = 1$, получим следующую формулу для множителя равномерного шага разбиения:

$$\Delta x_i = a\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}e^{\frac{\ln(b/a)}{(N-1)}(i-1)}. \qquad (8)$$

Кроме того, физическая особенность математического выражения (7) заключается в том, что его правая часть относительно знака равенства разделяется на два множителя x_i' и di, первый из которых равен Δx_i и имеет размерность величины x, а второй числовой, равный единице, и не имеет никакой размерности (возможно, подобное разделение может хоть в какой-нибудь степени служить мерилом интересов физиков и математиков, имеется в виду известный в истории случай непримиримости Ньютона и Лейбница). Еще, равномерное разбиение относительно i удовлетворяет условию интегрирования методом Симпсона.

Исходя из представления функции разбиения для интервала от a до b, с двумя контрольными точками на краях, можно обобщить выражение (5) для случая разбиения с двумя контрольными точками в середине интервала с условно свободными концами, для этого достаточно ввести два целочисленных значения:

N_a – количество точек разбиения от условно свободного начала интервала до контрольной точки a;

N_{ab} – количество точек разбиения в интервале от a до b.

При этом должно выполняться условие

$N_a \geq 1$;

$N_{ab} \geq 1$;

$N_a + N_{ab} \leq N$.

После подстановки в (5) целочисленных значений N_a и N_{ab} получим следующее выражение для разбиения с двумя контрольными точками a и b:

$$x_i = ae^{\frac{\ln(b/a)}{N_{ab}}(i-N_a)}. \qquad (9)$$

При этом множитель равномерного шага разбиения (8) примет следующий вид:

$$\Delta x_i = x_i' = a\frac{\ln(b/a)}{N_{ab}}e^{\frac{\ln(b/a)}{N_{ab}}(i-N_a)}. \qquad (10)$$

Таким образом, мы получили удобную для численного моделирования функцию разбиения в логарифмическом масштабе (9) и ее производную (10).

2. Определение первообразной функции Планка и вывод формулы связи максимума первообразной с максимумом производной. Закон Планка [1, 2] описывает мощность излучения абсолютно черного тела $B(\lambda, T)$ на единицу площади излучающей поверхности как функцию температуры Т и длины волны λ:

$$dB(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}d\lambda; \qquad (11)$$

$$P(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \qquad (12)$$

где $dB(\lambda, T)$ – мощность излучения на единицу площади излучающей поверхности в диапазоне длин волн от λ до λ + dλ [$Вт \cdot м^{-2}$];

$P(\lambda, T)$ – функция Планка, интенсивность излучения (спектральная плотность мощности излучения) на единицу площади излучающей поверхности в диапазоне длин волн от λ до λ + dλ [$Вт \cdot м^{-2} \cdot мкм^{-1}$];

Т – эффективная температура поверхности излучающего тела [К];

h – постоянная Планка [=6,626 068 96(63)$\times 10^{-34}$ Дж·с];

k – постоянная Больцмана [=1,380 6504(24)×10−23 Дж·К−1].

с – скорость света в вакууме [=299 792 458 м·с$^{-1}$].

При условии $\lambda \to \infty$ формула Планка принимает вид Рэлея–Джинса

$$P(\lambda, T) = 2kT\frac{c}{\lambda^4}\cdot \tag{13}$$

Представим (12) в следующем виде:

$$P(x) = C_1\frac{x^5}{e^x - 1}, \tag{14}$$

где $x = \dfrac{hc}{\lambda kT}$;

C_1 – относительно длины волны λ постоянная величина, зависящая только от температуры Т, в общем случае численного моделирования определяется условиями нормировки (17).

Максимум Вина определяется из уравнения

$$5(e^x - 1) - xe^x = 0.$$

$$x_{\max P} = 4{,}9651;$$

$$\lambda_{\max P} = \frac{2898}{T}.$$

Для определения первообразной функции Планка можно использовать свойства гамма-функции. В нашем случае мы применяем метод разбиения интервала в логарифмическом масштабе (5) и без особых проблем получаем первообразную функцию Планка. Определение максимума для первообразной функции Планка легко вычисляется численно, путем последовательного сужения интервала разбиения в области максимума с последующей прогонкой до необходимой точности. Аналитическое представление первообразной имеет следующий вид:

$$B(x) = C_2\frac{x^4}{e^x - 1}, \tag{15}$$

где C_2 – относительно длины волны λ постоянная величина, зависящая только от температуры Т, в общем случае численного моделирования определяется условиями нормировки (17).

Максимум определяется из уравнения

$$4(e^x - 1) - xe^x = 0$$

$$x_{\max B} = 3{,}9207$$

$$\lambda_{\max B} = \frac{3669}{T}$$

Определение формулы связи максимума первообразной с максимумом по Вину для функции Планка следует из зависимости максимумов от температуры:

$$\frac{\lambda_{\max B}}{\lambda_{\max P}} = \frac{3669}{2898} = 1{,}266\cdot \tag{16}$$

3. Особенности программирования функции Планка на примере теплового излучения Солнца. При численном моделировании аналитического представления функции Планка (12) необходимо учитывать ограничения в начале и в конце области определения функции. Это связано с тем, что в показателе степени $x = \dfrac{hc}{\lambda kT}$ при экспоненте, значение λ находится в знаменателе, и в области $\lambda \to 0$ вычисление ограничивается техническими возможностями компьютера. В программе функции нашей математической модели расчет x определяется в пределах от 0,001 до 100 по формуле Планка, а в интервале ниже 0,001 – по приближению Рэлея–Джинса (13). В интервале выше 100 будем считать функцию излучения равной нулю.

На примере теплового излучения Солнца [3] для эффективной температуры T = 5830 K, параметры функции разбиения имеют следующие значения:

$$N = 148$$

$$N_a = 50$$

$$N_{ab} = 11$$

$$a = \lambda_{\max P} = 0{,}497$$

$$b = \lambda_{\max B} = 0{,}6294$$

При этом, после нормировки по условию (17) на величину солнечной постоянной $q_c = 1370$ [Вт/м²], значения функции Планка на условно свободных концах области определения $\lambda = [0{,}1738 \div 4{,}06593]$ равны соответственно $\mathrm{P_c}(\lambda, \mathrm{T}) = [0{,}49 \div 0{,}12]$.

Условие нормировки:

$$q_c = \int_\lambda \mathrm{P_c}(\lambda, \mathrm{T})d\lambda\,. \tag{17}$$

4. Оценка влияния атмосферы Земли на приходящее от Солнца излучение в Релеевском при-

ближении. Пусть наша физическая модель атмосферы будет учитывать только влияние молекулярной воды (капли воды минимального размера) в видимой области (без учета O_3, O_2 и аэрозолей), в качестве первого элемента, составляющего атмосферу. В связи с этим будем условно считать оптическую толщину τ=0,01 для λ=0,5мкм. Определим следующие элементы модели:

– толщина атмосферного слоя h = 10 км = 10^{10}мкм;

– средний радиус молекулярной воды r = =10^{-3}мкм;

– показатель преломления n = 1,33 для всех длин волн видимой области.

Произведем расчет сечения рассеяния, используя приближения Рэлея (18). Из уравнения (19) оценим среднюю объемную концентрацию молекулярной воды N_V для λ=0,5 мкм и τ = 0,01.

$$Q_{sca}(\lambda) = 8{,}345 \cdot 10^{-2} \cdot n \cdot \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^4 . \qquad (18)$$

$$\tau(\lambda) = Q_{sca}(\lambda) \cdot \pi \cdot r^2 N_V \cdot h ; \qquad (19)$$

$$N_V = 1{,}15 \cdot$$

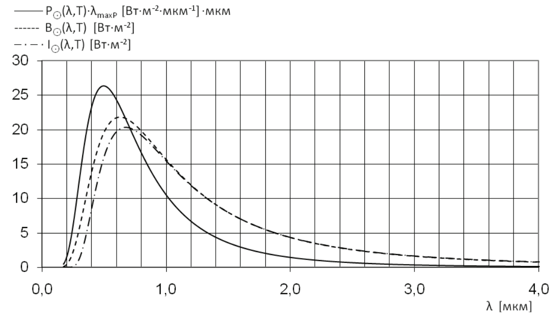
Произведем расчет приходящего от Солнца [1,4] излучения на закате (20), для угла над горизонтом $\approx 3^o$, толщина атмосферного слоя в этом направлении будет равна $h = 10/\sin(3\pi/180)$ км $\approx$ 200 км = 2· 10^{11}мкм.

$$I_\Theta(\lambda, T) = B_\Theta(\lambda, T) \cdot e^{-\tau(\lambda)} . \qquad (20)$$

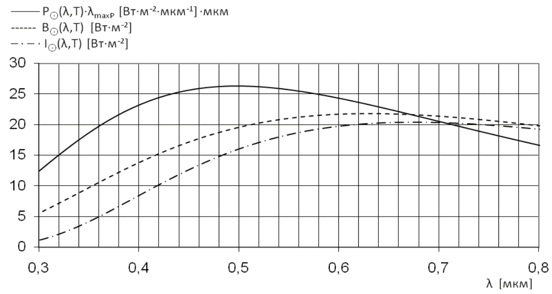
Результаты расчета графически представлены ниже.

Спектр теплового излучения Солнца, рассчитанный по формуле Планка теплового излучения абсолютно черного тела $P_\Theta(\lambda, T)$ (для наглядной совместимости с другими кривыми, умножена на λmaxP) при T= 5830 K, λmaxP = 0,497 мкм (сплошная линия), $B_\Theta(\lambda, T)$ распределение мощности излучения (пунктирная линия) λmaxB = 0,6294 мкм и $I_\Theta(\lambda, T)$ распределение мощности излучения на закате с учетом Релеевского рассеяния на молекулярной воде (штрихпунктирная линия) λmax = 0,67 мкм.

Заключение. В результате численного эксперимента следует, что, глядя на Солнце, мы наблюдаем не плотность распределения мощности, соответствующую функции Планка при T= 5830 K с максимумом излучения λmax = 0,497 мкм, принадлежащим области длин волн зеленого цвета, а мощность излучения с максимумом λmax = 0,6294 мкм, принадлежащим области длин волн оранжевого цвета. Ослепительно ярко-белое видение вызвано чувствительностью глаза человека, которая ограничивается пределом мощности восприятия [5]. Для положения Солнца под углом $\approx 3^o$ над горизонтом Земли было численно доказано влияние Релеевского рассеяния на смещение максимума мощности излучения в область длин волн красного цвета λmax = 0,67 мкм.



а) - общий вид;



б) - вид в интервале видимости глаза.

Метод разбиения интервала в логарифмическом масштабе позволяет без особых проблем получить первообразную функцию Планка. Абсолютное значение функции определяется нормировкой на заданную величину. Определение максимума для первообразной функции Планка вычисляется численно, путем последовательного сужения интервала разбиения в области максимума с последующей прогонкой до необходимой точности. Формула связи максимума λ_{maxB} первообразной с максимумом λ_{maxP} по Вину для функции Планка определяется следующим выражением:

$$\frac{\lambda_{\max B}}{\lambda_{\max P}} = \frac{3669}{2898} = 1{,}266 \cdot$$

Литература

1. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 664 с.
2. *Кухлинг. Х.* Справочник по физике / Пер. с нем. М.: Мир, 1982. 520 с.
3. Солнце.Физическая энциклопедия // http://www.femto.com.ua/phys_world/preview-1.html
4. *Чен Б.Б., Свердлик Л.Г.* Оптические свойства аэрозолей Центрального Тянь-Шаня по данным лазерного зондирования. Бишкек: КРСУ, 2006. 274 с.
5. Kvant. Лазерная указка // http://www.physbook.ru