

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ, ОБЛАДАЮЩИХ ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

АБДРАХМАНОВ С.А., ДЖАНАЛИЕВ Н.Р., КОЖОШОВ Т.Т.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Приводятся основные особенности деформирования материалов с эффектом памяти формы. На основе модельных представлений даны зависимости между напряжениями и деформациями для таких материалов и показаны некоторые примеры их использования.

1. Термоупругие мартенситные превращения и характеристические температуры превращения (ХТП)

В 1961 году в американской военно-морской артиллерийской лаборатории был создан сплав нитинол – 55 (55 % никеля), представляющий собой интерметаллическое соединение эквивалентного состава никеля и титана [1,2]. Он претерпевал обратимые фазовые превращения при температурах, близких к комнатной. Обратимость превращения в макроэксперименте проявлялся как свойство памяти формы образца. Позже аналогичный эффект был обнаружен практически во всех материалах, в которых происходят мартенситные превращения [3]. Открытие фазовых превращений дали мощный стимул для исследования материалов с такими свойствами [4,5].

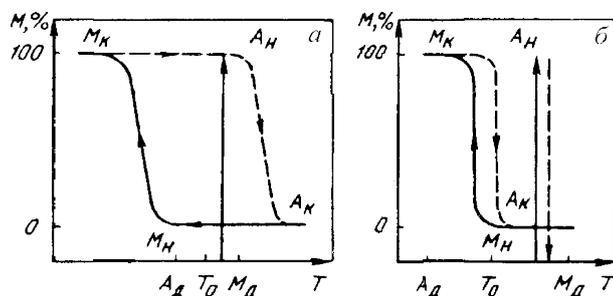
В настоящее время, работы по изучению материалов обладающих эффектом запоминания формы ведутся в основном по 3-м главным направлениям:

1. Создание материалов с памятью формы с наперед заданными физико-механическими характеристиками;
2. Разработка теории деформирования и разрушения таких материалов;
3. Создание принципиально новых машин и устройств с использованием эффекта памяти формы (ЭПФ).

Необычность и разнообразие функциональных возможностей материалов с ЭПФ обеспечили им самое широкое применение в различных отраслях науки и техники.

Однако надо отметить, что время лёгкого использования свойств этих материалов (методом “тыка”) проходит и важное значение приобретает разработка как физических, так и механических теорий деформирования и расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) этих материалов при термосиловом воздействии.

Превращения, происходящие в таких материалах, представляют собой разновидность полиморфного фазового перехода. При действии температуры или напряжения, или их совместного действия меняются не только параметры но и тип кристаллической решетки. Эти превращения осуществляются без диффузии, путём кооперативного перемещения атомов. Зависимость концентрации фазового состава от температуры для обратимых превращений приведена на рис 1.



а) широкий гистерезис; б) узкий гистерезис

Рис. 1. Зависимость фазового состава сплава от температуры.

Здесь M_n , M_k – соответственно температуры начала и конца мартенситного превращения, A_n , A_k – температуры начала и конца аустенитного превращения.

Высокотемпературную фазу принято называть аустенитом, а низкотемпературную — мартенситом.

Надо отметить, что ХТП сильно зависят от химического состава сплава. На рис. 2 приведены зависимости ХТП для TiNi сплава, причем малейшее изменение содержания Ni меняет ХТП.

2. Диаграммы деформирования сплавов с ЭПФ и изменения физико-механических параметров в зависимости от температуры

Диаграмма растяжения для материалов с ЭПФ сильно зависит от температуры [5]. Причем при разгрузке возможны 2 случая: 1- разгрузка идет с образованием остаточных деформаций; 2- разгрузка идет упруго, а затем - до полного исчезновения (это эффект сверхупругого поведения). Реализация этих случаев зависит от условий, при которых была получена диаграмма σ - ϵ . Если материал испытывался при температурах, где мартенситная фаза была устойчивой, т.е. при $T < M_s$, то реализуется 1^й случай. Если диаграмма была получена в высокотемпературной области, где устойчивым является аустенитная фаза, т.е. при $T > A_s$, то реализуется второй случай разгрузки.

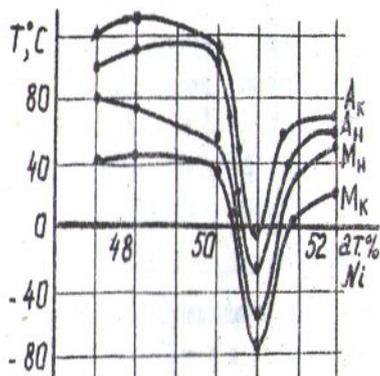


Рис. 2. Зависимость температур прямого и обратного мартенситного превращения от состава сплава TiNi.

Иногда диаграмма σ - ϵ имеет многоступенчатый характер, в этом случае она связывается с характером протекания цепочки фазовых мартенситных реакций [5].

Таким образом, диаграммы деформирования σ - ϵ для материалов, претерпевающих фазовые превращения, имеют существенное отличие от таких диаграмм для традиционных классических материалов.

В процессе обратного мартенситного превращения сплав NiTi сильно упрочняется. Модуль E увеличивается в 3-4 раза и доходит до $8,4 \cdot 10^3$ кг/мм², а σ_r - в 6-7 раз и доходит до 63 кг/мм² [2] (рис. 3).

3. Эффекты, связанные с протеканием фазовых превращений при термосиловом воздействии

А. Однократно обратимый эффект памяти формы

Пусть образец деформируется в изотермических условиях при $T_0 < M_s$. При достижении $\sigma_m = \sigma_{фт}$ в нем генерируются фазовые деформации $\epsilon_{ф}^m$, которые могут достигать 10-15%. При разгрузке фазовая деформация остаётся, а при нагревании она может полностью уйти (однократная память) при $T > A_s$.

Б. Многократно обратимый эффект памяти формы

В отличие от 1-го случая, многие материалы с ЭПФ обладают многократно обратимой памятью формы при термоциклировании через интервалы прямого (охлаждение) и обратного (нагрев) мартенситных переходов. Эффект не исчезает после многократного количества теплосмен. Известен опыт, который проводился до $3 \cdot 10^7$ термоциклов для сплава AuCd.

В. Генерация реактивных усилий

Если в процессе обратного мартенситного превращения воспрепятствовать свободному формовосстановлению образца, то в нем генерируются реактивные напряжения, величина которых зависит от величины накопленной фазовой деформации.

Механики материалов с памятью формы

Для построения феноменологической теории нами приняты следующие гипотезы:

- 1) Тело изотропно до и после деформации;

- 2) термосиловое воздействие не вызывает пластических деформаций;
 3) фазовый коэффициент поперечной деформации ν_ϕ не зависит от напряжений;

В этом случае деформация представляется в виде суммы упругой, температурной и фазовой составляющих:

$$d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^y + d\varepsilon_i^T + d\varepsilon_i^\phi \quad (1)$$

Здесь упругая ($d\varepsilon_i^y$) и температурная ($d\varepsilon_i^T$) составляющие деформации определяются по известным формулам.

4. Определяющие соотношения теории упругости, то есть:

$$d\varepsilon_i^y = \frac{(1+\nu_0)}{E} \left[dD_{ik} - \frac{3\nu_0}{1+\nu_0} \cdot d\sigma_0 \delta_{ik} \right] - \frac{(1+\nu_0)dE}{E} \left[D_{ik} - \frac{3\nu_0}{1+\nu_0} \cdot \sigma_0 \delta_{ik} \right] \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ik}^T = \alpha(T) dT \delta_{ik} \quad (3)$$

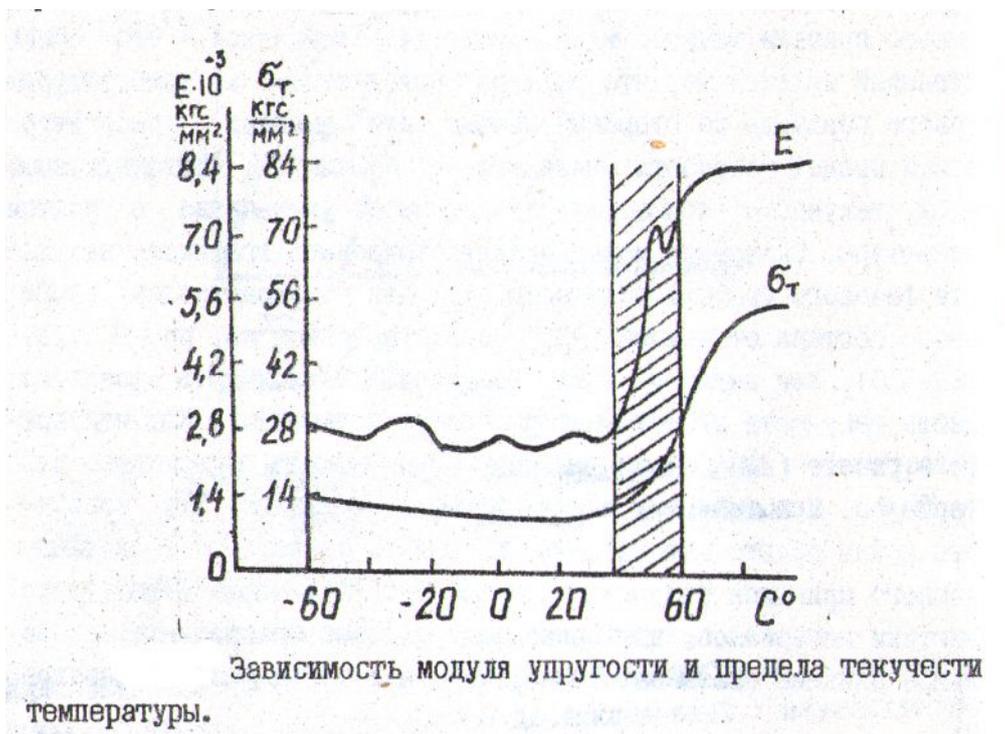
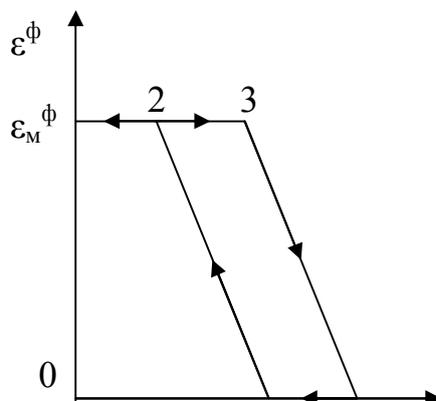


Рис. 3. Зависимость модуля упругости и предела текучести от температуры. Заштрихованная область – интервал фазовых превращений

Здесь D_{ik} – тензор главных напряжений, σ_0 – среднее напряжение; δ_{ik} – символ Кронекера, $\alpha(T)$ – коэффициент температурного расширения материала.

Для вывода 3-го слагаемого в формуле (1) принята схема зависимости $\varepsilon_\phi \sim T$ показанная на рис. 4. Согласно этой схеме фазовые реакции не происходят левее точки 2 при охлаждении и правее точки 4 при нагреве. Если ввести функцию Хевисайда $H(z)$, то аргумент, удовлетворяющий выше сказанным условиям, будет

$$\begin{aligned} z_1 = T - M_\kappa; &= z_3 = M_H - T - \Phi_M \cdot (M_H - M_\kappa); \\ z_2 = A_\kappa - T; &= z_4 = \Phi_A \cdot (A_\kappa - A_H) + A_H - T; \end{aligned} \quad (4)$$



Здесь M_j, A_j ($J=H$ или K) характеристические температуры, а Φ_M, Φ_A соответственно количество мартенситных и аустенитных фаз. Чтобы отличить нагрев от охлаждения введём функцию $H(-\dot{T})$ на линии 1-2, $H(\dot{T})$ на линии (3-4). Введя нижеследующие функции Π_1 и Π_2 :

$$\Pi_1(T, \dot{T}) = H(z_1)H(z_2)H(z_3)H(-\dot{T}) \quad (5)$$

$$\Pi_2(T, \dot{T}) = H(z_1)H(z_2)H(z_4)H(\dot{T})$$

для составляющих фазовой деформации, запишем:

$$d\varepsilon^\Phi = -dT \left[\frac{\Pi_1(T, \dot{T})}{\frac{M_{\phi H} \sigma^m M_K}{\Pi}} + \frac{\Pi_2(T, \dot{T})}{A_K - A_H} \right] \cdot \frac{\sigma^m}{\Pi} \quad (6)$$

Здесь

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma^m}{\Pi}, \quad (7)$$

где Π – модуль превращения.

Введя понятие фазового коэффициента Пуассона ν_ϕ , имеем:

$$d\varepsilon_{ik} = -\frac{(1+\nu_\phi)dT}{\Pi} \left[\frac{\Pi_1(T, \dot{T})}{M_H - M_K} + \frac{\Pi_2(T, \dot{T})}{A_K - A_H} \right]. \quad (8)$$

$$\cdot \left[D_{ik}^m - \frac{3\nu_\phi}{1+\nu_\phi} \sigma_0^m \delta_{ik} \right]$$

где D_{ik}^m – тензор, составленный из максимальных значений главных напряжений перед термоциклированием;

$$\sigma_0^m = \frac{1}{3} (\sigma_1^m + \sigma_2^m + \sigma_3^m) \quad (9)$$

Складывая (2), (3) и (8) получим связь между ε и σ для материалов обладающих ЭПФ. **5. Применение модели деформирования материалов с ЭПФ**

Модель деформирования материала с ЭПФ использовалась для решения следующих задач:

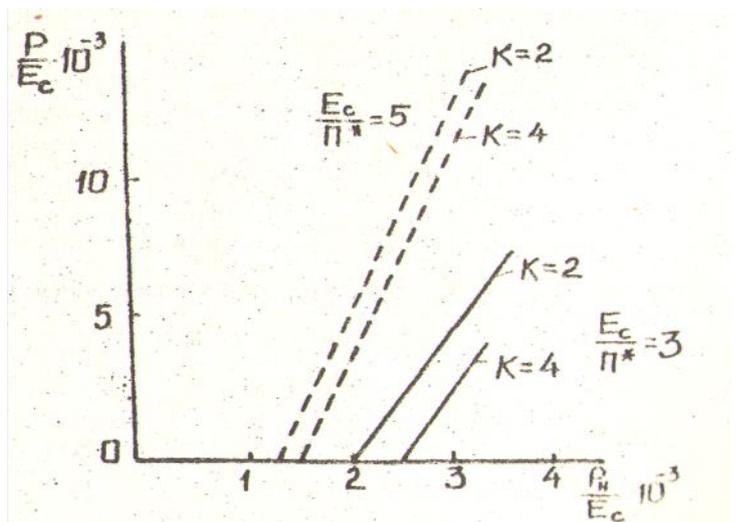
А) Деформация толстостенной трубы (рис. 5а). Программа термосилового нагружения показана на рис. 5 б.

На рис. 6 в безразмерном виде показана зависимость величины реактивного давления, развиваемого трубой от приложенного начального давления. Как видно из графика, при одинаковом начальном давлении на трубу, величина реактивного давления будет больше у трубы с меньшей толщиной, и чем жёстче материал по эффекту накопления максимальной фазовой деформации, тем меньше развиваемое реактивное давление.

При этом расчеты производились при следующих данных:

$\alpha_M = 3 \cdot 10^{-6}$ 1/гр., $\alpha_A = 8,5 \cdot 10^{-6}$ 1/гр., $M_K = 35^\circ\text{C}$, $M_H = 70^\circ\text{C}$, $\nu_\phi = 0,5$.

Б) Деформация цилиндрической пружины растяжения.



Рассматривалась цилиндрическая пружина, нагруженная продольной осевой нагрузкой P . Основные параметры пружины определялись тремя независимыми величинами: диаметром – D , углом подъема оси винтового бруса – α , и длиной оси рабочей части винтового бруса l . При изотермическом нагружении пружины считалось $l=const$.

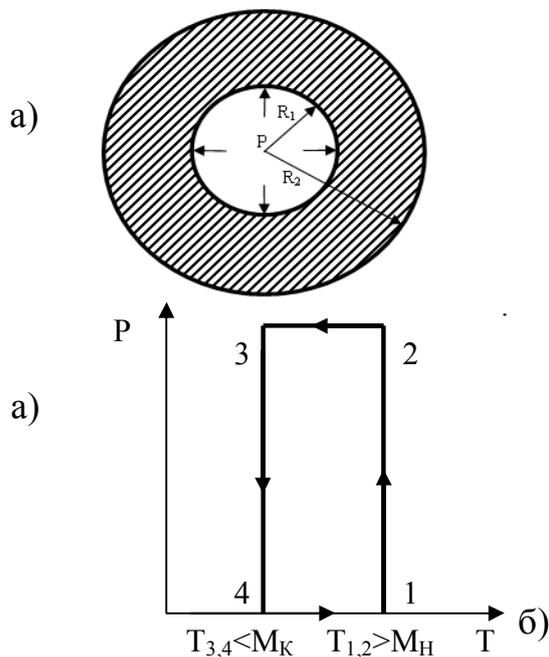


Рис. 5.

При этом получены формулы, характеризующие работу пружины в неупругой области деформирования как при активном, так и при пассивном нагружении:

$$\lambda = \frac{\pi D i_0}{\cos \alpha_0} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \quad (10)$$

$$P(\rho, \alpha) = \frac{4B}{D_0^2} \sin(\alpha - \alpha_0) \frac{\cos^2 \alpha_0}{\cos \alpha} \frac{\frac{B}{C_1} \cos \alpha \cos \alpha_0 + \sin \alpha \sin \alpha_0}{\left(\frac{B}{C_1} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right)^2} \quad (11)$$

$$D(\rho, \alpha) = D_0 \frac{\frac{2B}{C_1} \cos^3 \alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha}{\frac{2B}{C_1} \cos \alpha \cos^2 \alpha_0 + \sin \alpha \sin 2\alpha_0}$$

Рис. 6. $K=R_2/R_1$; $E_C = (E_M + E_A)/2$;
 $\Pi^* = \Pi / (1 - \nu^2 \phi)$.

где λ – осадка пружины; α_0 – начальный угол подъема: $B = EJ_x$;

$$C_1 = GJ_\rho K_1(\rho);$$

$K(\rho)$ - коэффициент уменьшения жёсткости на кручение; n – коэффициент, характеризующий линейное упрочнение в неупругой области ($0 \leq n \leq 1$);

$\rho = \frac{2r_{\phi T}}{d}$ - безразмерный параметр, характеризующий глубину зоны неупругих деформаций в сечении прутка; $r_{\phi T}$ - радиус прутка, где касательные напряжения равны по величине $\tau_{\phi T}$.

Для коэффициента $K(\rho)$ получено следующее выражение [1]

$$K(\rho) = n + (1-n) \left(\frac{4}{3}\rho - \frac{1}{3}\rho^4 \right).$$

Очевидно, что если безразмерный параметр ρ меняется от нуля до единицы, коэффициент $K(\rho)$ меняется от n до единицы.

Расчет основных параметров пружины, изготовленных из TiNi сплава с модулями упругости $E=8,5 \cdot 10^{10}$ Па, $G=1,4 \cdot 10^{10}$ Па и с коэффициентом Пуассона $\mu=0,35$, произведён при следующих данных: первоначальный диаметр $D_0=0,009$ м, диаметр прутка $d=0,001$ м, число витков $i_0=10$, начальный угол подъёма $\alpha_0=1,5$ градуса. По полученным данным построен график зависимости $P \sim \lambda$ и значения остаточных перемещений пружины для коэффициента упрочнения $n=0,10$. Результаты расчетов приведены на рис. 7.

Для реактивных усилий, развиваемых пружиной при ее нагреве из мартенситной области в аустенитную, получено следующее выражение:

$$R(T) = C_0(T)(T - A_H) \left[\frac{\lambda_{осм}}{A_K - A_H} - H_{ПП} \xi(T) \right],$$

где $C_0(T)$ - жесткость пружины; $\lambda_{осм}$ - остаточная осадка пружины; $H_{ПП}$ - высота пружины после разгрузки; $\xi(T)$ - коэффициент температурного расширения проволоки.

Очевидно, максимальное значение реактивной силы будет при температуре $T = A_K$, т.е.

$$R_{\max} = R(A_K) = C_0(A_K) [\lambda_{осм} - H_{ПП}(A_K - A_H) \xi(A_K)]$$

6. Области применения сплавов с эффектом памяти формы

Учитывая неординарность свойств материалов с памятью формы, их можно использовать в различных сферах деятельности человека. При этом надо отметить преимущества применения металлов с памятью формы:

- уникальность некоторых технологических операций;
- существенное снижение габаритов и металлоемкости конструкций;
- простота конструкций и надежность в эксплуатации;
- отсутствие техногенного энергопотребления ("автономность") или его низкий уровень;
- бесшумность работы механизмов;
- экологическая чистота.

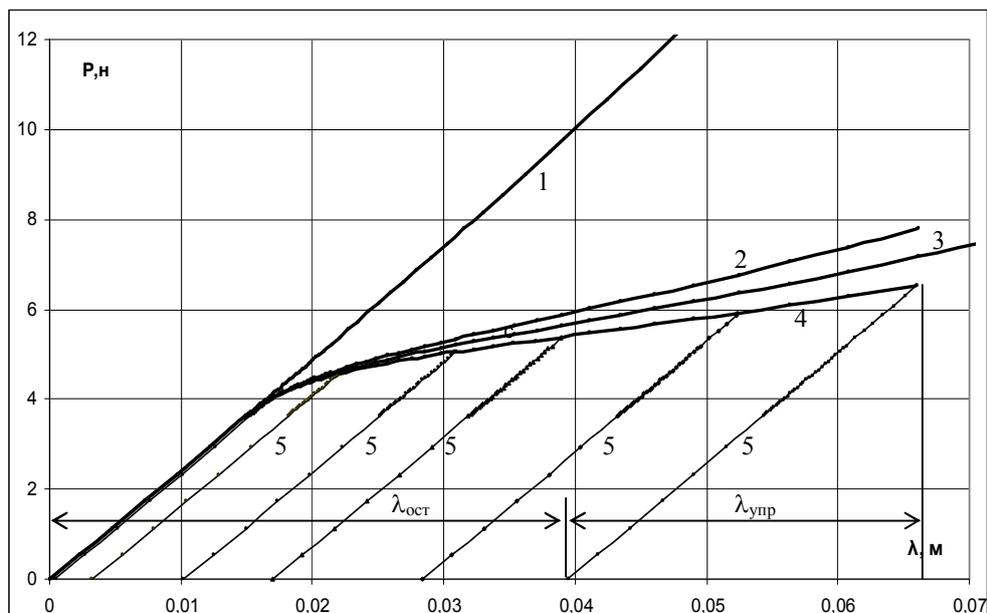


Рис. 7. Кривые: 1- упругий случай, 2, 3 и 4 - неупругий случай, соответственно для n равных: 0,20; 0,15; 0,10; 5- разгрузка.

Сферы возможного использования материалов с ЭПФ приведены в нижеследующей таблице:

КОСМОС	Саморазворачивающиеся конструкции (антенны, солнечные батареи и др.); механизмы ориентации солнечных батарей; инструменты для монтажных работ (гайковерты, самозатягивающиеся обоймы и муфты; зажимы, развальцеватели и т.д.); приводы поворотных механизмов (рули, заслонки, люки и т.д.); манипуляторы
ЭНЕРГЕТИКА	Регуляторы подачи горячей воды прямого действия; регуляторы температуры в теплосетях, домах и квартирах; двигатели, работающие за счет колебаний температуры окружающей среды (в т.ч. за счет сбросовых вод и геотермальных источников); регуляторы подачи газа.
МЕДИЦИНА	Имплантанты клинической медицины (проволока для изготовления устройств для остеосинтеза, ортопедии, корректоров позвоночника, расширителей и др.); хирургические инструменты (скальпели, пинцеты, рукоятки с меняющейся геометрией профиля); стоматологические мосты, стержни.
СЕЛЬСКОЕ ХОЗЯЙСТВО	автономные автоматические вентиляционные фрамуги для теплиц, ферм, овоще- и зернохранилищ; автономные регуляторы влажности; регуляторы температуры и направлений воздушных тепловых потоков; автономные механизмы зашторивания (экранирование солнечных лучей).
МАШИНОСТРОЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА	Захваты для удерживания обрабатываемой детали: термокомпенсаторы; виброгасители, демпферы; искусственные мускулы для роботов; пружины с квази нулевым коэффициентом жесткости; мембраны с большим ресурсом рабочих циклов
ТРАНСПОРТ	Подъемники заградительных полос (например перед железнодорожным переездом); приводы тормозов (вагоны, транспортеры, краны и г.д.); приводы для шлагбаумов; виброгасящие подвески для рабочих сидений водителей; термокомпенсаторы для буксовых узлов вагонов; автомобильные термостаты; транспортные сбрасыватели (толкатели).
БЫТОВАЯ ТЕХНИКА, ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	Регуляторы температуры для погребов, гаражей, складов; безфреоновые регуляторы к холодильникам; кодовые замки; дверные доводчики; приводы для автоматических ворот, дверей, окон; не мнущаяся бижутерия; приводы для самодвижущихся игрушек; терморегуляторы для электробытовых приборов (утюги, чайники, кофеварки и т.п.); режущие инструменты (ножи); водоподъемные насосы.

АВИА И СУДО-СТРОЕНИЕ	Безварочное соединение трубок подачи воздуха, масла и топлива): соединительные узлы (вместо заклепок).
ГОРНАЯ И НЕФТЕГАЗОВАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	Автономные противопожарные люки в шахтных выработках; анкеры для крепления пород; устройства для отклонения бура от вертикали (наклонное бурение); герметизация буровых труб предварительно гофрированными кольцами; автоматические задвижки; нефтеподъемные насосы.
ПРИБОРОСТРОЕНИЕ	Механические теплосчетчики; турбина с меняющейся геометрией лопаток; измерители тепловых потоков; автономные гигрометры; автономные термографы; дистанционные измерители температуры
ОПТИКА	Оправы для очков; дефлекторы; отражатели с управляемой интегральной и спектральной отражательной способностью; дифракционные решетки с управляемо меняющейся постоянной
ВОЕННАЯ ОБЛАСТЬ	Тайнопись; снаряды с меняющейся геометрией оперения; двери с секретом
ЮВЕЛИРНАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	Сплавы с меняющейся спектральной отражательной способностью; прессы для штамповки; искусственное золото
АТОМНАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ	Манипуляторы; счетчики нейтральных частиц

Литература

1. Абдрахманов С.А., Ибрагимов Р.Ш., Доталиева Ж.Ж. Экспериментальное исследование реактивных усилий гибких балок из материалов с памятью формы. //Механике композиционных материалов и конструкций. - Москва, 2002, т. 8. - № 1, с. 103-110
2. Лихачев В.А., Кузмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Ленинград. Изд. ЛГУ, 1987. –216 с.
3. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситных превращениях. // ДАН СССР, 1949, т. 66, № 2, с. 211 - 217.
4. Мовчан А.А. Казарина С.А. Описание конечных фазовых деформаций при термоупругих мартенситных превращениях.// Механика композиционных материалов и конструкций. 1998, т.4, № 2, с. 271-278.
5. Ооцука К., Симидзу К., Судзуки Ю. Сплавы с памяти формы. /Под ред. Х.Фунакубо /Пер. с японск. – М.: Металлургия. 1990. -224 с.

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Тюреходжаев А.Н., Рыстыгулова В.Б.
Tyurekhodja@mail.ru, Rystygulova@mail.ru

Методом частичной дискретизации решена задача об осесимметричном изгибе тонкостенной конической оболочки постоянной толщины.

Рассматривается задача об осесимметричном изгибе тонкостенной конической оболочки постоянной толщины, решение которой приводит к значительным трудностям. Задача решена методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [1].

Задачи о осесимметричной деформации конической оболочки практически применима в машиностроительных конструкциях, судостроениях и строительном деле.

Для осесимметричной деформации конической оболочки постоянной толщины (рис. 1) имеем [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V_0}{ds^2} + \frac{\sin \beta}{v} \frac{dV_0}{ds} - \frac{\sin^2 \beta}{v^2} V_0 - \Psi_0 \frac{\cos \beta}{bv} = \frac{1}{bv} \left[\mu \frac{d\Phi_1}{ds} + \frac{\sin \beta}{v} \Phi_1 \right], \\ \frac{d^2 \Psi_0}{ds^2} + \frac{\sin \beta}{v} \frac{d\Psi_0}{ds} - \frac{\sin^2 \beta}{v^2} \Psi_0 + 4\gamma^4 \frac{\cos \beta}{bv} V_0 = -\frac{1}{vb^2} 4\gamma^4 \Phi_2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

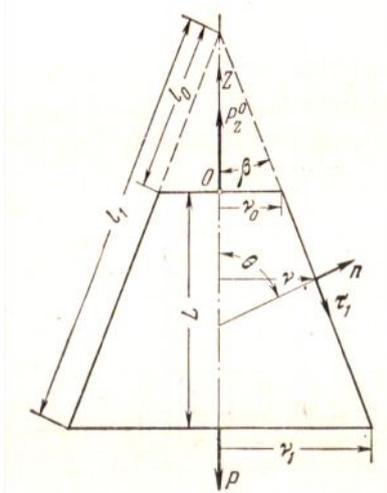


Рис. 1. Коническая оболочка.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\sin \beta \int_0^s v q_e ds + \cos \beta \left(\frac{P_z^0}{2\pi} + \int_0^s v q_z ds \right), \\ \Phi_2 &= -\cos \beta \int_0^s v q_e ds - \sin \beta \left(\frac{P_z^0}{2\pi} + \int_0^s v q_z ds \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь V_0 – функция напряжений, Ψ_0 – функция перемещений, q_e – радиальная нагрузка, q_z – осевая нагрузка, P_z^0 – постоянная интегрирования, равная осевому усилию в крайнем сечении θ_0 , v – радиус окружности, которая получается в результате пересечения поверхности плоскостью, перпендикулярной оси вращения, s – элемент длины дуги образующего.

Принимая во внимание, что $ds = \frac{dv}{\sin \beta}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$, $v = z \operatorname{tg} \theta$, уравнения (1), (2) мож-

но записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V_0}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dV_0}{dz} - \frac{1}{z^2} V_0 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{bz \cos \theta} \Psi_0 &= \frac{1}{zb \cos \theta} \left[\mu \frac{d\Phi_1}{dz} + \frac{\Phi_1}{z} \right], \\ \frac{d^2 \Psi_0}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\Psi_0}{dz} - \frac{1}{z^2} \Psi_0 + 4\gamma^4 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{zb \cos \theta} V_0 &= -\frac{\operatorname{tg} \theta}{zb^2 \cos^2 \theta} 4\gamma^4 \Phi_2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z) &= -\operatorname{tg}^2 \theta \int_0^L z q_e dz + \sin \theta \frac{P_z^0}{2\pi} + \operatorname{tg}^3 \theta \int_0^L z q_z dz, \\ \Phi_2(z) &= -\operatorname{tg}^3 \theta \int_0^L z q_e dz - \cos \theta \frac{P_z^0}{2\pi} - \operatorname{tg}^2 \theta \int_0^L z q_z dz. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь L – высота конической оболочки, z – центральная ось конической оболочки.

Дискретизируя третьи члены, решая систему уравнений (3), методом частичной дискретизации [2], получим:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{4} \chi_1 z^2 + \frac{1}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(z - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + C_1 \ln z + C_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \chi_4 z + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + B_1 \ln z + B_2, \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\mu \operatorname{tg}^2 \theta}{b \cos \theta} (-q_e + \operatorname{tg} \theta q_z), \quad \chi_2 = \frac{\Phi_1}{b \cos \theta}, \quad \chi_3 = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{b \cos \theta}, \\ \chi_4 &= -\frac{4\gamma^4 \operatorname{tg} \theta}{b^2 \cos^2 \theta} \Phi_2, \quad \chi_5 = -\frac{4\gamma^4 \operatorname{tg}^2 \theta}{b \cos \theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Примем такие граничные условия:

Если считать что, вершина конической оболочки свободной, то радиальное усилие $H_e = 0$ и меридиональный изгибающий момент $M_1 = 0$ при $z = L$, а нижний край конической оболочки заделан, то радиальное перемещение $\Delta_e = 0$ и угол поворота $\mathcal{G}_1 = 0$ при $z = 0$.

Здесь

$$H_e = \frac{V_0 \alpha^2 b}{z \operatorname{tg} \theta} + q_e \frac{z}{\sin \theta}, \quad M_1 = -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \mu \frac{\cos \theta}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\Psi_0}{E h_0},$$

$$\Delta_e = \frac{\mu}{E h} \left[-V_0 \alpha^2 b \cos \theta + q_e z^2 - \sin \theta \frac{P_z^0}{2\pi} - q_z \frac{z^2}{\cos \theta} \right], \quad \mathcal{G}_1 = \frac{\Psi_0}{E h_0}, \quad \alpha = \frac{h(\theta)}{h_0}.$$

Для оболочки постоянной толщины $h(\theta) = h_0 = h$, $\alpha = 1$. В качестве параметра b можно выбрать радиус крайнего сечения v_1 , так что

$$4\gamma^4 = 12(1-\mu^2) \frac{v_1^2}{h^2}, \quad b = v_1.$$

Для тонких оболочек параметр $4\gamma^4$ велик по сравнению с единицей, и это обстоятельство существенно облегчает решение задачи.

При выбранных граничных условиях решение (5) можем записать так

$$V_0 = \frac{L^2 q_e}{b \cos \theta} + \frac{1}{4} \chi_1 (z^2 - L^2) + \frac{1}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(z - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(L - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] +$$

$$- \frac{1}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right],$$

$$\Psi_0 = \chi_4 (z - L) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right].$$

Усилия и изгибающие моменты выражаются через функции V_0 , Ψ_0 следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} [V_0 b \cos \theta + \Phi_1(z)], & T_2 &= \frac{b \cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \frac{dV_0}{dz}, \\
N_1 &= \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} [V_0 b \sin \theta + \Phi_2(z)], \\
M_1 &= -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{d\Psi_0}{dz} + \mu \frac{\Psi_0}{z} \right), \\
M_2 &= -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{\Psi_0}{z} + \mu \frac{d\Psi_0}{dz} \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Подробно расписывая все усилия и изгибающие моменты, получим

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \left\{ L^2 q_e + \frac{b \cos \theta}{4} \chi_1 (z^2 - L^2) + \frac{b \cos \theta}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(z - z_k) - \right. \right. \\
&- \left. \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \frac{b \cos \theta}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(L - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
&+ \frac{b \cos \theta}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \\
&- \frac{b \cos \theta}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
&+ \frac{b \cos \theta}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + \\
&- \frac{b \cos \theta}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
&- \left. \operatorname{tg}^2 \theta \frac{L^2}{2} q_e + \sin \theta \frac{P_z^0}{2\pi} + \operatorname{tg}^3 \theta \frac{L^2}{2} q_z \right\},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \left\{ L^2 q_e + \frac{b \cos \theta}{4} \chi_1 (z^2 - L^2) + \frac{b \cos \theta}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(z - z_k) - \right. \right. \\
&- \left. \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \frac{b \cos \theta}{2} \chi_2 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(L - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
&+ \frac{b \cos \theta}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \\
&- \frac{b \cos \theta}{2} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
&+ \frac{b \cos \theta}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] + \\
&- \frac{b \cos \theta}{2} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
&- \left. \operatorname{tg}^3 \theta \frac{L^2}{2} q_e - \cos \theta \frac{P_z^0}{2\pi} - \operatorname{tg}^2 \theta \frac{L^2}{2} q_z \right\},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
T_2 = & \frac{b \cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \left\{ \frac{1}{2} \chi_1 z + \frac{1}{2} \chi_2 \frac{\ln z_k}{z_k} + \right. \\
& + \frac{1}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2z} \chi_3 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
M_1 = & -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \left\{ \chi_4 + \frac{\mu}{z} \chi_4 (z - L) + \right. \\
& + \frac{1}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2z} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{\mu}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{\mu}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{\mu}{2z} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \\
& \left. - \frac{\mu}{2z} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \left\{ \frac{\chi_4}{z} (z - L) + \mu \chi_4 + \right. \\
& + \frac{1}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2z} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{z}{z_k} H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2z} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln \frac{L}{z_k} H(L - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln \frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1}) \right] + \\
& + \frac{\mu}{2z} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) \right] + \\
& \left. + \frac{\mu}{2z} \chi_5 \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) H(z - z_{k+1}) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Решение таких задач ранее рассматривались В.С. Черниной [2] введя функцию σ в комплексной форме заменяя два уравнения относительно V_0 и Ψ_0 одним уравнением второго порядка относительно комплексной функции σ . Решение в работе [2] находится приближенным методом. В отличие от подходов этих авторов методом частичной дискретизации [1] получено аналитическое решение задачи.

Литература

1. Тюреходжаев А.Н., Кырыкбаев Б.Ж., Рыстыгулова В.Б., Карибаева Г.А. Деформирование неоднородных пластин и оболочек // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н.Векуа. - Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г. ISBN 978-5-94356-515 - 1, 2 стр.
2. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1968. - 456 с.

УДК 621.771 (075.8)

РАЗРАБОТКА НОВОЙ КОНСТРУКЦИИ РОЛИКА РОЛЬГАНГА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СОЕДИНЕНИЯ НА ЕГО НЕ- СУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ

Абсадыков Б.Н.

b.absadykov@kbtu.kz

Приведена конструкция ролика рольганга, исключая применение подшипников и приводных зубчатых колес, что позволит осуществлять быструю его замену, снизив среднюю продолжительность сборно-разборных работ и трудоемкости восстановления. Определено влияние геометрических параметров и жесткости элементов соединения на несущую способность и прочность предлагаемой конструкции ролика.

Ролик отводящего рольганга, являясь одним из массовых элементов, подвергается интенсивному износу и частым поломкам, что приводит к значительным отказам рольганга. Лишь по причине износа бочек роликов отводящего рольганга непрерывного широкополосного стана (НШПС) – 1700 АО «АрселорМиттал Темиртау» в течение года выходит из строя порядка 280–330 роликов, что для рольганга НШПС – 1700 составляет до 80 % годового расхода роликов [1].

Интенсификация скоростей транспортирования, обеспечение высокого качества поверхности полос требуют от ролика повышенных эксплуатационных показателей, основными из которых являются [1, 2]:

- минимальный осевой момент инерции;
- низкая материалоемкость;
- минимизация дисбаланса вследствие температурных деформаций при одностороннем нагреве;
- способность хорошо сопротивляться износу при трении.

В настоящее время на отводящих рольгангах НШПС горячей прокатки применяются пустотелые ролики с чугунной бочкой. Они удовлетворительно обеспечивают требования к качеству поверхности полосы, хорошо сопротивляются износу при трении, обладают хорошими литейными свойствами [1]. Кроме них, используются сплошные ролики, с несущей осью и антифрикционным бандажом, ролики с транспортирующими дисками. Однако подавляющее большинство их, помимо относительных преимуществ, обладает значительными недостатками: повышенной металлоемкостью, наличием большого количества сопрягаемых элементов, сложностью конструктивных схем, усложняющих монтажно-демонтажные работы, малыми сроками службы. Указанные недостатки в условиях металлургических предприятий, характеризующихся, как правило, массовым или же крупносерийным типом производства металла, приводят к значительным простоям оборудования, и рольгангов, в частности.

В этой связи, низкие показатели надежности и ремонтпригодности роликовых узлов обуславливают поиск новых конструктивных решений, повышающих эксплуатационную надежность с одновременным понижением себестоимости изготовления и монтажа-демонтажа роликов.

В настоящее время тенденция новых конструктивных решений направлена на разработку и создание унифицированных блочно-модульных конструкций рольгангов с индивидуальным приводом, что обеспечит рациональную систему обслуживания и ремонта, повысит ресурс не только ролика, но и всех элементов рольганга [3, 4].

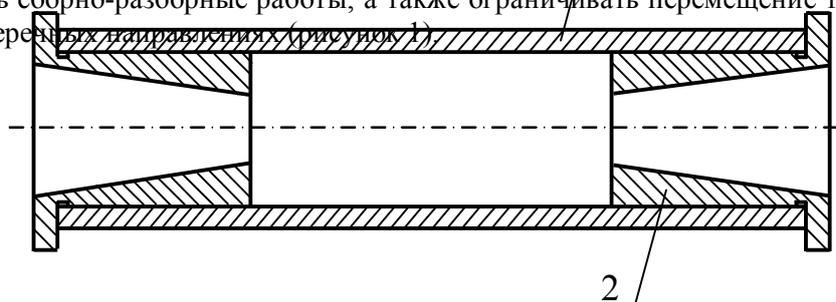
Таким образом, предлагается основные элементы рольганга: ролики, подшипниковые опоры, раздаточный и понижающий редукторы выполнять в виде отдельных легкоъемных модульных агрегатов, что существенно снизит показатели ремонтпригодности, такие как среднее время восстановления, средняя трудоемкость восстановления и другие [4].

В работе [4] предлагается рассматривать ролик рольганга как модуль, изготавливаемый и транспортируемый до места сборки отдельно от модулей подшипниковых опор. Ролик условно при-

нимается как вал, работающий на изгиб и передающий крутящий момент. Причем, полый вал однозначно имеет преимущества перед цельным, основные из которых – существенное уменьшение расходов материала на изготовление ролика при сохранении его прочности и жесткости, снижение осевого момента инерции.

Однако, основным недостатком данной конструктивной схемы, на наш взгляд, является значительно утолщенная средняя часть ролика. Дело в том, что предлагаемая в [4] конструкция ролика направлена на его быструю смену в результате износа бочки, и утолщенная ее середина функционально не оправдана. На качество транспортируемого листа существенное влияние оказывает состояние поверхности бочки, ее рельеф. Утолщенная часть лишь увеличивает массу бочки в среднем на 25-40 %. В условиях массового изготовления таких роликов неоправданный расход металла будет весьма значителен.

Поэтому предлагается ролик, конструктивно имеющий постоянную цилиндрическую часть на всей длине бочки. Роль внутренних присоединительных элементов выполняют конические отверстия, выполненные в ступичных втулках. Втулки устанавливаются с обоих концов бочки ролика с минимальным натягом. В целях унификации устанавливаемые втулки для обоих концов вала делаются одинаковыми. Каждая втулка с одного конца имеет дисконную часть, превышающую внешний диаметр бочки на величину до половины ее значения. Такое исполнение позволит оперативно производить сборно-разборные работы, а также ограничивать перемещение транспортируемой полосы в поперечных направлениях (рисунки 1).



1 – бочка ролика; 2 – втулка
Рис.1. – Ролик рольганга.

Несомненным достоинством конического соединения является обеспечение хорошего центрирования ролика без применения специальных крепежных элементов и возможность использования для значительных нагрузок [5, 6]. В процессе работы рольганга крутящий момент передается от вала электродвигателя через понижающий редуктор к валу и конической втулке приводного подшипникового блока и далее, через коническое соединение, к ролику за счет трения-сцепления. Такой принцип используется на металлорежущих станках, где осуществляется передача крутящего момента коническим хвостовикам инструментов (сверл, разверток, зенкеров).

Известно, что при посадке ступиц с натягом в бочке ролика могут появляться значительные напряжения, приводящие к возникновению опасных для эксплуатации трещин [1]. Поэтому произведем расчет величин давления на посадочной поверхности, максимальный крутящий момент, который может передать соединение, а также максимальные напряжения на валу и в ступице.

Давление k на посадочных поверхностях ступичной втулки и бочки ролика зависит от величины натяга и толщины стенок указанных деталей. Согласно формуле Ламе [6].

$$k = 10^{-3} \Delta \theta / d, \quad (1)$$

где Δ/d – относительный диаметральный натяг, мм; θ – коэффициент, равный

$$\theta = \frac{1}{\frac{c_1 - \mu_1}{E_1} + \frac{c_2 + \mu_2}{E_2}}, \quad (2).$$

где μ_1, μ_2 , и E_1, E_2 – пуассоновы константы материалов и модули нормальной упругости охватываемой и охватывающей деталей соответственно; c_1, c_2 – коэффициенты, вычисляемые по формулам:

$$c_1 = \frac{1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^2}; \quad c_2 = \frac{1 + \left(\frac{d}{d_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^2}, \quad (3)$$

где d_1 – внутренний диаметр втулки, мм; d – общий диаметр сопрягаемых деталей, мм; d_2 – наружный диаметр бочки ролика, мм.

Подставляя формулы (2) и (3) в (1), получим [6]:

$$k = \frac{\Delta}{d} \frac{1}{\frac{c_1 - \mu_1}{E_1} + \frac{c_2 + \mu_2}{E_2}} = E_2 \frac{\Delta}{d} \frac{1}{(c_1 - \mu_1) \frac{E_2}{E_1} + c_2 + \mu_2}. \quad (4)$$

Если относительную тонкостенность соответственно охватываемой и охватывающей деталей обозначить $a_1 = d_1/d$ и $a_2 = d/d_2$, то коэффициенты c_1 и c_2 можно представить как [6]

$$c_1 = c_2 = c = (1 + a^2)/(1 - a^2). \quad (5)$$

Напряжения сжатия на ступичной втулке будут иметь максимальное значение на внутренней поверхности, равное [6]

$$\sigma_1 = 2k/(1 - a_1^2). \quad (6)$$

Напряжения растяжения в бочке ролика будут максимальны на внутренней поверхности [6]:

$$\sigma_2 = 2k/(1 - a_2^2). \quad (7)$$

В случае изготовления бочки ролика и втулки из одного и того же материала – серого чугуна, – значения $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Тогда $\theta = E/(c_1 + c_2)$ и согласно формулам (4) ÷ (7)

$$k = E \frac{\Delta}{d} \frac{1}{c_1 + c_2} = E \frac{\Delta}{d} k_0; \quad (8)$$

где $k_0 = 1/(c_1 + c_2)$ – относительное давление, представляющее собой величину давления k при $E\Delta/d = 1$ [6].

$$\sigma_1 = E \frac{\Delta}{d} \frac{2k}{1 - a_1^2} \quad (9)$$

$$\sigma_2 = E \frac{\Delta}{d} \frac{2k}{1 - a_2^2}. \quad (10)$$

Для определения влияния геометрических параметров и жесткости элементов соединения на несущую способность и прочность предлагаемой конструкции ролика отводящего рольганга произведем точностной расчет при следующих значениях: номинальный наружный диаметр втулки равен 250 мм, номинальный наружный диаметр бочки 300 мм. Длина соединения $l = 350$ мм – принята из конструктивных соображений, связанных со снижением давления, т.к. согласно [6] снижение величины давления с уменьшением толщины стенок бочки можно компенсировать увеличением длины и диаметра посадочной поверхности.

1. Соединение с натягом чугунной бочки ролика с чугунной втулкой.

Внутренняя поверхность бочки и наружная поверхность втулки обработаны по 7-му классу шероховатости ($Ra = 6,3$ мкм). Коэффициент трения принимаем из справочной литературы [7]: $f = 0,15$.

При посадке средний диаметальный натяг (посадка Н7/с6) для $d = 250$ мм равен 169 мкм. Действительный натяг равен $169 - (Ra_1 + Ra_2 = 6,3 + 6,3) = 156,4$ мкм. Модуль упругости для серого чугуна $E = (0,78 \div 1,47) \times 10^5$ МПа [7]. Примем $E = 1,2 \times 10^5$ МПа. Тогда величина $E\Delta/d$ будет равна:

$$E\Delta/d = E\Delta/1000d = 1,2 \cdot 10^5 \cdot 156,4 / 2,5 \cdot 10^5 = 75,1 \text{ МПа.}$$

По диаграммам расчета соединений с натягом [6] от величины относительной тонкостенности $a_1 = 0,5$, проводя горизонталь до пересечения с кривой $a_2 = 0,83$, определяем значение относительного давления $k_0 = 1/(c_1 + c_2)$. $k_0 = 0,14$.

Тогда давление k по формуле (8) равно: $k = 75,1 \cdot 0,14 = 10,5$ МПа.

Максимальный крутящий момент, который может передать данное соединение, $M_{кр} = 0,5 \cdot 10^3 k \cdot S \cdot d \cdot f = 5 \cdot 10^4 k \cdot \pi \cdot d^2 \cdot l \cdot f = 5 \cdot 10^4 \cdot 10,5 \pi \cdot 250^2 \cdot 350 \cdot 0,15 = 54091$ Н·м.

Напряжения сжатия на втулке σ_1 и напряжения растяжения в бочке ролика σ_2 находим из вышеупомянутых диаграмм расчета соединений с натягом [6]: $\sigma_{01} = 0,38$; $\sigma_{02} = 0,91$.

Окончательно напряжения на втулке и в бочке ролика равны: $\sigma_1 = 75,1 \cdot 0,38 = 28,5$ МПа и $\sigma_2 = 75,1 \cdot 0,91 = 68,3$ МПа, что является вполне приемлемым для данной конструкции ролика.

2. Соединение с натягом чугунной бочки ролика и стальной втулки.

Параметры шероховатости поверхностей данных деталей прежние. Назначим для соединяемых деталей посадку Н8/с7, обеспечивающую минимальный диаметальный натяг $\Delta = 88$ мкм. Модуль упругости стали $E = (1,86 \div 2,1) \cdot 10^5$ МПа [7]. Примем $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Тогда величина $E\Delta/d$ будет равна:

$$E\Delta/d = E\Delta/1000d = 2 \cdot 10^5 \cdot (88 - 12,6) / 2,5 \cdot 10^5 = 60,3 \text{ МПа.}$$

По расчетным диаграммам [6] для значений $a_1 = 0,5$ и $a_2 = 0,83$ находим величину относительного давления $k_0 = 0,165$.

Тогда давление k по формуле (8) равно: $k = 60,3 \cdot 0,165 = 9,9$ МПа.

По значениям $k_0 = 0,165$, $a_1 = 0,5$ и $a_2 = 0,83$ определяем $\sigma_{01} = 0,43$; $\sigma_{02} = 1,1$ [6]. Тогда напряжения σ_1 и σ_2 будут равны: $\sigma_1 = 60,3 \cdot 0,43 = 25,9$ МПа; $\sigma_2 = 60,3 \cdot 1,1 = 66,3$ МПа, что, так же как и в предыдущем случае, вполне приемлемо для предлагаемой конструкции ролика.

Учитывая, что роликовый узел рольганга в процессе работы подвергается нагреву в среднем до 250 °С (согласно замерам, выполненным на отводящем рольганге АО «АрселорМиттал Темиртау» [8]), необходимо учитывать влияние температуры на посадку. Поэтому, вводя в формулы (4), (6), (7) температурный натяг $\Delta_t = 10^3 d (\alpha_1 \Delta t_1 - \alpha_2 \Delta t_2)$, где α_1 и α_2 – коэффициенты линейного расширения материала охватываемой и охватывающей деталей соответственно; Δt_1 и Δt_2 – связанное с нагревом увеличение температуры соответственно охватываемой и охватывающей деталей, первоначальный относительный натяг Δ_n , необходимый для поддержания заданного давления k при нагреве, можно представить следующим образом [6]:

$$\Delta_n = 10^3 (kd/\theta) + Rz_1 + Rz_2 - \Delta_t. \quad (11)$$

В интервале температур от 20 °С до 250 °С коэффициенты линейного расширения стали и чугуна составляют соответственно $\alpha_1 \approx 1,1 \cdot 10^{-5}$ 1/°С и $\alpha_2 \approx 10^{-5}$ 1/°С [9]. Таким образом, величина температурного натяга для соединения из чугунной бочки и стальной втулки равна: $\Delta_t = 10^3 \cdot 250 \cdot 230 \cdot (1,1 \cdot 10^{-5} - 10^{-5}) = 57,5$ мкм.

Тогда первоначальный относительный натяг Δ_n , необходимый для поддержания заданного давления k составит $\Delta_n = 88 - 57,5 = 30,5$ мкм.

Таким образом, предлагаемая посадка Н8/с7, согласно расчетам, обеспечивает минимальный натяг деталей с учетом влияния тепловых деформаций роликового узла.

Предлагаемая конструкция ролика дает возможность произвести их унификацию для всех видов рольгангов только по присоединительным размерам. При этом формы рабочих поверхностей ролика, его геометрические размеры, в частности, диаметр и длина бочки, могут конструктивно принимать различные значения.

Данный ролик, являясь модульным элементом, исключает применение подшипников и приводных зубчатых колес, что позволит осуществлять быструю его замену, снизив среднюю продолжительность сборно-разборных работ и трудоемкости восстановления.

Литература

1. Давильбеков Н.Х., Курапов Г.Г. Надежность работы механического оборудования листопркатных станков. - Алматы: Изд-во КазНТУ имени К.И. Сатпаева, 2002. – 199 с.
2. Лукашкин Н. Д., Кохан Л. С., Якушев А. М. Конструкция и расчет машин и агрегатов металлургических заводов: учебник для вузов. - М.: ИКЦ «Академкнига», 2003
3. Быстросменные ролики рольганга. Япония. Заявка 63123514. Като Кадзуо. Кавасаки Сэйтэцу. №61/266765. Оpubл. 27.05.88. // Кокэй Токкэ Кохо, 1988. №32. – С. 79-86.
4. Задорожный В.Д. Унифицированный транспортный рольганг повышенной ремонтпригодности с индивидуальным приводом. Автореферат дис. канд. техн. наук. Магнитогорск, 2006. – 20 с.
5. Гжиров Р.И. Краткий справочник конструктора. - Л.: Машиностроение, 1983. – 463 с.
6. Основы конструирования: Справочно-методическое пособие. В 2-х кн. Кн. 2. / Под ред. П.Н. Учаева. - М.: Машиностроение, 1988. – 544 с.
7. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3-х т. Т.1. - М.: Машиностроение, 2001. – 920 с.
8. Машеков С.А., Кузьминов И.И., Абсадыков Б.Н. и др. Технология прокатного производства. Монография. - Алматы: Tetaprint, 2007. – 334 с.
9. Кухлинг Х. Справочник по физике: Пер. с нем. - М.: Мир, 1982. – 520 с.

УДК 621.771 (075.8)

ИССЛЕДОВАНИЕ ФРИКЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НОВОЙ КОНСТРУКЦИИ РОЛИКА РОЛЬГАНГА

Абсадыков Б.Н.
b.absadykov@kbtu.kz

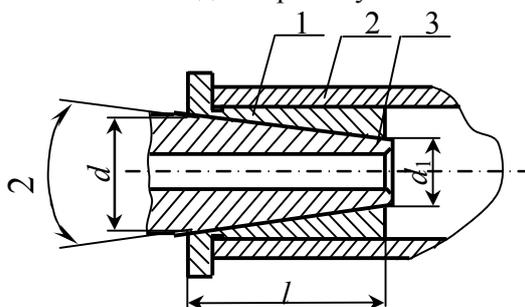
Предлагается конструкция быстросъемного ролика рольганга, в котором крутящий момент ролик передается от втулки подшипникового блока за счет трения-сцепления, и приводятся основные экспериментальные и расчетные зависимости фрикционной пары.

Отводящие рольганги являются сложными агрегатами. Однако имеется не много работ, посвященных их конструкциям, собственно роликам и их узлам. Практически все отводящие рольганги имеют индивидуальный привод роликов. С целью снижения массы рольганга и уменьшения мощности привода диаметр роликов принимают наименьшим исходя из условий обеспечения требуемой прочности. Несмотря на это, рольганги по-прежнему обладают большой металлоемкостью, невысокой надежностью, низкой ремонтпригодностью, что приводит к значительным их простоям и, соответственно, потере рабочего времени.

В [1] предлагается конструкция унифицированного рольганга, в котором крутящий момент ролик передается от втулки подшипникового блока за счет трения-сцепления. Однако в [1] не рассмотрено влияние твердости сопрягаемых материалов в схеме фрикционного соединения втулки и ролика. Кроме того, предложенная конструкция бочки ролика, из-за утолщенной средней части, и в зависимости от ее размеров, может иметь массу на 25-40 % большую, чем конструкция однородной цилиндрической бочки. В связи с тем, что предлагаемая в [1] конструкция ролика направлена на его быструю смену в результате износа бочки, то утолщенная ее середина функционально не оправдана. На качество транспортируемого листа существенное влияние оказывает состояние поверхности бочки, ее рельеф. Однородная утолщенная часть, лишь увеличивая значительно массу бочки, которая подвергается частой замене, в условиях массового изготовления роликов, приведет к неоправданному расходу металла.

Поэтому предлагается ролик, конструктивно имеющий постоянную цилиндрическую часть на всей длине бочки. Роль внутренних присоединительных элементов выполняют конические отверстия, выполненные в ступичных втулках.

В предлагаемой конструкции унифицированного рольганга передача крутящего момента от втулки подшипникового блока ролику происходит за счет проявления сил трения-сцепления. Следует иметь в виду, что с точки зрения механики, выходной вал подшипникового блока и ролик представляют собой фрикционную пару, в которой вал блока является ведущим звеном, а ролик – ведомым. Во фрикционной паре вращение передается силами трения, что, соответственно, вызывает износ контактирующих поверхностей. Как правило, во фрикционной паре сочетается несколько видов износа с преобладанием одного лимитирующего. Классификация особенностей видов износов, разработанная на основании металлографического, рентгеноструктурного, химического и термического исследований сущности явлений, протекающих в поверхностных слоях при трении и износе деталей машин, приведена в [2]. На рисунке 1 представлена схема фрикционного соединения, где d и d_1 – наибольший и наименьший диаметры конуса соответственно; l – длина конуса втулки; 2α – угол конуса.



1 – втулка; 2 – бочка ролика; 3 – выходной вал подшипникового блока

Рис. 1. Схема фрикционного соединения.

Поскольку интенсивности протекания данных процессов способствует проскальзывание, принято решение увеличить коэффициент трения в данных фрикционных парах. Это возможно обеспечить силами упругих деформаций амортизирующих элементов, например, пружин, встроенных в подшипниковые модули.

Для обеспечения быстрого разъема соединения «ролик – втулка» возникает необходимость в определении главного параметра конического соединения – значения угла конуса 2α исключающего самозаклинивание соединения. Угол конуса 2α зависит от трения между сопрягаемыми поверхностями, которое характеризуется коэффициентом сцепления f_c или углом сцепления $\Delta = \text{arctg}(f_c) = \text{arctg}(\alpha)$ [3].

Поэтому в работе, с целью получения более точных зависимостей трения сцепления при определении угла самоторможения α_c конуса для конкретно применяемого конструкционного материала, с учетом вида механической обработки, были проведены экспериментальные исследования по плану эксперимента.

В соответствии с поставленной целью, в качестве параметра оптимизации выступают соответствующие величины коэффициента сцепления f_c .

Для обеспечения самоторможения необходимо выполнение условия [4]:

$$\alpha \leq \text{arctg}(f_c)$$

или

$$f_c < \text{tg } \alpha$$

Априори известно, что на величину угла самоторможения конуса оказывают влияние шероховатость сопрягаемых поверхностей, их температура, твердость материала, из которого изготовлены контактирующие поверхности, способы обработки сопрягаемых поверхностей, наличие смазки между поверхностями контакта [5, 6].

При этом взаимосвязь отмеченных факторов можно выразить в виде следующей модели:

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq 3} b_i \cdot x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

где y – соответствующая величина коэффициента сцепления f_c ; b_0 – среднее арифметическое значение параметра оптимизации; b_i – коэффициент регрессии, указывающий на силу влияния фактора; x_i и x_j – независимые переменные; b_{123} – эффект взаимодействия трех факторов.

В качестве независимых переменных были выбраны: шероховатость поверхности (X_1), температура поверхности (X_2), твердость материала (X_3). В рассматриваемой фрикционной паре наличие смазки между контактирующими поверхностями не предусматривается. Локальную область определения факторов установили из априорных соображений. Было решено варьировать каждый из факторов на двух уровнях. В таблице 1 представлены интервалы варьирования переменных с их значениями в натуральном масштабе на основном, верхнем и нижнем уровнях

. Таблица 1.

Уровни факторов

Факторы	X_1 (Ra , мкм)	X_2 (θ , °С)	X_{31} (НВ) Ст 20	X_{32} (НВ) СЧ 18
Основной уровень (X_i)	6,56	135	185	205,5
Интервал варьирования (ΔX_i)	5,93	115	22	35,5
Верхний уровень ($x_i = 1$)	12,5	250	207	241
Нижний уровень ($x_i = -1$)	0,63	20	163	170

Между кодированными (x_i) и натуральными (X_i) значениями факторов имеются следующие соотношения:

$$x_1 = \frac{X_1 - 6,56}{5,93}; \quad x_2 = \frac{X_2 - 135}{115}; \quad x_{3_1} = \frac{X_3 - 185}{22}; \quad x_{3_2} = \frac{X_3 - 205,5}{35,5}. \quad (1)$$

Для получения возможно более полной информации об изучаемых зависимостях было решено воспользоваться полным факторным экспериментом 2^3 . В соответствии с выбранным планом было выполнено 8 опытов. Каждый опыт повторялся 3 раза. С целью уменьшения систематически действующих во время эксперимента неконтролируемых факторов, опыты проводились рандомизированно в лабораторных условиях на экспериментальной наклонной установке с одной рабочей гранью, аналогичной представленной в [1]. Исходя из имеющихся материалов, в качестве рабочих образцов использовались заготовки из стали 20 (ГОСТ 1050-74, твердость после термической обработки $HV \cdot 10^{-1} \leq 207$ МПа) и серого чугуна СЧ 18 (ГОСТ 1412-85, твердость $HV \cdot 10^{-1} \leq 241$ МПа) с учетом выбранного масштаба по отношению к ролику отводящего рольганга АО «АрселорМиттал Темиртау», массой 0,48 кг. Требуемый параметр шероховатости обеспечивался продольным фрезерованием и шлифованием на универсальном металлорежущем оборудовании.

Матрица планирования для стали Ст 20 и серого чугуна СЧ 18 в натуральном и кодовом масштабах представлена в таблице 2. После проведения необходимых расчетов, проверки уравнения по критерию Стьюдента на адекватность, проверки значимости коэффициентов по критерию Фишера согласно методике, описанной в [7], получены следующие уравнения в кодированных значениях:

- для стали 20:

$$y_{Ст 20} = 0,39375 - 0,08875x_1 + 0,12625x_2 + - 0,03625x_1x_2 + 0,01375x_2x_3;$$

- для чугуна СЧ 18:

$$y_{СЧ 18} = 0,445 - 0,0825x_1 + 0,105x_2 - 0,0375x_1x_2 + 0,0125x_2x_3.$$

Таблица 2.

Матрица планирования, Ст 20, СЧ 18

Номер	Порядок	Натуральный масштаб	Кодовый масштаб	$y_{Ст 20}$	$y_{СЧ 18}$
-------	---------	---------------------	-----------------	-------------	-------------

опыта	док реали- зации	Ra , мкм	θ , °С	HB , Ст 20	HB , СЧ 18	x_0	x_1	x_2	x_3	(Ст 20)	(СЧ 18)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	12,5	250	207	241	1	1	1	1	0,41	0,42
2	7	0,63	250	207	241	1	-1	1	1	0,67	0,70
3	5	12,5	20	207	241	1	1	-1	1	0,21	0,28
4	1	0,63	20	207	241	1	-1	-1	1	0,31	0,37
5	8	12,5	250	163	170	1	1	1	-1	0,38	0,44
6	2	0,63	250	163	170	1	-1	1	-1	0,62	0,64
7	4	12,5	20	163	170	1	1	-1	-1	0,22	0,31
8	6	0,63	20	163	170	1	-1	-1	-1	0,33	0,40

Согласно t -критерию данные уравнения являются адекватными на 5%-ом уровне.

При переходе от кодированных значений факторов к натуральным уравнения приняты следующий вид:

- для стали 20:

$$y_{Ст 20} = 0,4328 - 0,0078Ra + 0,0015\theta - 0,0007HB - 0,00005Ra \cdot \theta + 0,000005\theta \cdot HB;$$

- для чугуна СЧ 18:

$$y_{СЧ 18} = 0,4497 - 0,0065Ra + 0,0007\theta - 0,0004HB - 0,00005Ra \cdot \theta + 0,000003\theta \cdot HB.$$

Необходимо отметить, что в полученных зависимостях величины коэффициента сцепления от рассматриваемых факторов при использовании конкретных материалов в исследуемых режимах, наиболее сильное влияние имеет температура нагрева образцов: с повышением температуры увеличивается коэффициент сцепления. Увеличение шероховатости поверхности, наоборот, ведет к понижению коэффициента трения. Также с увеличением твердости материала наблюдается незначительное понижение коэффициента сцепления. Значение фактора твердости в уравнениях регрессии на порядок ниже значения фактора шероховатости. Наблюдаемый в этих же уравнениях эффект от парного взаимодействия шероховатости поверхности и температуры нагрева ведет к понижению коэффициента трения, а появление значимого коэффициента от твердости материала и температуры ведет к его увеличению. Однако влияние парных эффектов не столь велико по сравнению с влиянием температуры и качества поверхности.

В связи с отмеченным, для количественного выражения фрикционных характеристик контактирующих пар «сталь–сталь» (Ст 20 – Ст 20) и «сталь–чугун» (Ст 20 – СЧ 18) от качества поверхности и температуры нагрева, были проведены эксперименты по определению значения угла клина Δ , равного углу трения при сухом трении для всех пар заготовок с вышеуказанными параметрами шероховатости, обеспеченными обработкой фрезерованием и шлифованием. Причем, экспериментальные данные фрикционных характеристик сравнивались с расчетными показателями. Расхождение экспериментальных результатов и расчетных показателей составило 2–7 %, что вполне приемлемо для лабораторных исследований в лабораторных условиях.

Количественные выражения фрикционных характеристик пар «Ст 20 – Ст 20» и «Ст 20 – СЧ 18» в зависимости от конкретных значений параметра шероховатости Ra при температуре $\theta = +20^\circ\text{C}$ представлены в таблице 3, а зависимость коэффициента трения f от качества обработки поверхностей указанных пар – на рис. 2.

Количественные выражения фрикционных характеристик пар «Ст 20 – Ст 20» и «Ст 20 – СЧ 18» в диапазоне температур $\theta = +20 \div +250^\circ\text{C}$ даны в таблице 4; на рис. 3 показана зависимость коэффициента трения f от нагрева контактных поверхностей указанных пар в исследуемом диапазоне температур.

Таблица 3.

Количественные выражения фрикционных характеристик пар «Ст 20 – Ст 20» и «Ст 20 – СЧ 18» при температуре $\theta = +20^\circ\text{C}$

Фрикционная пара	Параметр шероховатости Ra , мкм	Экспериментальные данные			Расчетные данные		
		Угол трения Δ , (°)	Коэффициент сцепления, f_c	Угол конуса 2α , (°)	Угол трения Δ , (°)	Коэффициент сцепления, f_c	Угол конуса 2α , (°)
Ст 20 – Ст 20	0,63	18°12'	0,33	36°24'	18°25'	0,333	36°50'
	1,25	18°12'	0,33	36°24'	18°9'	0,328	36°18'
	2,5	17°13'	0,31	34°26'	17°33'	0,317	35°6'
	6,3	16°12'	0,29	32°24'	15°48'	0,283	31°36'
	12,5	13°36'	0,24	27°12'	12°54'	0,229	25°48'
Ст 20 – Ст 18	0,63	20°6'	0,37	40°12'	20°42'	0,378	41°24'
	1,25	20°	0,36	40°	20°30'	0,373	41°
	2,5	20°	0,36	40°	19°54'	0,365	39°48'
	6,3	19°30'	0,35	39°	18°48'	0,340	37°36'
	12,5	15°48'	0,28	31°36'	16°42'	0,299	33°24'

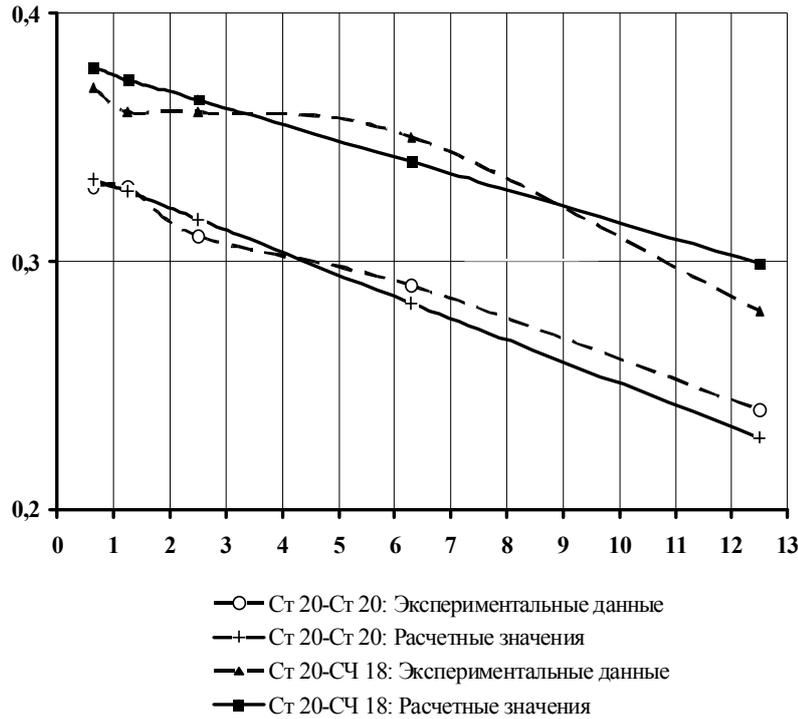
f 

Рис. 2. – Зависимость коэффициента трения f от качества обработки поверхностей фрикционной пары «сталь-сталь» и «сталь-чугун».

Ra, мкм

Таблица 4.

Количественные выражения фрикционных характеристик пар «Ст 20 – Ст 20» и «Ст 20 – СЧ 18» в диапазоне температур $\theta = +20 \div +250^\circ\text{C}$

Фрикционная пара	Температура нагрева, $t, ^\circ\text{C}$	Экспериментальные данные			Расчетные данные		
		Угол трения $\Delta, (^\circ)$	Коэффициент сцепления, f_c	Угол конуса $2\alpha, (^\circ)$	Угол трения $\Delta, (^\circ)$	Коэффициент сцепления, f_c	Угол конуса $2\alpha, (^\circ)$
Ст 20 – Ст 20	20	$16^\circ 12'$	0,29	$32^\circ 24'$	$15^\circ 48'$	0,283	$31^\circ 36'$
	50	$19^\circ 54'$	0,36	$39^\circ 48'$	$19^\circ 18'$	0,350	$38^\circ 36'$
	100	$25^\circ 36'$	0,48	$51^\circ 12'$	$24^\circ 42'$	0,461	$49^\circ 24'$
	150	31°	0,60	62°	$29^\circ 47'$	0,572	$59^\circ 34'$
	200	$35^\circ 48'$	0,72	$71^\circ 36'$	$34^\circ 18'$	0,683	$68^\circ 36'$
	250	$39^\circ 30'$	0,83	79°	$38^\circ 24'$	0,794	$76^\circ 48'$
Ст 20 – СЧ 18	20	$19^\circ 30'$	0,35	39°	$18^\circ 48'$	0,340	$37^\circ 36'$
	50	$19^\circ 54'$	0,36	$39^\circ 48'$	$20^\circ 12'$	0,367	$40^\circ 24'$
	100	$23^\circ 48'$	0,44	$47^\circ 36'$	$22^\circ 54'$	0,423	$45^\circ 48'$
	150	$27^\circ 6'$	0,51	$54^\circ 12'$	$25^\circ 33'$	0,478	$51^\circ 6'$
	200	$29^\circ 36'$	0,57	$59^\circ 12'$	$28^\circ 6'$	0,534	$56^\circ 12'$
	250	32°	0,62	64°	$30^\circ 30'$	0,589	61°

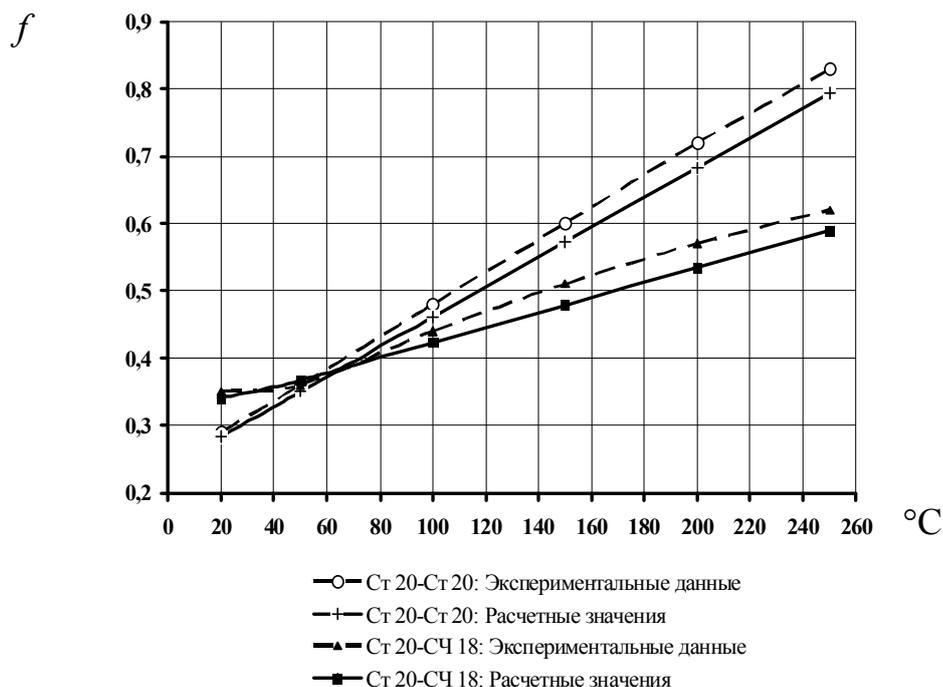


Рис. 3. – Зависимость коэффициента трения f от нагрева контактных поверхностей.

Литература

1. Задорожный В.Д. Унифицированный транспортный рольганг повышенной ремонтпригодности с индивидуальным приводом. Автореферат канд. техн. наук. Магнитогорск, 2006. 20 с.
2. Костецкий Б.И. Сопротивление изнашиванию деталей машины. – М.: ГОСНТИ, 1959. 364 с.
3. Михин Н.М. Внешнее трение твердых тел. - М.: Наука, 1977. 220 с.
4. Крагельский И.Г., Добычин М.Н., Камбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. - М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
5. Крагельский И.Г. Трение и износ. - М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
6. Воробьев Л.Н. Технология машиностроения и ремонт машин. - М.: Высшая школа, 1981. 344 с.
7. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. - М.: Машиностроение; София: Техника, 1980. 304 с.

УДК 543. 423.(04) (575.2) (04)

АТОМНО-ЭМИССИОННОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ В МИНЕРАЛЬНЫХ ПИТЬЕВЫХ ВОДАХ КЫРГЫЗСТАНА С ПРИМЕНЕНИЕМ ДВУХСТРУЙНОГО ПЛАЗМАТРОНА

Доржуева Г.Ж.

Представлены результаты атомно-эмиссионного спектрального анализа питьевых минеральных вод Кыргызстана с использованием двухструйного плазматрона ДГП-50. Результаты анализа минеральных вод показали, что содержание растворенных форм тяжелых металлов в несколько раз меньше, чем ПДК.

Питьевые минеральные воды содержат определенное количество минеральных солей и ионов, обладают специфическим газовым составом, повышенным содержанием биологически активных микрокомпонентов, определенной температурой, кислотностью, радиоактивностью и другими параметрами. Основными критериями отличия питьевых минеральных вод от пресных и определения лечебных свойств являются их минерализация и химический состав. Минерализация определяет количество всех растворенных в единице объема воды веществ и выражается в граммах на литр (г/л). Общая минерализация в питьевых минеральных водах республики колеблется от 0,08 до 3,13г/л.

В минеральных водах содержатся свыше пятидесяти различных химических элементов, имеющих в недрах земли. Они находятся в форме простых ионов или нерастворимых солей, концентрации различаются между собой на 5-6 порядков. Наиболее распространенными являются положительные ионы-натрия, калия, кальция, магния и три отрицательных - хлора, сульфата и гидрокарбоната.

Содержащиеся в минеральных водах в макроколичествах ионы этих микроэлементов (марганец, медь, цинк, молибден, мышьяк, железо, кобальт, никель, хром, свинец и другие) являются неизменными компонентами нормальной работы большинства имеющих в организме человека ферментов и способны активно вмешиваться в обмен различных веществ в организме. Тем не менее ряд микрокомпонентов природных минеральных вод характеризуется точно установленным токсическим действием на организм человека. Для большинства микрокомпонентов установлены предельно допустимые концентрации, при превышении которых воду нельзя использовать для питьевых нужд [1].

Сведения по анализу минеральных вод Кыргызстана в литературе почти отсутствуют, кроме одной статьи по анализу углекислых минеральных вод Ак-Суу. В этой воде микроэлементы определены спектральным методом сухого остатка в электрической дуге и обнаружено присутствие в аномально повышенных концентрациях (от веса сухого остатка) никеля-до 0,11%, хрома-до 0,25%, лития-до 0,03%, стронция-до 0,11%, бериллия-до 0,0007%, в фоновых концентрациях – меди, свинца, цинка, олова, бария.

Химическим анализом в этой воде установлено содержание (в мг/л) цинка-до 0,08, меди-до 0,04, свинца-до 0,01, мышьяка-до 0,01, урана 0,005 [2].

Поэтому возникает вопрос, каково содержание тяжелых элементов в минеральных питьевых водах Кыргызстана.

Применение высокотемпературных источников возбуждения, одним из которых является двухструйный плазматрон ДПП-50, при прямом введении анализируемой жидкости между струями плазмы позволяет осуществить экспресс анализ с низкими пределами обнаружения и высокими метрологическими характеристиками определения [3,4]. Высокая температура и протяженность двухструйного плазматрона ДПП-50 обеспечивает полную испарения вводимых мелкодисперсных аэрозолей, что является определяющим фактором понижения предела обнаружения в атомно-эмиссионном спектральном анализе, а высокая стабильность струи плазмы является гарантом хорошей воспроизводимости точности анализа. Это еще раз хорошо подтверждается работами авторов [5].

Настоящая работа посвящена исследованию возможностей и разработке методик атомно-эмиссионного спектрального анализа питьевых минеральных вод Кыргызстана на микроэлементы с использованием двухструйного плазматрона ДПП-50.

Для проведения спектрального анализа минеральных питьевых вод подобраны и куплены из магазина семь марок вод в литровых бутылках различающихся по минерализации в широких пределах.

1. Аква-минерал	-0,05 мг/л.
2. Легенда	-0,08-0,25 мг/л.
3. Байтик	-0,08-0,4 мг/л.4.
4. Ысык-Ата	-0,3-0,4 мг/л.
5. Артезиан	-0,3-0,4 мг/л.
6. Бишкек	-1,4-1,7 мг/л.
7. Жалал-Абат	-2,8-3,13 мг/л.

Минеральные воды Аква, Легенда, Байтик, Ысык-Ата, Артезиан концентрировали методом упаривания под чистым вытяжным шкафом от 10 до 20 раз в зависимости от минерализации без кипячения на плитке и сохраняли в мерной колбе.

Многоэлементные стандартные растворы определяемых микроэлементов готовили растворением соответствующими кислотами металлов, окислов и солей марки ОСЧ, ХЧ, ЧДА. Головной стандартный раствор готовился в объеме 200 мл из растворов элементов, содержащихся в нем в концентрации 1 г/л, с добавлением разбавителя, имеющего натрия, кальция и магния в сумме 3 г/л. Шкала рабочих стандартных растворов готовилась путем последовательного разбавления головного стандартного раствора, представляющего слабокислые растворы элементов, суммарным разбавителем.

Анализы питьевых минеральных вод республики проводились в оптимальном режиме работы двухструйного плазматрона ДПП-50 ($I=100A$, $G=4,5$, $\alpha=117^0$ между головками) проектиро-

ванием (1:1) при помощи линзы с фокусным расстоянием $F=150\text{мм}$ оптимального участка струи плазмы, отстоящего на расстоянии $H=27\text{мм}$ от среза плазменных головок на щель спектрографа ДФС-13 с решеткой 600шт/мм (дисперсия 4А/мм) спектры каждой минеральной воды и образцы сравнения синтетических растворов фотографировались на фотопластинке ПФС-01 с чувствительностью 6 ед ГОСТа при ширине щели спектрографа 20 мкм с экспозицией 50с.

Анализируемые воды подавались между струями двухструйного плазматрона при помощи концентрического распылителя [6]. Спектры анализируемой воды и стандартных водных растворов фотографировались дважды. Аналитические линии определяемых элементов и фон рядом с линией фотометрировали микроденсиметом МД-100 и находили значения $\Delta S = S_{л+ф} - S_{ф}$, где $S_{л+ф}$ - почернения линии с фоном, $S_{ф}$ - почернения фона. ΔS - усреднения параллельных определений. По стандартным водным растворам строили градуировочный график в координатах $\Delta S = \lg C$, где C - концентрации определяемых элементов.

Результаты анализа минеральных вод на двухструйном плазматроне представлены в таблице.

Результаты анализа минеральных вод

мг/л									
№	Мин.воды	Mn	Cr	V	Fe	Zn	Sr	Mo	Cu
1	Аквалент	0,012	0,022	0,140	0,090	0,22	0,04	0,06	0,01
2	Легенда	0,012	0,022	0,031	0,088	0,22	0,08	0,06	0,01
3	Байтик	0,012	0,024	0,025	0,093	0,25	0,07	0,06	0,01
4	Ысык-Ата	0,015	0,024	0,033	0,100	0,28	0,12	0,08	0,02
5	Артезиан	0,012	0,020	0,029	0,091	0,17	0,09	0,09	0,02
6	Бишкек	0,035	0,033	0,072	0,091	0,35	0,50	0,07	0,03
7	Жалалабад	0,341	0,021	0,033	0,096	0,29	0,23	0,06	0,01
	ПДК	0,1	0,05	0,1	0,3	5	7	0,25	1

Результаты анализа минеральных вод показали, что валовое содержание растворенных форм тяжелых металлов в несколько раз меньше чем ПДК указанных элементов, кроме марганца в воде Жалалабат, содержание которого в 3,4 раза выше, чем ПДК данного элемента. Поэтому необходимо еще раз проверить содержание марганца в минеральной воде Жалалабат.

Разработана методика атомно-эмиссионного определения 8 элементов в питьевых минеральных водах Кыргызстана после упаривания некоторых вод от 10 до 20 раз в зависимости от минерализации.

Относительное стандартное отклонение определения элементов в минеральных водах методом атомно-эмиссионного анализа с применением двухструйного плазматрона составляет 0.05-0,1.

Литература

1. Толстихин Н.И., Посохов Е.В., Минеральные воды. - Ленинград, 1975. С 68.
2. Ляхин В.В., Мамыченков В.Е. К вопросу формирования термальных вод в палеоген-неогеновых отложениях района г.Фрунзе и основные принципы их поисков в пределах предгорных впадин (на примере Чуйской). / Узб. геол. Ж., 1985-№6, С. 46-50
3. Урманбетов К., Жеенбаев Ж.Ж., Таштанов Р.А., Доржуева Г.Ж. Атомно-эмиссионный спектральный анализ природных вод на установке «Нур». // Известия НАН КР, 1998, №4. С.23
4. Доржуева Г.Ж. Атомно-эмиссионное определение тяжелых металлов жидкой пробе с возбуждением спектров на установке «Нур». // Наука и новые технологии, 2006. №1. С. 13-18.
5. Шуваева О.В., Черевко А.С., Двуреченская С.Я., Юделевич И.Г.. Химико-атомно-эмиссионная методы анализа природных вод с использованием плазмы дуги постоянного тока и двухструйного плазматрона в качестве источников возбуждения спектров // Химия в интересах устойчивого развития. 1994. №2. С.507.

6. Урманбетов К., Жеенбаев Ж.Ж.,
 Рысбеков С.К., Токарский И.М.,
 Чылымов А. Распылитель для спектрального анализа А.С.1744512, 1992

УДК 517.958

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Аблабеков Б.С.

Исследуются вопросы существования и единственности классического решения задачи Коши уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.

1. **Уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.** Как известно, [1, 2] уравнение фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде описывается следующим уравнением:

$$\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p + \eta \beta_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} p \right] = 0, \quad (1.1)$$

где $p(x, t)$ - давление жидкости в трещинах; $k(x)$ - коэффициент проницаемости трещин; $\beta_0(x)$ - коэффициент сжимаемости жидкости;

$\mu(x)$ - вязкость жидкости, $\eta(x)$ - коэффициент пьезопроводности.

Если среда однородна то из уравнения (1.1) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \eta \Delta p - \chi \frac{\partial}{\partial t} \Delta p = 0, \quad (1.2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in R^1$, Δ - оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3 .

Если анизотропия пористой среды связаны с естественной слоистостью и значит, проницаемость в вертикальном направлении значительно меньше, чем в горизонтальном, то уравнение (1.2) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \eta \Delta_2 p - \chi \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 p = \chi_0 p_{x_3 x_3}, \quad (1.3)$$

где Δ_2 - оператор Лапласа по переменным x_1, x_2 .

Для последующего исследования полезно перейти к безразмерным переменным и переписать

уравнение (1.2) так
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \frac{\partial}{\partial t} \Delta u = 0, \quad (1.4)$$

сохранив для новых переменных прежние обозначения $t, x_j, j = 1, 2, 3$.

Задача Коши для неклассических составных уравнений типа (1) продолжает привлекать внимание многих исследователей в силу двух обстоятельств. Во-первых, исследование этих уравнений начато сравнительно недавно и еще далек от завершения, что обуславливает математический интерес к ним. Во-вторых, уравнение типа (1) возникают при рассмотрении целого ряда задач фильтрации и почвенных влаг, представляющих прикладной интерес. В связи с этими обстоятельствами следует отметить особую роль задач разрешимых в явном виде.

В этой работе продолжается исследование начатые в [5-7] и посвящена рассмотрению задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.

2. **Фундаментальное решение и задача Коши.** В этом пункте мы изучим фундаментальное решение двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде и на его основе построим решение соответствующей задачи Коши.

Найдем фундаментальное решение оператора L , т.е. обобщенную функцию

$E(x, t) \in D'(R^3)$, удовлетворяющую уравнению

$$LE \equiv D_t(\Delta_2 E - E) + \Delta_2 E = \delta(x, t). \quad (2.1)$$

Обозначим через $\tilde{E}(\xi, t)$ преобразование Фурье функции $E(x, t)$ по переменной x .

Тогда функция $\tilde{E}(\xi, t)$ будет удовлетворять уравнению

$$D_t \tilde{E}(\xi, t) + \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \tilde{E}(\xi, t) = -\frac{1}{1 + |\xi|^2} l(\xi) \times \delta(t),$$

Отсюда, используя фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d}{dt} + a$, имеем:

$$\tilde{E}(\xi, t) = -\frac{\theta(t)}{1 + |\xi|^2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} t\right).$$

При любом $t \geq 0$ функция $\tilde{E}(\xi, t) \in L_{loc}(R^2)$ и $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \tilde{E}(\xi, t) = 0$.

Применив формулу обратного преобразования Фурье к функции $\tilde{E}(\xi, t)$ в пространстве

$$\begin{aligned} E(x, t) &= F_\xi^{-1}[\tilde{E}(\xi, t)] = \frac{1}{(2\pi)^2} F_\xi[\tilde{E}(-\xi, t)] = \\ &= -\frac{\theta(t)}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} t + i \langle \xi, x \rangle\right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При каждом фиксированном t фундаментальное решение (3) можно интерпретировать как обобщенную функцию из $S'(R^3)$, действие которой на $\varphi(x) \in S(R^2)$ равно

$$\langle E, \varphi \rangle = \int_{R^2} E(x, t) \varphi(x) dx. \quad (2.3)$$

Тогда для любой основной функции $\varphi(x) \in S(R^2)$ будет справедливо равенство

$$\langle (2\pi)^2 E(x, t), \varphi(x) \rangle = \langle \tilde{E}(\xi, t), \tilde{\varphi}(\xi) \rangle,$$

где

$$\tilde{\varphi}(\xi) = F[\varphi(x)] = \int_{R^2} \varphi(x) e^{i \langle x, \xi \rangle} dx \text{ - преобразование Фурье функции } \varphi(x).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \langle (2\pi)^2 E(x, t), \varphi(x) \rangle &= -\theta(t) \int_{R^2} \int_{R^2} \varphi(x) \frac{1}{1 + |\xi|^2} \exp\left\{-\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} t + i \langle \xi, x \rangle\right\} d\xi dx = \\ &= -\theta(t) e^{-t} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R^2} \varphi(x) \left[\int_{U_R(0)} \exp\left\{\frac{t}{1 + |\xi|^2} + i \langle \xi, x \rangle\right\} \frac{d\xi}{1 + |\xi|^2} \right] dx, \end{aligned}$$

где $U_R(0)$ — шар радиуса R с центром в точке 0 .

Обозначим внутренний интеграл через $J(x, t)$ и вычислим его. Для этого воспользуемся полярными координатами. Положим $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Тогда функция $J(x, t)$ примет следующий вид

$$J(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{i|x|\rho \cos \varphi} \exp\left\{\frac{t}{1+\rho^2}\right\} \frac{\rho}{1+\rho^2} d\varphi d\rho.$$

Разложив функцию $e^{i\langle x, \xi \rangle}$ в ряд Тейлора, функцию $J(x, t)$ перепишем в виде

$$J(x, t, R) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho^2} \exp\left\{\frac{t}{1+\rho^2}\right\} \frac{(i|x|\rho)^k}{k!} d\rho \cdot \frac{2\pi}{\Gamma(1)} Q_k,$$

где $Q_k = \int_0^\pi \cos^k \varphi d\varphi.$

Отсюда, используя формулы из [3, с], получаем

$$E_2(x, t) = -\frac{\theta(t)e^{-t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t|x|}{2}\right)^m \frac{K_m(|x|)}{m!^2}, \quad (2.4)$$

где функция $K(z)$ - функция Макдональда.

Рассмотрим теперь изолированный трещиновато-пористый пласт, занимающую все пространство R^2 и изучим задачу нахождения давления, вызванные ее начальным состоянием. С математической точки зрения эта задача формулируется следующим образом.

Задача Коши. Найти функцию $u(x, t)$, принадлежащую при некотором γ классу

$C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению

$$Lu \equiv D_t(\Delta_2 u - u) + \Delta_2 u = f(x, t), \quad (2.5)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^2. \quad (2.6)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $u_0(x) \in C_0^\infty(R^2)$, $f(x, t) \in C_0^\infty(R^2 \times [0, \infty))$ и финитна по x в R^2 , то классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует единственно и дается формулой

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{R^2} E_2(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{R^2} E_2(x - \xi, t) L_1[u_0](\xi) d\xi, \quad (2.7)$$

где $L_1 = \Delta_2 - I$.

Доказательство. Построим решение этой задачи, используя фундаментальное решение оператора L . Для этого сначала докажем существование и единственность решения соответствующей обобщенной задачи Коши, затем покажем принадлежность обобщенного решения $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T)$ и воспользуемся леммой из [3].

Получим решение задачи Коши (2.5), (2.6), воспользовавшись аппаратом теории обобщенных функций.

Сформулируем обобщенную задачу Коши для уравнения (2.5).

Предположим что, существует классическое решение задачи (1), (2), т.е.

существует функция обладающей непрерывными частными производными до третьего порядка и удовлетворяющими уравнению (2.5) при $t > 0$ и начальному условию (2.6) при $t = 0$.

Справедлива

Лемма 1. Пусть $u(x, t)$ является решением задачи (2.5), (2.6). Тогда функция $v = \theta(t)u(x, t)$ является решением задачи

$$Lv = \theta(t)f(x, t) + L_1[u_0]\delta(t), \quad (2.8)$$

$$v|_{t=0} = 0. \quad (2.9)$$

Доказательство.

Используя равенство (2.5) и свойство δ - функции, находим

$$v_t = \theta(t)u_t(x, t) + \delta(t)u(x, t) = \theta(t)u_t(x, t) + \delta(t)u_0(x),$$

$$\Delta_2 v = \theta(t)\Delta_2 u,$$

$$\Delta_2 v_t = \theta(t)\Delta_2 u_t + \delta(t)\Delta_2 u = \theta(t)\Delta_2 u + \delta(t)\Delta_2 u_0(x).$$

Отсюда получаем

$$Lv = \theta(t)Lu + (\Delta_2 u_0(x) - u_0(x))\delta(t) = \theta(t)f(x, t) + L_1[u_0]\delta(t).$$

А равенство (2.9) является прямым следствием равенства $v = \theta(t)u(x, t)$.

Действительно, $v|_{t < 0} = \theta(t)u|_{t < 0} = 0$.

Теперь заменим задачу (2.5), (2.6) на обобщенную задачу Коши (2.8), (2.9). В силу условий теоремы для функций f, u_0 , существуют свертки правой части уравнения (2.8) с фундаментальным решением оператора L и потому обобщенное решение задачи Коши (2.8), (2.9) существует в $D'(R_2)$ и дается [3] по формуле:

$$v(x, t) = E(x, t) * [\theta(t)f(x, t) + L_1[u_0](x)\delta(t)], \quad (2.10)$$

где $*$ символ означает свертку. Вычислив свертку в (2.10) и положив

$$v = \theta(x, t)u(x, t) \text{ приходим к формуле (2.7).}$$

Замечание. Заметим, что требование о гладкости и финитности начальной функции $u_0(x)$ и правой части $f(x, t)$ можно значительно ослабить.

Литература

1. Баренблатт Г.И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. -1963. -Т. 27, №2. -С. 348-350.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. -1960. -Т. 24, №5. -С. 852-864.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - Москва: Наука, 1979.- 318с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - Москва: ФМЛ, 1963. -1100с
5. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 182 с.
6. Аблабеков Б.С. Решение двумерной задачи фильтрации жидкости // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Сер. естественно-техн. науки. –Бишкек. 1999. –Вып.1, Ч.1.-С. 61-65.
7. Аблабеков Б.С. О задаче идентификации коэффициента фильтрации в трещиноватом пласте // Труды международной научной конференции «Развитие информационно-коммуникационных технологий в информационном обществе: состояние и перспективы». - Бишкек, 2004.-С.236-241.

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ИСТОЧНИКА В ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Курманбаева А.К.

Изучается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части для псевдогиперболического уравнения, в случае задачи Коши.

Рассматривается обратная задача определения источника, зависящего от времени в псевдогиперболическом уравнении, которая заключается в нахождении решения и правой части из условий, составляющих прямую (в данном случае начальную) задачу, и некоторого дополнительного условия, называемого переопределением (в данном случае переопределения по времени в фиксированной пространственной точке).

Аналогичная обратная задача для псевдогиперболического уравнения в случае, когда коэффициенты оператора постоянны и в случае краевой задачи изучена в работах [1-4]. В данном параграфе обратная задача сначала сводится к обратной задаче для интегро-дифференциального параболического уравнения, затем применяются методы работ [2].

Пусть $\Omega_T = \{(x, t): x \in R, t \in (0, T]\}$, $T > 0$ - фиксированное число.

Рассмотрим задачу определения пары функций $(u, f) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega_T) \times H^\alpha([0, T]) = Q$ из условий

$$Au \equiv u_{tt} - L(u_t + u) = f(t)h(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

$$u(0, t) = v(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где h, g, φ, ψ и v - некоторые заданные функции, причем $h(0, t) \neq 0$,

$$Lu \equiv a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0.$$

Определение 2.1.1. Пару функций $\{u, f\} \in Q$ назовем решением задачи (2.1.1)-(2.1.3), если

- 1) $u(x, t)$ – классическое решение задачи (2.1.1)-(2.1.2) в Ω_T ,
- 2) $u(0, t) = v(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Теорема 2.1. Пусть $a, b, c \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_T)$ а функции

$h \in H^{2+\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $g \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\varphi, \psi \in H^{2+\alpha}(R)$, $v \in H^{2+\alpha}([0, T])$ и выполнены условия согласования $\varphi(0) = v(0)$, $\psi(0) = v'(0)$. Тогда решение обратной задачи (2.1.1)-(2.1.3) существует и единственно.

Доказательство. Заметим, что так как задача (2.1.1)-(2.1.3) линейна, то ее решение можно искать в виде $(u, f) = (u^1, 0) + (u^2, f)$, где $u^1(x, t)$ удовлетворяет задаче

$$Au^1 = g(x, t), \quad u^1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t^1(x, 0) = \psi(x). \quad (4)$$

Пара функций (u^2, f) удовлетворяет задаче

$$Au^2 = f(t)h(x, t), \quad u^2(x, 0) = 0, \quad u_t^2(x, 0) = 0, \quad u^2(0, t) = v(t) - u^1(0, t). \quad (5)$$

Из этого следует, что для доказательства теоремы 2.1. достаточно доказать существование и единственность определения пары функций $(u, f) \in Q$ из условий

$$Au = fh, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in R, \quad (7)$$

$$u(0, t) = v(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Для доказательства разрешимости задачи (6)-(8) рассмотрим задачу определения тройки функций (u, V, f) из условий

$$u_t + u = V, \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (9)$$

$$V_t - LV - V + \int_0^t e^{-(t-\tau)} V(x, \tau) d\tau = f(t)h(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (10)$$

$$V(x, 0) = 0, \quad x \in R, \quad (11)$$

$$V(0, t) = v'(t) + v(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Задачи (6)-(8) и (9)-(12) связывает следующая лемма.

Лемма 2.1. 1) Если $(u, f) \in Q$ - решение задачи (6)-(8), тогда (u, V, f) -решение задачи (9)-(12).

2) Пусть (u, V, f) -решение задачи (9)-(12), тогда $(u, f) \in Q$ - решение задачи (6)-(8), при этом $V = u_t + u$.

Доказательство леммы проводится непосредственно проверкой.

Известно, что (см. §1.1) любое решение задачи (10)-(11) имеет вид

$$V(x, t) = \int_0^t f(\tau) \int_R Z(x, t, y, \tau) h(y, \tau) dy d\tau, \quad (13)$$

где $Z(x, t, y, \tau)$ - фундаментальное решение оператора [3]

$$L_1 u \equiv u_t - Lu - u + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau.$$

Так как

$$V_t = LV + V - \int_0^t e^{-(t-\tau)} V(x, \tau) d\tau + f(t)h(x, t),$$

то из (13) имеем

$$V_t = \int_0^t f(\tau)h(y, \tau) \int_R (LZ + Z - \int_{\tau}^t e^{-(\tau-\tau_1)'} Z)(x, \tau, y, \tau_1) d\tau_1 dy d\tau + f(t)h(x, t) \quad (14)$$

Положив в (14) $x=0$, и, пользуясь дополнительной информацией (12), получим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$f(t) + \int_0^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

где

$$K(t, \tau) = \left[\int_R (LZ + Z - \int_{\tau}^t e^{-(\tau-\tau_1)'} Z)(x, \tau, y, \tau_1) d\tau_1 h(y, \tau) dy \Big|_{x=0} \right] / h(0, t), \quad (16)$$

$$g_1(t) = (v''(t) + v'(t)) \cdot h^{-1}(0, t) \quad (17)$$

Так как $h \in H^{2+\alpha, \alpha/2}$, то из (16) следует, что ядро $K(t, \tau)$ удовлетворяет неравенствам

$$|K(t, \tau)| \leq C_1,$$

$$|K(t_1, \tau) - K(t_2, \tau)| \leq C_2 |t_1 - t_2|^{\alpha/2}.$$

Отсюда следует, что уравнения (15) является вольтерровым [2] и решение этого уравнения существует, единственно и имеет вид

$$f(t) = [v''(t) + v'(t)]h^{-1}(0, t) + \int_0^t R(t, \tau)[v''(\tau) + v'(\tau)]h^{-1}(0, \tau) d\tau, \quad (18)$$

где функция $R(t, \tau)$ - разрешающее ядро для $K(t, \tau)$.

Покажем, что функция $f(t)$, определенная формулой (18), принадлежит пространству $H^{\alpha/2}([0, T])$. Для этого рассмотрим разность $f(t) - f(t^0)$. Тогда из (15) получаем

$$\begin{aligned} h(0, t)f(t) - h(0, t^0)f(t^0) &= [v''(t) - v''(t^0) + v'(t) - v'(t^0)] - \\ &- \int_0^t K_1(t, \tau)f(\tau) d\tau + \int_0^{t^0} K_1(t^0, \tau)f(\tau) d\tau = (v''(t) - v''(t^0)) + \\ &+ (v'(t) - v'(t^0)) - \int_0^t [K_1(t, \tau) - K_1(t^0, \tau)]f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

где $K_1(t, \tau) = h(0, t) \cdot K(t, \tau)$.

Из (16)-(19) и предположений теоремы получаем неравенство

$$|f(t) - f(t^0)| \leq C_1 |t - t^0|^{\alpha/2} + C_2 |t - t^0|^{\alpha/2} + C_3 |t - t^0|^{\alpha/2}. \quad (20)$$

Из (20) получим, что $f(t) \in H^{\alpha/2}[0, T]$.

Теперь покажем, что пара функций $V(x, t)$, $f(t)$, где $f(t)$ определенная формулой (18), а

$$V(x, t) = \int_0^t f(\tau) \int_R Z(x, t, y, \tau) h(y, \tau) dy d\tau \quad (21)$$

является решением задачи (9)-(12). Функция $V(x, t)$, заданная формулой (21) является единственным решением задачи (10)-(11). Проверим, что условие (12) также выполнено. Пусть функция

$V(0, t) = v_1'(t) + v_1(t)$ удовлетворяет равенству

$$v_1''(t) + v_1'(t) = \int_0^t K_1(t, \tau) f(\tau) d\tau + f(t)h(0, t). \quad (22)$$

Так как $f(t)$ - решение уравнения (15), то из (15) и (22) относительно функции $v_2''(t) = v(t) - v_1(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение с нулевыми начальными данными

$$v_2''(t) + v_2'(t) = 0, \quad v_2(0) = v_2'(0) = 0.$$

Следовательно, $v(t) = v_1(t)$ и условие (12) выполнено.

Единственность решения задачи (9)-(12) следует из (13) и (15).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть (V_1, f_1) и (V_2, f_2) любые две пары функций, удовлетворяющие условиям (9)-(12), а $v_1(t)$ и $v_2(t)$ отвечающие им данные (12) обратной задачи. Тогда для любого конечного $T > 0$ существует такая постоянная, что имеют место оценки устойчивости

$$\|V_1 - V_2\|_{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)} \leq C \|h_1 - h_2\|_{H^{2+\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_T)},$$

$$\|f_1 - f_2\|_{H^{\alpha/2}([0, T])} \leq C \|v_1 - v_2\|_{H^{2+\alpha}([0, T])}.$$

Доказательство этой теоремы следует непосредственно из соотношений (13), (15).

Замечание. Аналогичным образом можно исследовать обратную задачу, в случае краевой задачи.

Литература

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. - Бишкек: КГНУ, 1997. - 184 с.
2. Аблабеков Б.С. Интегральные уравнения Вольтерра и их приложения. - Бишкек, КГТУ, 2009. - 148 с.
3. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Фундаментальные решения и задача Коши для псевдогиперболических уравнений // Вестн. Кыргызск гос ун-та. Сер. естественнотех. науки. - Бишкек, 1999. - Вып. 1, ч. 1. - С. 95-101.
4. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Обратная задача определения временного источника в псевдогиперболическом уравнении // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2000. - Вып. 29. - С. 299-303

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ МОНИТОРИНГА НА ПРИМЕРЕ ДАМБЫ ХВОСТОХРАНИЛИЩА ЗИФ РУДНИКА «КУМТОР»

Джаманбаев М.Д., Чукин Б.А.

Приводятся результаты численного моделирования реологических процессов, происходящих в грунтах основания дамбы хвостохранилища.

Возведение тела дамбы хвостохранилища рудника Кумтор началось в 1995 году. В 1999 году впервые были отмечены смещения в грунтах основания дамбы. Дальнейшие исследования показали, что смещения происходят в суглинистом прослое с содержанием льда до 50-60%. Необходимо было разработать инженерные мероприятия для остановки смещений дамбы. Одним из способов рассмотрения вариантов по остановке смещений является численное моделирование. Численное моделирование выполнено на основании программы FLAC.

Важным этапом численного моделирования является выбор модели грунта, описывающей связь между деформациями ползучести и релаксацией напряжений. В результате анализа различных моделей для описания реологических процессов в грунтах, выбор пал на степенную зависимость Нортон. Приведем основные этапы реализации степенной зависимости Нортон для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) грунтов.

Принимается, что начальное НДС известно, т.е. известными являются:

- тензор напряжений σ_{ij} ,
- тензор скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$.

Вычисляется девиатор тензора напряжений σ_{ij}^d и $\dot{\epsilon}_{ij}^d$ - девиатор скорости деформаций. По известному значению девиатора тензора напряжений σ_{ij}^d вычисляется инвариантное

значение интенсивности напряжений:
$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \left(\sigma \frac{d}{ij} \sigma \frac{d}{ij}\right)^{1/2} \quad (1)$$

Интенсивность напряжений $\bar{\sigma}$ определяет значение градиента скорости деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{cr} = A \bar{\sigma}^{-n}$, где A и n свойства материала. Это и есть степенная зависимость Нортона.

По известному значению градиента скорости деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{cr}$ и отношению девиатора тензора напряжений σ_{ij}^d к интенсивности напряжения $\bar{\sigma}$ вычисляют тензор скорости

деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ по выражению:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \left(\frac{3}{2}\right) \dot{\epsilon}_{cr} \left(\frac{\sigma_{ij}^d}{\bar{\sigma}}\right) \quad (2)$$

По известному значению девиатора скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^d$ и вычисленному тензору скорости деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ вычисляют приращение девиатора скорости деформации

$\dot{\epsilon}_{ij}^d - \dot{\epsilon}_{ij}^c$. Произведение приращения девиатора скорости деформаций $(\dot{\epsilon}_{ij}^d - \dot{\epsilon}_{ij}^c)$ на удвоенное значение модуля сдвига $2G$ даст приращение девиатора тензора напряжений $\Delta \sigma_{ij}^d$ для данного шага по времени Δt .

$$\Delta \sigma_{ij}^d = 2G(\dot{\epsilon}_{ij}^d - \dot{\epsilon}_{ij}^c) \Delta t \quad (3)$$

Приращение девиатора тензора напряжений $\Delta \sigma_{ij}^d$ изменит значение девиатора тензора напряжений σ_{ij}^d , а приращение девиатора скорости деформации $(\dot{\epsilon}_{ij}^d - \dot{\epsilon}_{ij}^c)$ изменит девиатор скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^d$ и все расчеты повторяются заново.

Объемные деформации приняты упругими. В связи с этим, приращение главных напряжений определяется через выражение:

$$\Delta\sigma_{kk} = 3K\Delta\epsilon_v \quad (4)$$

где K модуль объемной деформации и приращение объемных деформаций

$$\Delta\epsilon_v = \Delta\epsilon_{11} + \Delta\epsilon_{22} + \Delta\epsilon_{33} \quad (5)$$

Расчет заканчивается по достижению заданного периода времени t .

В нашем случае, расчеты НДС с учетом реологических процессов основывались на калибровке модели так, чтобы результаты расчета смещений сближались с данными мониторинга за смещениями. При отсутствии лабораторных исследований по определению реологических параметров суглинистого грунта методология сближения результатов расчета с данными мониторинга за смещениями является единственно оправданной. При этом отмечаем, что если бы и были результаты лабораторных исследований, то подход калибровки модели оставался бы наиболее достоверным, так как основывался на сближении результатов расчета с реальными данными за смещением.

Наблюдения за смещениями производились на основании инклинометров. Для составления реологической модели были выбраны показания INC98-1 (98 – год установки инклинометра, 1 - порядковый номер инклинометра, установленного в 1998 году).

Выбор основывался на следующих обстоятельствах:

- INC98-1 расположен на участке, где суглинистый прослой в последующем не был удален;
- INC98-1 имеет наиболее длинный ряд натуральных наблюдений: с 3 апреля 1999 по 21 декабря 2001 и с 4 сентября 2003 по 13 августа 2005 г.;
- другие инклинометры, установленные взамен INC98-1 или на других участках, можно использовать для оценки правильности составленной реологической модели и работоспособности дамбы в целом.

На рис.1 представлены наблюдаемые смещения по показаниям INC98-1. По вертикальной оси отложена глубина в метрах от гребня дамбы. По горизонтальной оси - величина суммарных смещений в миллиметрах. Из рисунка видно, что наиболее интенсивно смещения происходят между отметками 22 м и 24 м. Так как глубина отметок по мере наращивания инклинометра меняется, удобнее «привязать» отметки 22 м и 24 м к уровню естественной поверхности. Уровню естественной поверхности соответствует отметка 20 м. В таблице 1 приводится соответствие отметок реальной глубине залегания слоев суглинистого прослоя и его мощность.

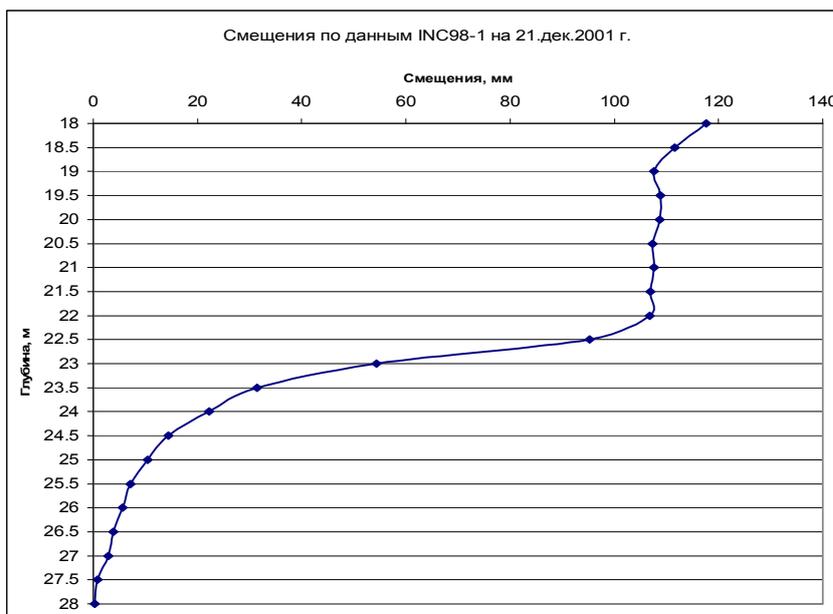


Рис.1. Картина распределений смещений по глубине.

Таблица 1.

Отметка по INC98-1, м	Глубина залегания слоя от естественной поверхности, м	Мощность прослоя, м
22	2	0
22.5	2.5	0.5
23.0	3.0	1.0
23.5	3.5	1.5
24.0	4	2.0

Согласно результатам инженерно-геологических изысканий, проведенных в 2006 году, суглинистый прослой имеет различные значения мощности. Мощность колеблется в пределах от 6 до 10 метров. Наибольшие деформации сдвига наблюдаются в верхней части суглинистого прослоя в пределах 2 метров.

Обращаем внимание, что кровля суглинистого прослоя, расположена на глубине 2 м от естественной поверхности. Все показания по смещениям выше этой отметки практически одинаковые. То есть, тело дамбы, а также 2-х метровый слой естественного грунта выше суглинистого прослоя испытывают меньшие деформации сдвига. Для того, чтобы выяснить: на каких глубинах и с какой интенсивностью происходят деформации сдвига, был построен график смещений «колен» инклинометра относительно друг друга. Качественная картина распределения деформаций сдвига в суглинистом прослое представлена на рис.2.

Глубина 20 м соответствует уровню естественной поверхности

Кровля суглинистого прослоя на отм. 22 м

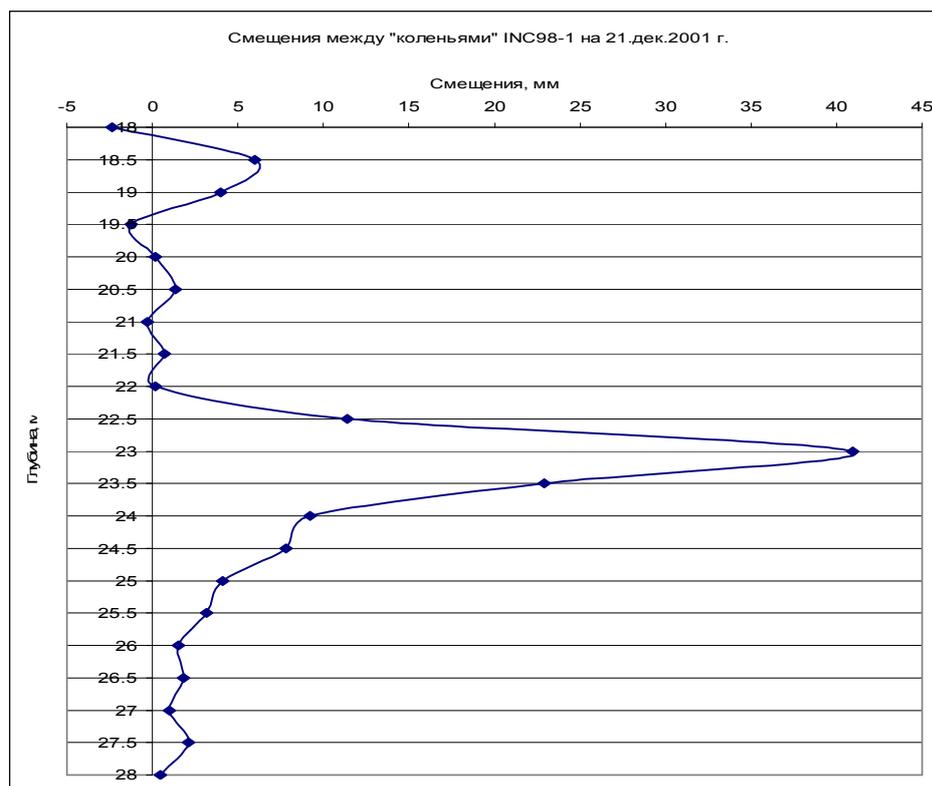


Рис. 2. График интенсивности деформаций сдвига в верхней части суглинистого прослоя.

Из графика видно, что наибольшие деформации сдвига отмечаются на глубине от 2.5 до 4 м (отметка 22.5-24 м). Тем самым, наиболее деформируемый слой имеет мощность порядка 1.5 метра. Ниже 4 м (отметка 24.0 м) деформации сдвига равномерно снижаются.

Составление реологической модели базируется на выделении расчетных реологических слоев в пределах всего суглинистого прослоя мощностью 9 м и подборе реологических параметров для каждого расчетного слоя так, чтобы максимально точно описать картину наблюдаемых смещений по данным INC98-1. Ввиду того, что смещения в суглинистом прослое проходили еще до того, как был установлен INC98-1, необходимо попытаться восстановить накопленные смещения с начала строительства дамбы.

Данные мониторинга по INC98-1 разбиты на два временных периода: с 03.04.1999 по 21.12.2001 и с 04.09.2003 по 13.08.2005. За начало строительства мы приняли дату 01.01.1995. Дата начала строительства может быть и иной, но даже сдвиг на 1 год вперед (1996) приведет к искажению результатов смещений всего на 5 см. Но главное - он не приведет к искажению значений разности смещений между расчетными слоями. Разность в смещениях между слоями определяет величину деформаций сдвига и является наиболее важным для оценки устойчивости. На рис. 3 приводятся восстановленные графики смещений по выделенным слоям суглинистого прослоя на основании данных мониторинга. Обращаем внимание, что аппроксимация результатов наблюдений линейной регрессионной моделью дает высокую адекватность линейной модели. На рис.3 приведен результат аппроксимации смещений слоя, находящегося на глубине 2 м с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.995$ [1]. Такие же результаты получены для смещений, происходящих в других слоях. Практически смещения слоев на этапах наращивания дамбы в период с 1999 года по 2005 год происходят по линейному закону.

Калибровка модели производилась за счет вариаций параметра **A**. Параметр n принят постоянным и равным 3. Путем варьирования параметра **A** добивались сближения результатов расчета с реальными данными за смещением.

Наиболее точная аппроксимация результатов смещений в суглинистом прослое получилась по реологической модели, состоящей из 5 расчетных слоев. Необходимо подобрать параметры **A** для реологической модели так, чтобы можно было решать прогнозную задачу [2-9].

Графики смещений по данным INC98-1 слоев грунта на глубине 2.0, 2.5, 3.0, 3.5 и 4.0 м от естественной поверхности

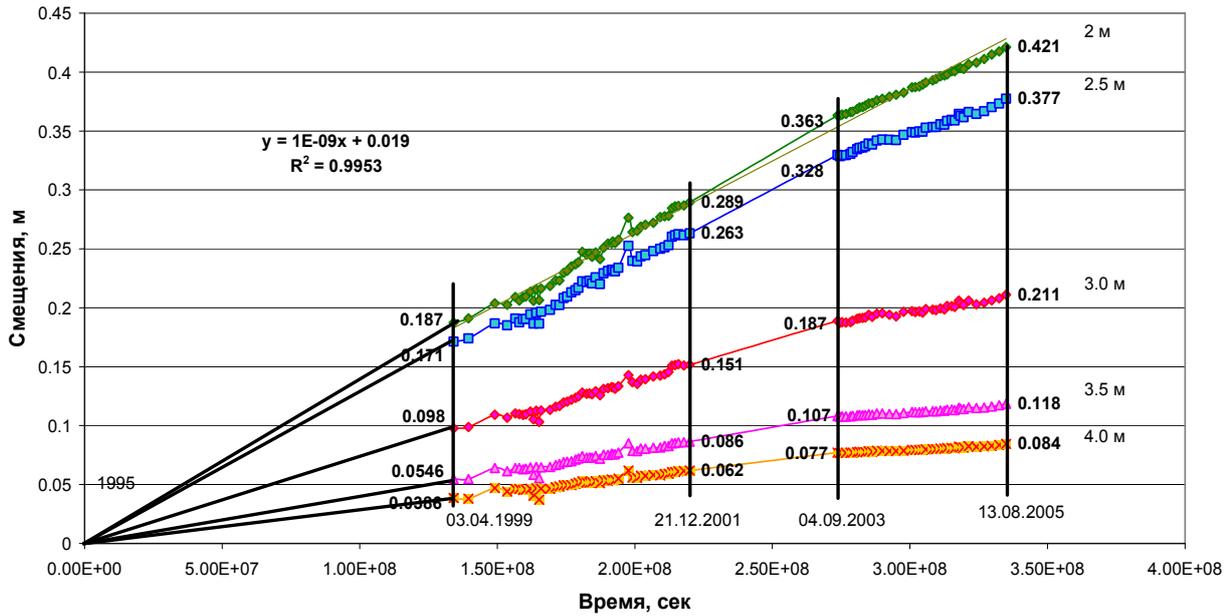


Рис.3. Графики смещений слоев суглинистого прослая, находящихся на различных глубинах от естественной поверхности основания.

То есть можно было бы решить задачу расчета НДС на основании хорошего сближения с данными мониторинга, без дальнейших изменений показателя A . Нам удалось этого добиться путем поэтапной калибровки моделей 1996, 1997, 1999, 2001, 2002 и 2004 годов. На рис.4 приведен фрагмент реологической модели на конец 2004 года. Реологическая модель 2004 года является окончательной. После этого изменения в показатели ползучести A для всех этапов наращивания дамбы, заполнения хвостохранилища, а также строительства клина в 2006 и 2009 году не вводились. Окончательные значения показателя A для всех расчетных слоев показаны на рис.4.

На рис.5 показаны графики сопоставления результатов расчета горизонтальных смещений с данными наблюдений по INC98-1 до 2004 года включительно.

Достаточно хорошее совпадение результатов расчетов с данными мониторинга было получено по основным смещающимся слоям, находящимся на глубинах 22.5 м, 23.0 м и 23.5 м. Калибровка 2004 года была связана с тем, что на 2008 год в графиках смещений наблюдается некоторое отклонение от линейного характера смещений.

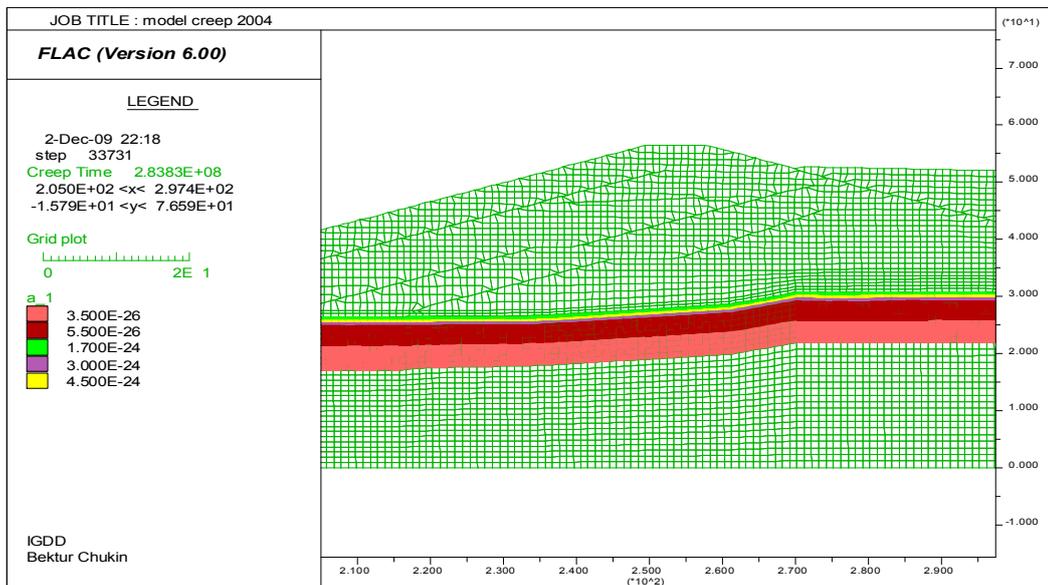


Рис. 4. Расчетные слои основания дамбы реологической модели 2004 г.

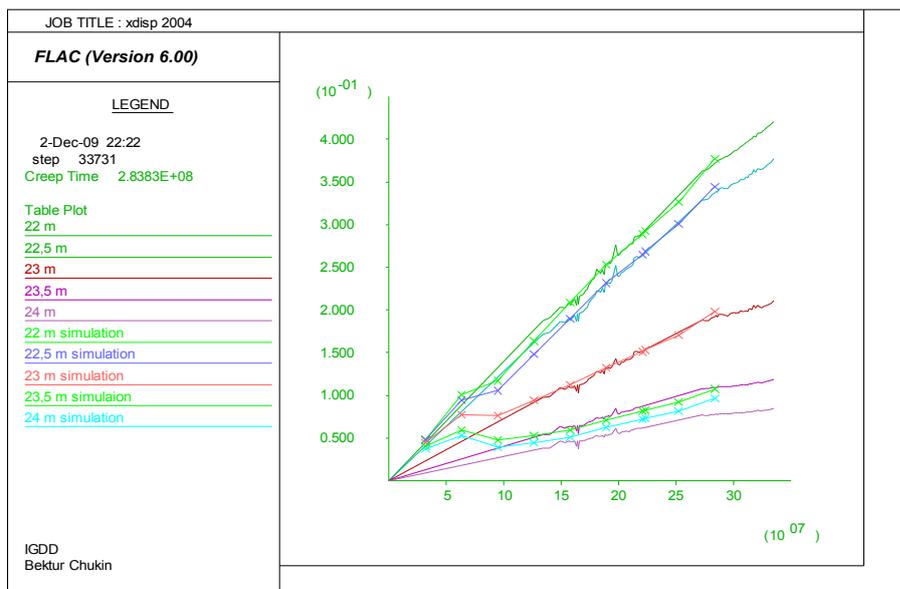


Рис. 5. Сопоставление результатов расчета с данными мониторинга за смещениями по данным INC98-1 на 2004 г.

Именно корректировка значения показателя A в среднем слое в 2004 году позволила нам добиться наилучшего приближения. Ввиду того, что в последующих моделях не производилось корректировки показателя A , можно считать, что все последующие расчеты носят прогнозный характер. Остановимся на результатах расчета, полученных на 2009 год. На рис.6 показаны результаты прогноза горизонтальных смещений по слоям до 2009 года включительно.

Необходимо отметить, что в расчетах учитывались экскавационные работы 2003, 2006 и 2009 годов по строительству клина. Суглинистый прослой, простирающийся под телом дамбы и до клина 2003 года удалить уже невозможно. Также невозможно удалить грунты в основании между клиньями 2003 и 2006 годов. Не удаленный суглинистый прослой оказывает самое существенное влияние на общий характер распределения смещений в дамбе и основании. Основной особенностью в характере распределения горизонтальных смещений является то, что смещения в суглинистом прослое на участках под дамбой продолжаются, а смещения на участках, где был удален суглинистый прослой и заменен на крупнообломочные грунты, останавливаются. На рис. 7 представлена общая картина горизонтальных смещений на конец 2009 года.

Наибольшие горизонтальные смещения сконцентрировались на участке, где суглинистый прослой удалить невозможно. На этом участке суммарные горизонтальные смещения к концу 2009 года не превышают 60 см. Область, где суглинистый прослой был удален и построен клин, горизонтальные смещения не превышают 10 см. То есть, происходит сжатие грунтов между клином 2006 г. и смещающимся телом дамбы по суглинистому прослою.

Это говорит о том, что проводимые мероприятия по остановке смещений дамбы за счет деформаций, вызванных реологическими процессами в суглинистом прослое, себя оправдывают.

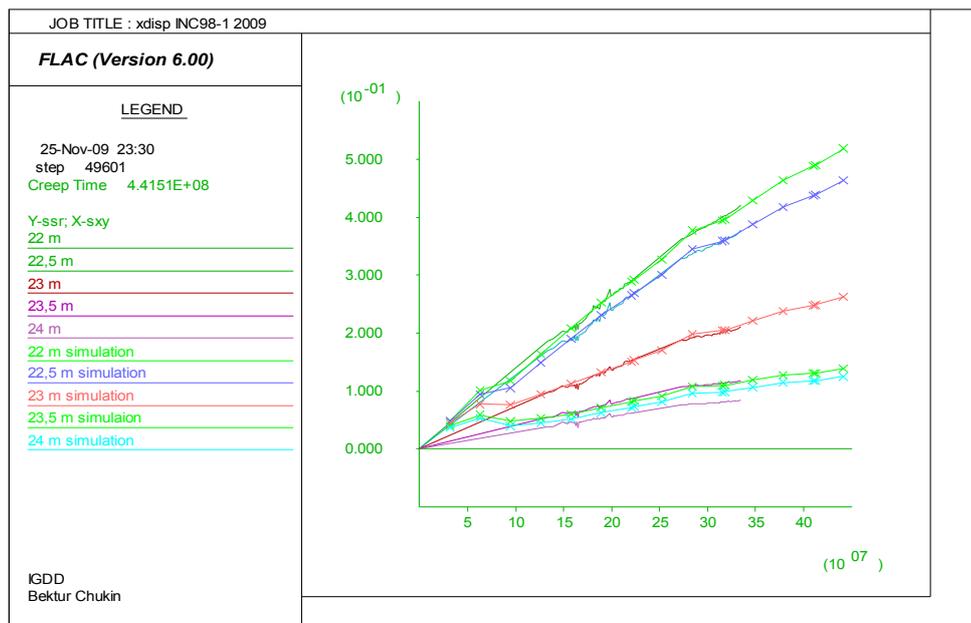


Рис.6. Результаты прогноза горизонтальных смещений по слоям до 2009 г.

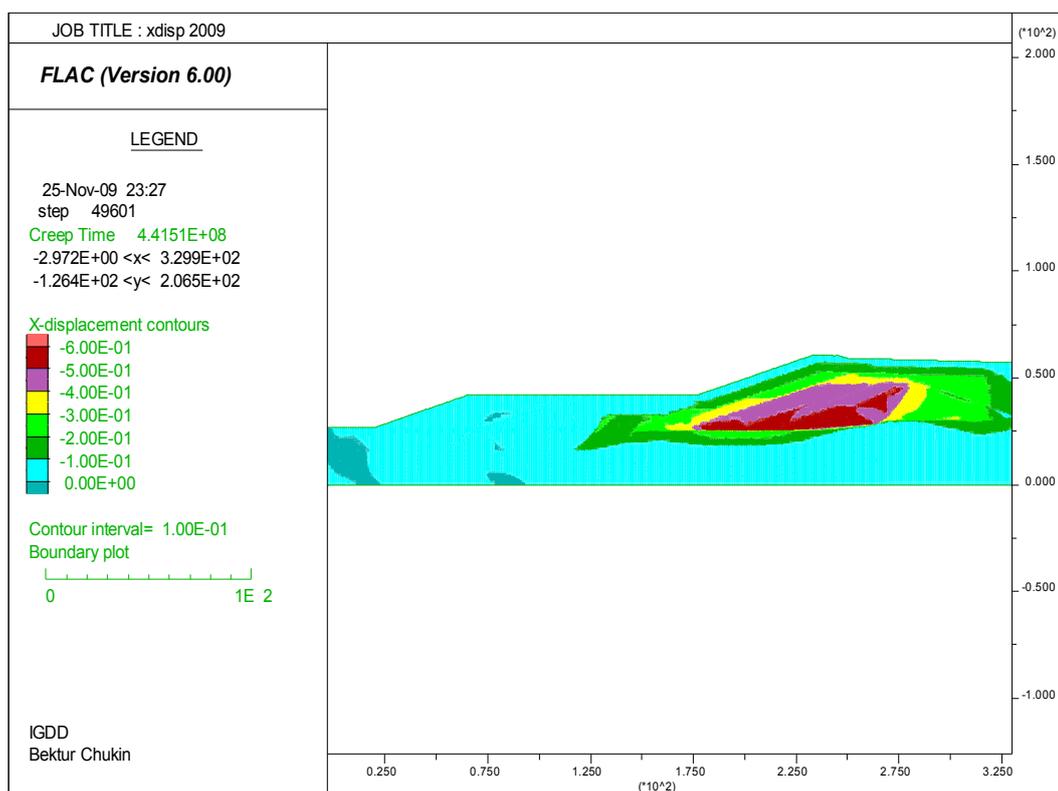


Рис.7. Общая картина горизонтальных смещений на конец 2009 года.

Выводы

1. Для описания реологических процессов, происходящих в грунтах суглинистого прослоя дамбы хвостохранилища рудника Кумтор, была использована степенная зависимость, предложенная Нортонем. Калибровка модели на основании зависимости Нортоня дала высокую степень сближения результатов расчета с данными мониторинга за смещениями.
2. Данные мониторинга и результаты численного моделирования показали, что недалекий суглинистый прослой под дамбой определяет картину распределения горизонтальных смещений в теле дамбы и грунтах основания. Замена грунтов суглинистого прослоя на крупнообломочные грунты, произведенная в 2006 и 2009 годах, привела к замедлению скоростей горизон-

тальных смещений в районе строительства клиньев. Максимальная скорость горизонтальных смещений в теле дамбы на конец 2009 г. составляет 3.5 см/год. Минимальная скорость горизонтальных смещений в теле клина и пригрузочной призме на конец 2009 г. составляет 0.25 см/год. Максимальная величина горизонтального смещения в суглинистом прослое на конец 2009 г. составила порядка 55 см. Максимальная величина горизонтального смещения, как в клине 2006 г., так и в клине 2009 г. не превышает 5 см.

Литература

1. Боровиков В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. – Санкт-Петербург: Питер, 2003. – 730 с.
2. Маслов Н.Н. Основы инженерной геологии и механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1982. – 511 с.
3. Шукле Л. Реологические проблемы механики грунтов / Сокр. пер. с англ. Маслова Н.Н. Изд.2-е. М.: Стройиздат, 1976.- 485 с.
4. Гольдштейн М.Н. Механические свойства грунтов. – М., т.1-3, 1979.
5. Зарецкий Ю.К., Ломбардо В.Н. Статика и динамика грунтовых плотин. – М.: Энергоатомиздат, 1983.- 256 с.
6. Тер-Мартirosян Э.Г. Прогноз механических процессов в массивах многофазных грунтов. - М.: Недра, 1986. - 292 с.
7. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
8. Месчан С.Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов. - М.: Недра, 1985. - 342 с.
9. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. – Ростов, Издательство Ростовского университета, 1989. - 608 с.

УДК 539.3: 624.131

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ СОСТЫКОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

Курманалиев К.

Рассмотрена волновая динамика оболочечно-стержневых периодически состыкованных систем. Определены фазовые кривые взаимозависимости от параметров секций.

Рассмотрим распространение ассиметричных продольных волн в оболочечной системе, состоящей из бесконечного числа однородных цилиндрических секций (оболочек) состыкованных последовательно упругими безынерционными связями (рис. 1). Соединение реализуется на торцах (фланцах). Связи равномерно распределены по окружности и в радиальном направлении абсолютно жесткие. Условие жесткости необходимо для перехода к стержневой модели, так как жесткость поперечной связи не оказывает влияние на распространение низкочастотной продольной волны.

Дисперсия продольных волн в стержнях, вызванная радиальными колебаниями достаточно известна [1]. Необходимо выявить вклад в дисперсию вносимых неоднородностями в стыковочных узлах. Для этого секции заменим эквивалентными стержнями с массами m_1 и m_2 сосредоточенными на торцах.

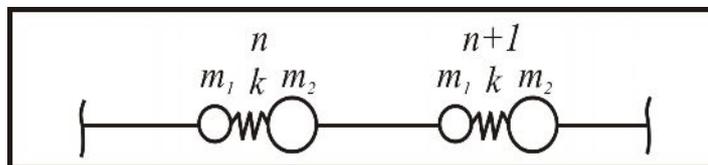


Рис.1. Модель оболочечной системы.

Обозначим: u – смещение сечений секции, $U_{n,1}$ и $U_{n,2}$ - смещение масс m_1 и m_2 ; n -ом узле, k – жесткостью связей.

За единицу измерений приняты величины, относящиеся к секции. Тогда определяющие уравнения задачи запишутся в виде:

$$\ddot{u} - u'' = 0 \quad (x \neq n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 + \dots)$$

$$m_1 \ddot{U}_{n,1} = T_n^k - T_n^-,$$

$$m_2 \ddot{U}_{n,2} = T_n^+ - T_n^k + Q(t)H_1(n),$$

где $T_n^k = k(U_{n,2} - U_{n,1})$, $T_n^\pm = (U')_x = n \pm 0$,

$$u = U_{n,1(\chi=n-0)}, \quad u = U_{n,2(\chi=n+0)};$$

$$x = n + R, \quad R \in (0,1)$$

Здесь T_n^k - сила, вызванная деформацией связи;

T_n^\pm - силы, вызванные деформацией секций и действующие на массы $m_2(+)$ и $m_1(-)$.

$Q(t)$ – продольная сила, приложенная к массе m_2 нулевого узла.

$H_1(n)$ – функция Дирака.

Используя известный алгоритм [1] разработанный Л.И. Слепяном:

- уравнения преобразуются по Лапласу (L);
- находится L – изображение решение для элементов несущей и связывающей под конструкции с учетом граничных условий в стыковочных узлах;
- определяются L – изображение всех обобщенных сил, действующих на стыковочный узел несущей конструкции, и записывается уравнение динамики n-го узла. Для n+1 узла вследствие периодичности получаем аналогичные уравнения;
- полученная бесконечная рекуррентная система алгебраических уравнений обладает ленточно-диагональной матрицей и сворачивается при помощи дискретного преобразования Фурье (F_d по n).

В нашем случае получим:

$$A_n = k^{-1} \left[(k + mp^2) shp + pchp \right], \quad m = m_1 + m_2, \quad m_* = m_1 \cdot m_2$$

$$D = chp - \cos q + k^{-1} \left[(1 + km + m_* p^2) p shp + mp^2 chp \right].$$

Обозначая:

$$a_1 = k^{-1} + m(1 + k^{-1}),$$

$$a_2 = \frac{[(3 + K)m + G m_* + 1]}{Gk}$$

$$c_* = \sqrt{\frac{k}{(k+1)(m+1)}}, \quad c \approx c_*(1 - \alpha q^2); \quad q \rightarrow 0$$

$$\alpha = \frac{c_*^4}{24} \left\{ \left[\frac{m(k+1)}{k} \right]^2 + \frac{1}{k^2} + \frac{2m(1-k) - 12km_*}{k^2} \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках определяет дисперсию, вызванную наличием масс. Второе слагаемое отвечает дисперсии за счёт связей. Третье слагаемое определяет взаимодействие вкладов от масс и жесткостей.

На рис. 2 приведены фазовые кривые, рассчитанные при $p=iqc$ для некоторых параметров неоднородностей. Видно, как с ростом m и уменьшением k , уменьшается величина q_* .

С учетом радиальных колебаний оболочки получим:

$$c_* = \sqrt{\frac{k(1 - \nu^2)}{(1+k)[1 + m(1 + \nu^2)]}}$$

$$\alpha = \frac{c_*^4}{24} \sum_{i=0}^3 \alpha_i,$$

$$\alpha_0 = \frac{12\nu^2 R^2 (k+1)}{k(1-\nu^2)^2},$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{m^2}{1-\nu^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{k^2(1-\nu^2)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2m(1-k)(1-\nu^2) - 12m_*k}{k^2}.$$

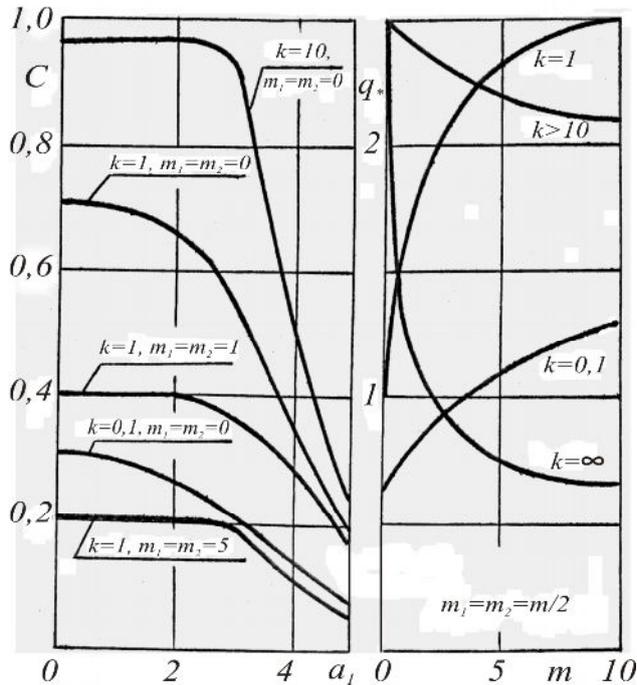


Рис. 2. Фазовые кривые.

Здесь появляется слагаемое α_0 , определяющее характер дисперсии в оболочечной системе: если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_0$, то основной вклад в дисперсию вносят радиальные колебания. В случае противоположного неравенства – основное влияние оказывают дискретные неоднородности.

Таким образом, исследована структура низкочастотной резонансной волны, распространяющейся по цилиндрическим оболочкам корпусных конструкций при движении вдоль их оси волны радиального давления. Показано, что критические скорости во внешней нагрузке совпадают со скоростями длинных [2] (в пределе бесконечно длинные) волн приведенных однородных моделях.

Литература

1. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л., 1972. – 374 с.
2. Курманалиев К. Движение цилиндрической системы с поперечными связями под действием нестационарной волны. – Сб. Актуальные проблемы механики и машиностроения. – Алматы, 2005. с. 222-225.

УДК 539.3:624.131

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ДИСПЕРСИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ УПРУГИХ ВОЛН В КОРПУСНЫХ СИСТЕМАХ

Курманалиев К.

Проведен анализ результатов в задачах распространения нестационарных волн по различным корпусным системам (оболочечные, стержневые, цилиндрические) закрепленные между собой жесткими связями.

Способ получения временных ($t \rightarrow \infty$) асимптотик для квазистационарной неосциллирующей волны, распространяющихся по однородным цилиндрическим системам (корпусным системам) при локальном осевом воздействии и движущейся нагрузке описан Л.И.Слепяном в [1], §18. При использовании преобразований Лапласа в движущейся системе координат (обозначим его L^*) на луче $x = c \cdot t$ оригинал:

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sigma-i_{\infty}}^{\sigma+i_{\infty}} u^{LF}(p, q) \cdot e^{pt-iqx} dpdq \quad (1)$$

После замены

$$p = s + iq \frac{x}{t}, \quad x = ct + \xi, \quad \text{где } \xi - \text{мало и определяет окрестность луча, преобразуется к виду:}$$

$$u^{L^*}(s, c, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{LF}(s + iq\frac{x}{t}, q) e^{-i\xi q} dq. \quad (2)$$

Для определения асимптотик искоемых функций в окрестности лучей $x = c \cdot t$ (c – произвольно $p = S + iq(c + c')$, $c' \rightarrow 0$) достаточно рассмотреть изображение (2) на плоскости p, q в окрестности особых точек с наибольшей вещественной частью. В предположении отсутствия экспоненциально растущих решений (естественных с физической точки зрения) асимптотика квазистационарной волны может быть получена при $s \rightarrow 0$ [1].

Подынтегральное выражение (2) имеет особенности в тех точках плоскости qc , где дисперсионный оператор при $p = s + iq\frac{x}{t}$ и $s \rightarrow 0$ обращается в ноль, то есть в точках фазовых кривых.

В задачах с движущейся (со скоростью V) нагрузкой было показано в [1], что в случае, когда прямая $c = v$ пересекает фазовую кривую, интеграл (2) существует в смысле главного значения и ограничен.

Если $c = v = c_*$ (прямая $c = v$ в точке $q = \bar{q}(c_*)$) касается фазовой кривой, то в (2) появляется неустранимая особенность, что приводит к неограниченному (при $t \rightarrow \infty$) росту возмущений, распространяющихся вдоль оси. Степень этого роста зависит от поведения фазовой кривой в малой окрестности $|q - \bar{q}(c_*)| \leq \xi$ и для различных \bar{q} определена в [1].

В случае локального осевого (торцевого) воздействия, изображение нагрузки при ($s \rightarrow 0$) и $|q| \leq \xi$ не имеет особенностей, дисперсионный оператор имеет порядок s^{-1} , а возмущения ограничены при их распределении вдоль оси цилиндрической системы.

Применение дискретного преобразования Фурье при исследовании периодически неоднородных систем [2,3,4,5,6,7] не вносит особенностей в проведение перехода от LF_a - преобразования к L^* - преобразованию на луче: оригинал

$$u(t, n) = U_n(t) = \frac{1}{4\pi^2 i} C_* \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sigma-i_{\infty}}^{\sigma+i_{\infty}} u^{LF_d}(p, q) e^{-pt-iqn} dpdq \quad (3) \text{ после замены}$$

$$p = s + iq \frac{n}{t}, \quad n = ct + \xi, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (4)$$

преобразуется к виду типа (2):

$$u^{L^*}(s, c, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^{LF_d}(s + iq\frac{n}{t}, q) \cdot e^{-i\xi q} dq \quad (5)$$

В подынтегральных выражениях (2) и (5) проводится разложение изображений в окрестности волнового числа \bar{q} (абсциссы особой точки \bar{q}, c_* на плоскости q, c), если \bar{q} конечно, и в

произвольной окрестности \bar{q} , если $\bar{q} = \infty$ определяет особые точки в коротковолновой части спектра [1].

В [2,3,4,5,6,7] основное внимание уделено определению s^* (особой точки $\bar{q} = 0$ и выявлению поведения фазовой кривой в малой окрестности $|q| \leq \xi$ за исключением особой точки при $\bar{q} = \infty$ в задаче о континуальном распределении амортизированных масс по оси корпуса.

Длинноволновая асимптотика дисперсионных операторов имеет одинаковую структуру и при

$p = S + iq (c_* + c')$, $S \rightarrow 0$, $|q| \leq \xi$ для $D(p, q)$ примет вид:

$$D \approx 2igc_* (s + iq c' + ic_* a q^3), \quad (6)$$

где c_* - скорость длинных волн (в пределе бесконечно длинных),

α – величина, определяющая дисперсию низкочастотного спектра [2] и зависит от параметров модели конкретной корпусной системы.

Таким образом, получена асимптотическая оценка распространения продольной упругой волны, вызванной торцевым локальным воздействием по оси корпусной системы, позволяющая проводить тестовые расчеты прикладных задач.

Литература

1. Слепьян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л., 1972. С.374
2. Курманалиев К. Дисперсионные свойства ортотропной цилиндрической оболочки. // Известия КНТУ №6. – Б.: ИЦ «Техник», 2004. С. 113-116
3. Курманалиев К. Действие волны давления на цилиндрическую оболочку с амортизированными массами. // Известия КНТУ №7. – Б.: ИЦ «Техник», 2005.
4. Курманалиев К. Движение цилиндрической системы с поперечными связями под действием нестационарной волны. Сб.: Актуальные проблемы механики и машиностроения. – Алматы, 2005. С. 222-225.
5. Курманалиев К. Распространение нестационарных волн давления в коаксиальных цилиндрах с наполнителем. // Известия КГТУ им. И.Раззакова №10. – Б.: ИЦ «Техник», 2006. С. 158-163
6. Курманалиев К. Движение слоистых систем с наполнителем при действии нестационарной волны давления. В кн. Проблемы автоматизации, управления, экономики и подготовки кадров для современных производств. – СПб., 2008.
7. Курманалиев К. Нестационарные волны в системе состыкованных оболочек. // Известия КГТУ им. И.Раззакова №19. – Б.: ИЦ «Техник», 2010.