

УДК 519.6 (575.2) (04)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТОВ

Д.А. Турсунов, Э.А. Эшаров, А.Т. Бекмуратов

Используется новый тип эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов для построения приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. Вейвлеты построены в базисе эрмитовых кубических сплайнов. Численные результаты демонстрируют преимущество построенных базисных вейвлетов.

Ключевые слова: Вейвлет; эрмитов кубический сплайн; интегро-дифференциальное уравнение.

Введение. Недостатком построенных ранее вейвлетов является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то, и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. Все обозначения те же, что и в работе [1].

Пусть ϕ_1 и ϕ_2 кубические сплайны вида:

$\phi_1(x) = (x+1)^2(1-2x)\chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)^2(1+2x)\chi_{[0,1]}(x)$ и
 $\phi_2(x) = (x+1)^2x\chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)^2x\chi_{[0,1]}(x)$, где $\chi_{[a,b]}(x)$ – характеристическая функция, $\chi_{[a,b]}(x)=1$, при $x \in [a,b]$ и $\chi_{[a,b]}(x)=0$, при $x \notin [a,b]$.

В работе [2] Дамен и др. построили биортогональные мультивейвлеты в базисе эрмитовых кубических сплайнов ϕ_1 и ϕ_2 . Отметим, что их конструкция базисных вейвлетов выглядит слишком сложно.

В [1] мы предлагали новый подход к построению базисных вейвлетов на пространстве эрмитовых кубических сплайнов. В отличие от полуортогональных вейвлетов Чуи и Вонга эти вейвлеты ортогональны со скалярным произведением $\langle u', v' \rangle$, а не $\langle u, v \rangle$. Это требование ортогональности лучше подходит для применения вейвлетов к численному решению интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Вдобавок, эти вейвлеты имеют меньший носитель.

Нетрудно заметить, что множество

$$\Phi_n := \{\phi_1(2^n \cdot -j) : j=1, \dots, 2^n-1\} \cup \{\phi_2(2^n \cdot -j) \mid_{(0,1)} : j=0, \dots, 2^n\}, \quad (1)$$

является базисом для V_n . Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1, \dots, v_{2^{n+1}}\}$.

Пусть Ψ_n множество вейвлетов, которые пока не конкретизируются:

$$\Psi_n := \{\psi_1(2^n \cdot -j) : j=1, \dots, 2^n-1\} \cup \{\psi_2(2^n \cdot -j) \mid_{(0,1)} : j=0, \dots, 2^n\}, \quad (2)$$

и W_n – линейное пространство, натянутое на Ψ_n , очевидно, что $\dim(W_n) = 2^{n+1}$. В работе [1] мы доказали равенство

$$\int_0^1 w'(x) v'(x) dx = 0, \quad \forall w \in \Psi_n, \quad \forall v \in \Phi_n. \quad (3)$$

Из этого следует, что $V_n \cap W_n = \{0\}$. Кроме того, будет показано, что $V_{n+1} \supseteq V_n + W_n$ и $\dim(V_{n+1}) = \dim(V_n) + \dim(W_n)$. Это означает, что $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$. Следовательно, мы получим разложение $H_0^1(0,1) : H_0^1(0,1) = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$.

Элементы Ψ_n обозначим через $\Psi_n = \{w_2^{n+1}, \dots, w_2^{n+2}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $g_k := v_k / \|v'_k\|_2$ при $k=1, 2, 3, 4$ и $g_k := w_k / \|w'_k\|_2$ при $k > 4$. Тогда $\|g'_k\|_2 = 1$ при $n \in \mathbb{N}$.

Сплайн-вейвлеты. ϕ_1 и ϕ_2 – кубические сплайны, определенные во введении удовлетворяют условиям: $\phi_1, \phi_2 \in C^1$, $\phi_1(0)=1$, $\phi_1'(0)=0$, $\phi_2(0)=0$, $\phi_2'(0)=1$.

Следовательно, эрмитова интерполяция для функции $f \in C^1(\mathbb{R})$ имеет следующий вид:

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) \phi_1(\cdot - j) + f'(j) \phi_2(\cdot - j), \quad \forall j \in \mathbb{Z} : u(j) = f(j), \quad u'(j) = f'(j).$$

Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное ϕ_1 и ϕ_2 . Функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют две последовательности b_1, b_2 на $\mathbf{Z}$, для которых выполняется равенство: $g = \sum_{j \in \mathbf{Z}} [b_1(j)\phi_1(\cdot - j) + b_2(j)\phi_2(\cdot - j)]$.

Пусть $S_1 = \{g(2 \cdot) : g \in S\}$, тогда $S \subset S_1$. Мы ищем пространство вейвлетов W , для которого $S_1 = S \oplus W$. При этом мы хотим найти два вейвлета ψ_1, ψ_2 , так что их сдвиги порождают W . Кроме того, мы потребуем выполнение равенств

$$\langle \psi'_1, \phi'_m(\cdot - j) \rangle = \langle \psi'_2, \phi'_m(\cdot - j) \rangle = 0, \quad m=1,2, \quad \forall j \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Отсюда имеем два материнских вейвлета ψ_1, ψ_2 :

$$\psi_1(x) = -2\phi_1(2x+1) + 4\phi_1(2x) - 2\phi_1(2x-1) - 21\phi_2(2x+1) + 21\phi_2(2x-1),$$

$$\psi_2(x) = \phi_1(2x+1) - \phi_1(2x-1) + 9\phi_2(2x+1) + 12\phi_2(2x) + 9\phi_2(2x-1).$$

Носителями построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2 является отрезок $[-1, 1]$, они удовлетворяют условию (4), и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W , так что S_1 является прямой суммой S и W . Кроме того ψ_1 – симметричен, а ψ_2 – антисимметричен.

Вейвлеты на отрезке. Построим вейвлет-базис в пространстве $H_0^1(0,1)$. Допустим $v \in V_l$ и $w_n \in W_n$ при $n \in \mathbf{N}$. Мы доказали, что $\forall n \in \mathbf{N} : \langle v', w'_n \rangle = 0, \langle w'_m, w'_n \rangle = 0, m \neq n$. Отсюда,

$$\left\| v' + \sum_{n=1}^{\infty} w'_n \right\|_{L_2(0,1)}^2 = \|v'\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|w'_n\|_{L_2(0,1)}^2 \quad (5)$$

$$\text{Пусть } \psi_{n,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{729.6}} 2^{-n/2} \psi_1\left(2^n x - \frac{j}{2}\right), \quad \text{при } j=2,4,\dots,2^{n+1}-2, \quad (6)$$

$$\psi_{n,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{153.6}} 2^{-n/2} \psi_2\left(2^n x - \frac{j-1}{2}\right), \quad \text{при } j=3,5,\dots,2^{n+1}-1,$$

$$\psi_{n,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{76.8}} 2^{-n/2} \psi_2(2^n x), \quad \psi_{n,2^{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{76.8}} 2^{-n/2} \psi_2(2^n x - 2^n),$$

$$\phi_{1,1}(x) = \sqrt{\frac{5}{24}} \phi_1(2x-1), \quad \phi_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{15}{4}} \phi_2(2x),$$

при $n \in \mathbf{N}$ и $x \in (0,1)$.

$$\phi_{1,3}(x) = \sqrt{\frac{15}{8}} \phi_2(2x-1), \quad \phi_{1,4}(x) = \sqrt{\frac{15}{4}} \phi_2(2x-2).$$

Ясно, что V_1 разлагается на $\phi_{1,j}, j=1,2,3,4$. Следовательно $H_0^1(0,1)$ разлагается на $g_j, j=1,\dots,2^{2n+1}$, где $g_j = \phi_{1,j}$, при $j=1,\dots,4$, и $g_{2^{n+1}+j} = \psi_{n,j}, n \in \mathbf{N}, j=1,\dots,2^{2n+1}$.

В работе [1] доказано, что $(\psi'_{n,j})_{n \in \mathbf{N}, 1 \leq j \leq 2^{n+1}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Аналогично доказывается, что $(g'_{k,j})_{k \in \mathbf{N}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Применение. В этом разделе мы используем построенные вейвлеты для решения интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u(x) + \int_0^x K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (7)$$

$$\text{с граничным условием } u(0)=u(1)=0, \quad (8)$$

где $p(x), q(x), f(x), K(x,s)$ – заданные непрерывные функции. Коэффициенты и ядро $K(x,s)$ уравнения (7) удовлетворяют условиям:

$$0 \leq p(x) \leq c_3, \quad 0 \leq q(x) \leq c_4, \quad 0 \leq K(x,s) \leq c_5, \quad x \in [0,1], \quad s \in [0,1]. \quad (9)$$

Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму, $u, v \in H_0^1(0,1)$:

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 p(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx + \int_0^1 \int_0^x K(x, s)u(s)v(x)dsdx.$$

Тогда вариационная запись (7)–(8) имеет следующий вид:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n \in V_n$, при котором

$$a(u_n, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_n. \quad (10)$$

По лемме Лакса–Милграма (см. 3:60) задача (10) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G = \{g_1, \dots, g_{2^{n+1}}\}$ как базис для V_n . С этим базисом для V_n задача (10) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a(g_j, g_k) c_k = \langle g_j, f \rangle, \quad j = 1, \dots, 2^{n+1}.$$

Число обусловленности матрицы A_n равномерно ограничено $A_n = (a(g_j, g_k))_{1 \leq j, k \leq 2^{n+1}}$. Ниже мы рассматриваем применение базисных вейвлетов G_n к двум примерам.

Пример 1. $-u'' + \cos(t) \int_0^t u(s)ds = \pi^2 \sin(\pi t) - \frac{\cos t}{\pi} (\cos(\pi t) - 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$

Точное решение $u(t) = \sin(\pi t)$,

численное решение $u_{16}(t) = 2.2g_1(t) + 0.833g_2(t) - 9.716 \times 10^{-8}g_3(t) - 0.833g_4(t) - 0.02g_5(t) - 0.036g_6(t) + 6.236 \times 10^{-7}g_7(t) + 0.02g_8(t) - 1.325 \times 10^{-3}g_9(t) - 3.819 \times 10^{-3}g_{10}(t) - 1.323 \times 10^{-3}g_{11}(t) - 5.399 \times 10^{-3}g_{12}(t) + 3.017 \times 10^{-7}g_{13}(t) - 3.818 \times 10^{-3}g_{14}(t) + 1.325 \times 10^{-3}g_{15}(t) + 1.325 \times 10^{-3}g_{16}(t);$
 $\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 2.389 \times 10^{-3}, \quad \|u(t) - u_8(t)\|_2 = 2.092 \times 10^{-4}, \quad \|u(t) - u_{16}(t)\|_2 = 1.291 \times 10^{-5},$
 $C(A_4) = 1.667; C(A_8) = 2.342, C(A_{16}) = 3.205.$

Пример 2. $-u'' + u' + \int_0^t t \cdot s \cdot u(s)ds = t^6/5 - t^5/2 + t^4/3 + 3t^2 - 10t + 5, \quad u(0) = u(1) = 0.$

Точное решение $u(t) = t^3 - 2t^2 + t$,

численное решение

$u_8(t) = 0.274g_1(t) + 0.258g_2(t) - 0.091g_3(t) + 8.235 \times 10^{-8}g_4(t) + 1.288 \times 10^{-8}g_5(t) + 4.203 \times 10^{-8}g_6(t) + 6.973 \times 10^{-8}g_7(t) + 1.433 \times 10^{-10}g_8(t);$
 $\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 1.817 \times 10^{-8}, \quad \|u(t) - u_8(t)\|_2 = 1.874 \times 10^{-8}, \quad \|u(t) - u_{16}(t)\|_2 = 3.189 \times 10^{-8}$
 $C(A_4) = 1.684; C(A_8) = 2.338, C(A_{16}) = 3.202,$

где $\|u(t) - u_n(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (u(t) - u_n(t))^2 dt}$ — норма разностей, $C(A_n)$ — число обусловленности матрицы A_n .

Литература

1. Турсунов Д.А., Губская М.М. Построение новых типов эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов // Молодежная науч. конф., 9–13 окт. 2009 г. — Томск, 2009. — С. 10–15.
2. Dahmen W., Han R.Q. Jia and Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines // Constr. Approx. 16 (2000). — P. 221–259.
3. Brenner S.C., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. — Springer, New York, 1994.