

## О СУПЕРПОЛНЫХ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А.А. Чекеев, Т.Д. Касимова

Посредством распространения понятий и утверждений, касающихся пространств, на их отображения введены суперполные равномерно непрерывные отображения и исследованы их некоторые свойства. Найдена категорная характеристика суперполных равномерно непрерывных отображений.

*Ключевые слова:* устойчивый фильтр; категория; А-замкнутость.

В 1983 г. на семинаре по топологии (Карловский университет, г. Прага) З. Фролик поставил задачу: *Охарактеризовать компактные и полные пространства.*

В 2007 г. академик А.А. Борубаев решил поставленную задачу и дал категорную характеристику компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп [1].

Поскольку пространство можно рассматривать как частный случай отображения, отождествляя его с отображением в точку, возникает идея распространения на отображения понятий и утверждений, имеющих для пространств, что позволяет обобщить многие результаты.

Нами предпринята попытка охарактеризовать равномерно непрерывные отображения посредством пространств замкнутых подмножеств в терминах категорий.

Пусть  $(X, \mathcal{U})$  – равномерное пространство,  $(\text{exr } X, \text{exr } \mathcal{U})$  – пространство замкнутых подмножеств с Хаусдорфовой равномерностью.

**Определение 1** ([1]). Равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  называется *суперполным*, если его гиперпространство  $(\text{exr } X, \text{exr } \mathcal{U})$  полно.

Пусть  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  в равномерное пространство  $(Y, \mathcal{V})$ .

**Определение 2** ([1]). Фильтр  $\mathcal{F}$  в  $(X, \mathcal{U})$  называется *устойчивым (stable)*, если для любого покрытия  $\alpha \in \mathcal{U}$  найдется такое  $F' \in \mathcal{F}$  что  $F' \subset \alpha(F)$  для любого  $F \in \mathcal{F}$ .

**Предложение 1.** Всякий фильтр Коши является устойчивым.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{F}$  – произвольный фильтр Коши в  $(X, \mathcal{U})$ . Для произвольного покрытия  $\alpha \in \mathcal{U}$  найдутся  $A \in \alpha$  и фиксированное  $F_\alpha \in \mathcal{F}$  такие, что  $F_\alpha \subset A$  и  $F_\alpha \in \alpha$ . Для любого  $F \in \mathcal{F}$  имеет место  $F \cap F_\alpha \neq \emptyset$ , а это означает  $F \cap \alpha(F_\alpha) \neq \emptyset$ . Как показано выше элемент  $F_\alpha$  одновременно является элементом и фильтра  $\mathcal{F}$ , и покрытия  $\alpha$ , тогда  $F_\alpha \subset \alpha(A)$ . Следовательно,  $A \subset \alpha(F)$  и  $F_\alpha \subset \alpha(F)$  для любого  $F \in \mathcal{F}$ , а это означает устойчивость фильтра Коши  $\mathcal{F}$ . Предложение доказано.

**Предложение 2.** Равномерно непрерывный образ  $f\mathcal{F}$  всякого устойчивого фильтра  $\mathcal{F}$  в  $(X, \mathcal{U})$  является базой некоторого устойчивого фильтра в  $(Y, \mathcal{V})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{F}$  – устойчивый фильтр Коши в  $(X, \mathcal{U})$  и  $f\mathcal{F} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ . Пусть  $\hat{\mathcal{O}}$  – фильтр, порожденный равномерно непрерывным образом  $f\mathcal{F}$  в  $(Y, \mathcal{V})$ , т.е.  $\hat{\mathcal{O}} = \{\Phi \subset Y : \exists F \in \mathcal{F} \text{ такое, что } f(F) \subset \Phi\}$ , так что для любого покрытия  $\alpha \in \mathcal{V}$  найдется множество

$\Phi' \in \hat{\mathcal{O}}$  такое, что  $\Phi' \subset \alpha(\Phi)$  для любого элемента  $\Phi \in \hat{\mathcal{O}}$ . В силу равномерной непрерывности отображения  $f$  и устойчивости фильтра  $\mathcal{F}$  для любого покрытия  $\beta \in \mathcal{U}$  найдется такой элемент  $F' \in \mathcal{F}$ , что  $F' \subset \beta(F)$  для любого множества  $F \in \mathcal{F}$  существует такое покрытие  $\alpha \in \mathcal{V}$ , что  $f\beta \succ \alpha$ , следовательно, выполняется  $f(F') \subset f(\beta(F)) = f(\beta)(f(F)) \subset \alpha(f(F)) \subset \alpha(\Phi)$ . Положим, что  $\Phi' = f(F')$ , тогда  $\Phi' \in \varphi$ , а это означает, по определению 2, что  $\hat{\mathcal{O}}$  – устойчивый фильтр в  $Y$ .

Итак, равномерно непрерывный, образ  $f\mathcal{F}$  устойчивого фильтра  $\mathcal{F}$  Коши является базой некоторого устойчивого фильтра  $\hat{\mathcal{O}}$  Коши в равномерном пространстве  $(Y, \mathcal{V})$ . Предложение доказано.

**Определение 3.** Равномерно непрерывное отображение  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  называется *суперполным*, если для всякого устойчивого (stable) фильтра  $\mathcal{F}$  в  $(X, \mathcal{U})$ , для которого  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$  следует, что  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ .

**Предложение 3.** Всякое суперполное отображение является полным.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{F}$  – произвольный фильтр Коши в  $(X, \mathcal{U})$  такой, что  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ . В силу предложения 1, фильтр Коши  $\mathcal{F}$  является устойчивым. В силу предложения 2, его равномерно непрерывный образ  $f\mathcal{F}$  является базой устойчивого фильтра. Из условия  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in \mathcal{F} \} = \{y\}$  для любого  $y \in Y$ , тогда в силу суперполноты отображения  $f$  имеем  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ , т.е. фильтр  $\mathcal{F}$  является сходящимся. Следовательно, равномерно непрерывное отображение  $f$  является полным. Предложение доказано.

**Предложение 4.** Всякое замкнутое подпространство суперполного пространства является полным.

**Доказательство.** Пусть  $(X, \mathcal{U})$  – суперполное равномерное пространство и  $A \subset X$ , тогда  $(A, \mathcal{U}_A)$  – его замкнутое подпространство. Всякий устойчивый фильтр Коши  $\mathcal{F}$  в  $A$  является базой и некоторого устойчивого фильтра Коши в  $X$  (предложение 2) и, значит, сходится к некоторой точке  $x \in X$ . Но так как  $A$  замкнуто, то  $x \in A$ , следовательно, устойчивый фильтр Коши  $\mathcal{F}$  сходится в  $A$ , т.е.  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in \mathcal{F} \} = \{x\} \neq \emptyset$ .

**Предложение 5.** Пусть  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  – равномерно непрерывное суперполное отображение равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  на равномерное пространство  $(Y, \mathcal{V})$ . Тогда  $(f^{-1}(y), \mathcal{U}|_{f^{-1}(y)})$  является суперполным для всякой точки  $y \in Y$ .

**Доказательство.** Пусть  $y \in Y$  – произвольная точка и  $\mathcal{U}|_{f^{-1}(y)}$  – равномерность, индуцированная  $f^{-1}(y)$  равномерностью  $\mathcal{U}$ . Пусть  $\mathcal{F}$  – произвольный устойчивый фильтр Коши в  $(f^{-1}(y), \mathcal{U}|_{f^{-1}(y)})$ , т.е. для любого множества  $B \in \mathcal{F}$  найдется  $A_\beta \in \mathcal{F}$  такое, что  $B \subset \alpha(A_\beta)$ . В силу суперполноты отображения  $f$  следы всех замыканий имеют непустое пересечение, имеем  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in \mathcal{F} \} = \{y\} \neq \emptyset$ , т.е.  $f\mathcal{F}$  гиперсходится к  $y \in Y$ . Тогда  $F_a \cap \alpha(A_\beta) \neq \emptyset$ , т.е.  $\mathcal{F}$  является устойчивым фильтром Коши в  $(X, \mathcal{U})$  и, в силу суперполноты отображения  $f$ ,  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ , т.е.

устойчивый фильтр Коши  $\mathcal{F}$  сходится в  $(f^{-1}(y), \mathcal{U}|_{f^{-1}(y)})$ , а это означает, что  $(f^{-1}(y), \mathcal{U}|_{f^{-1}(y)})$  является суперполным для всякой точки  $y \in Y$ . Что и требовалось доказать.

**Определение 4** ([3]). Пусть  $\mathcal{K}$  – произвольная категория,  $\mathcal{A}$  – некоторый класс морфизмов категории  $\mathcal{K}$ . Объект  $X$  категории  $\mathcal{K}$  называется  $\mathcal{A}$ -замкнутым, если каждый морфизм  $f: X \rightarrow Y$  для произвольного объекта  $Y$ , принадлежит классу  $\mathcal{A}$ .

По аналогии с работой [3] дадим характеристику суперполных равномерно непрерывных отображений в терминах категорий.

**Теорема 1.** Пусть  $Unif$  – категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, а  $\mathcal{A}$  – класс равномерно непрерывных суперполных отображений. Для того чтобы равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  было суперполным, необходимо и достаточно, чтобы объект  $(X, \mathcal{U})$  категории  $Unif$  был  $\mathcal{A}$ -замкнутым.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $(X, \mathcal{U})$  – суперполное равномерное пространство, а равномерно непрерывное отображение  $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  в произвольное равномерное пространство  $(Y, \mathcal{V})$ . Покажем, что отображения  $f$  суперполно. Пусть  $\mathcal{F}$  – произвольный устойчивый фильтр Коши в  $(X, \mathcal{U})$ . В силу полноты равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$ , устойчивый фильтр Коши  $\mathcal{F}$  гиперсходится в  $(X, \mathcal{U})$  независимо от того, что его образ  $f\mathcal{F}$  гиперсходится в  $(Y, \mathcal{V})$  или нет. Значит,  $f$  – суперполное отображение, а объект  $(X, \mathcal{U})$  является  $\mathcal{A}$ -замкнутым.

**Достаточность.** Пусть  $(X, \mathcal{U})$  категории  $\mathcal{K}$  является  $\mathcal{A}$ -замкнутым, т.е. каждое равномерно непрерывное отображение  $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  в произвольное равномерное пространство  $(Y, \mathcal{V})$  является суперполным отображением. Покажем, что равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  суперполно. Пусть  $\mathcal{F}$  – произвольный устойчивый фильтр Коши в  $(X, \mathcal{U})$ . Так как  $(Y, \mathcal{V})$  – произвольное равномерное пространство, то его будем считать одноточечным. Тогда  $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  – постоянное отображение и образ  $f\mathcal{F}$  фильтра Коши гиперсходится в  $(Y, \mathcal{V})$ . Тогда, в силу определения суперполноты отображения  $f$ , равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  является суперполным. Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 1 непосредственно влечет равномерный аналог теоремы Исбелла [1] о равномерно паракомпактных пространствах с максимальной равномерностью  $\mathcal{U}_X$ .

**Следствие** ([1]). Пусть  $Unif$  – категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, а  $\mathcal{A}$  – класс равномерно непрерывных суперполных отображений. Для того чтобы равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  было равномерно паракомпактным и  $\lambda\mathcal{U} = \mathcal{U}_X$ , необходимо и достаточно, чтобы объект  $(X, \mathcal{U})$  категории  $Unif$  был  $\mathcal{A}$ -замкнутым.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$  равномерно паракомпактно, тогда его топологическое пространство  $(X, \tau_{\mathcal{U}})$  паракомпактно, и наоборот, если  $(X, \tau)$  – паракомпакт, тогда  $(X, \mathcal{U}_\tau)$  равномерно паракомпактно, где  $\mathcal{U}_\tau$  – максимальная равномерность на  $X$ , порождающая топологию  $\tau$  [2]. Далее, для равномерно паракомпактного пространства  $(X, \mathcal{U})$  индекс полноты  $ic(U) \leq \aleph_0$  и  $(X, \mathcal{U})$  является полным [2]. Всякое суперполное пространство  $(X, \mathcal{U})$  является полным, обратное, вообще говоря, неверно. В силу теоремы 1,  $f$  – суперполное отображение, а объект  $(X, \mathcal{U})$  является  $\mathcal{A}$ -замкнутым.

**Достаточность.** Пусть  $(X, \mathcal{U})$  – объект категории *Unif* является  $\mathcal{A}$ -замкнутым, т.е. каждое равномерно непрерывное отображение  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  равномерного пространства  $(X, \mathcal{U})$  в произвольное равномерное пространство  $(Y, \mathcal{V})$  является суперполным отображением. Покажем, что равномерное пространство  $(X, \mathcal{U})$ , где  $\mathcal{U}_X$  – максимальная равномерность на  $X$ , порождающая топологию  $\tau$ , равномерно паракомпактна. Пусть  $\mathcal{F}$  – произвольный устойчивый фильтр Коши в  $(X, \mathcal{U})$ . Так как  $(Y, \mathcal{V})$  – произвольное равномерное пространство, то его будем считать одноточечным. Тогда  $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  – постоянное отображение и образ  $f\mathcal{F}$  фильтра Коши гиперсходится в  $(Y, \mathcal{V})$ . Тогда, в силу определения суперполноты отображения  $f$ , по теореме 1 и предложению 5,  $\mathcal{A}$ -замкнутый объект  $(X, \mathcal{U})$  категории *Unif* является равномерно паракомпактным пространством. Что и требовалось доказать.

### **Литература**

1. *Борубаев А.А.* Категорная характеристика компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп // Изв. НАН КР. – 2007. – №4. – С. 3–7.
2. *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
3. *Isbell J.R.* Uniform spaces. – Providence, 1964.