УДК 515.12 (575.2) (04)

НЕКОТОРЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И СЛАБОНОРМАЛЬНЫЙ ФУНКТОР

Р.Б. Бешимов, Р.М. Жураев

В работе доказывается, что если ковариантный функтор $F: Comp \to Comp$ слабонормален и $\phi(F(n)) \le \phi(X)$, то для любого бесконечного тихоновского пространства X имеют место неравенства $\phi\left(F_n^{\beta}(X)\right) \le \varphi(X)$, $\phi\left(F_{\varpi}^{\beta}(X)\right) \le \varphi(X)$, $\phi\left(F^{\beta}(X)\right) \le \varphi(X)$, где $\phi = \{k, pk, n\pi w\}$.

Ключевые слова: слабонормальный функтор; калибр; число Шанина; π-сеть.

На Пражском топологическом симпозиуме 1981 г. В.В. Федорчук [1] поставил следующие общие проблемы в теории ковариантных функторов, определившие новое направление исследований в области топологии:

Как ведут себя те или иные геометрические свойства пространств при воздействии на них различными ковариантными функторами?

Ковариантный функтор $F: Comp \to Comp$ называется нормальным, если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен и эпиморфен и переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое множество – в пустое [2].

Ковариантный функтор $F: Comp \to Comp$ называется слабонормальным, если он удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов [3].

В работе [4] А.Ч. Чигогидзе доказал, что если нормальный функтор $F: Comp \to Comp$, где $Comp$ – категории всех бикомпактов и их непрерывных отображений, то его можно продолжить до ковариантного функтора $F^{\beta}: Tych \to Tych$, где $Tych$ – категории всех тихоновских пространств и их непрерывных отображений, с сохранением нормальности, естественно, уже в соответствующем для $Tych$ смысле. Такое продолжение существует и оно единственно.

Функтор $F^{\beta}:Tych \to Tych$ будем называть нормальным [4], если он непрерывен, сохраняет вес, вложения, пересечения, прообразы, точку, пустое множество и *k*-накрывающие отображения переводит в сюръекции.

С определениями калибра, прекалибра, числа Шанина, числа предшанина и π-сети можно ознокомиться в работах [5; 6]. Нам потребуются следующие результаты.

Теорема 1 [6]. Если регулярный кардинал τ является прекалибром (калибром) пространства X для каждого $\alpha \in A$, то τ является и прекалибром (калибром) их произведения $X = \prod\{X_{\alpha} : \alpha \in A\}$.

Утверждение 1 [6]. Пусть *X* – всюду плотное подпространство пространства *Y*. Тогда $pk(X) = pk(Y)$ и $k(X) \geq k(Y)$.

Утверждение 2 [6]. Пусть $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ и $k(X_i) = \tau$ ($pk(X_i) = \tau$) для каждого множества X_i и любого $i \in N$. Тогда $k(X) \leq \tau$ ($pk(X) \leq \tau$).

Теорема 2 [6]. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение “на”. Тогда $k(X) \geq k(Y)$ ($pk(X) \geq pk(Y)$).

Утверждение 3. Если π-сеть пространства X_{α} имеет $\tau \geq \aleph_0$ для каждого $\alpha \in A$, $|A| \leq \tau$ то π-сеть произведения $X = \prod\{X_{\alpha} : \alpha \in A\}$ не превосходит *τ*.

Доказательство. Пусть семейство $\mu_{\alpha} = \left\{E_{\alpha}^{s} : s \in B\right\}$ есть π-сеть пространства X_{α} для каждого $\alpha \in A$. Рассмотрим всевозможные конечные произведение $\nu = \left\{E_{\alpha_1}^{s_1} \times E_{\alpha_2}^{s_2} \times \ldots \times E_{\alpha_n}^{s_n} : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A_i, s_1, s_2, \ldots, s_n \in B\right\}$. Ясно, что мощность системы ν есть $\leq \tau$. Покажем, что система ν есть π-сеть пространства *X*. Пусть *U* – произвольное непустое открытое множество в пространстве *X*. Тогда существуют непустые открытые множества $U_1, U_2, \ldots, U_n$ пространства $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}$ такие, что $U_1 \times U_2 \times \ldots U_n \subset U$. Если система $\mu_i = \left\{E_{\alpha_i}^{s_i} : \alpha_i \in A, s_i \in B\right\}$ есть π-сеть пространства X_i, то существуют элементы $E_{\alpha_1}^{s_1} \in \mu_1, E_{\alpha_2}^{s_2} \in \mu_2, \ldots, E_{\alpha_n}^{s_n} \in \mu_n$ такие, что $E_{\alpha_i}^{s_i} \subset U_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $E_{\alpha_1}^{s_1} \times E_{\alpha_2}^{s_2} \times \ldots \times E_{\alpha_n}^{s_n} \subset U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \subset U$. Значит, система ν есть π-сеть пространства *X*. Утверждение 3 доказано.

Следствие 1. Если π-сеть пространства *X* имеет $\tau \geq \aleph_0$, то π-сеть произведения X^n не превосходит τ, т.е. $n\pi w\left(X^n\right) \leq \tau$.

Утверждение 4. Пусть *Y* – всюду плотное подпространство пространства *X*. Тогда $n\pi w(Y) \geq n\pi w(X)$.

Доказательство. Пусть $\mu = \{E_{\alpha} : \alpha \in A\}$, $|A| = \tau$ есть π-сеть пространства *Y*. Покажем, что система $\mu = \{E_{\alpha} : \alpha \in A\}$, $|A| = \tau$ есть π-сеть пространства *X*. Пусть *U* – произвольное непустое открытое множество в *X*. Тогда $U \cap Y = U_1$ есть непустое открытое множество *Y* в силу всюду плотности *Y*. Если система $\mu = \{E_{\alpha} : \alpha \in A\}$ есть π-сеть пространства *Y*, то существует $E_{\alpha} \in \mu$ такое, что $E_{\alpha} \subset U_1$. Следовательно. $E_{\alpha} \subset U_1 \subset U$. Значит, система $\mu = \{E_{\alpha} : \alpha \in A\}$ есть π-сеть пространства *X*. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. Пусть $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ и π-сеть пространства $n\pi w(X_i)=\tau$ для каждого $i\in N$, где $\tau\geq\aleph_0$. Тогда π-сеть пространства *X* также не превосходит τ.

Доказательство. Пусть $\nu_i=\left\{E_{\alpha_i}:\alpha_i\in A_i,|A_i|=\tau\right\}$ есть π-сеть пространства X_i, где $\tau\geq\aleph_0$ для каждого $i\in N$. Покажем, что $\nu=\bigcup\left\{\nu_i:i\in N\right\}$ есть π-сеть пространства *X*. Ясно, что $|\nu|\leq\tau$. Пусть U – произвольное непустое открытое множество в *X*. Тогда существует такой номер $n\in N$, что $U\cap X_n=U_n\neq\varnothing$. Если множество U_n открыто, то существует $E_{\alpha_n}\in\nu_n$ такое, что $E_{\alpha_n}\subset U_n$ в силу π-сеть системы ν_n. Отсюда имеем, что $E_{\alpha_n}\subset U_n\subset U$. Значит система $\nu=\bigcup\left\{\nu_i:i\in N\right\}$ есть π-сеть пространства *X*. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение “на”. Тогда $n\pi w(X)\geq n\pi w(Y)$.

Доказательство. Пусть $\nu=\left\{E_\alpha:\alpha\in A,|A|=\tau\right\}$ – π-сеть пространства *X*, где $|A|=\tau$. Покажем, что $\nu_1=\left\{f(E_\alpha):\alpha\in A,|A|=\tau\right\}$ есть π-сеть пространства *Y*. Пусть U – произвольное непустое открытое множество в *Y*. В силу непрерывности отображения *f* имеем, что множество $f^{-1}(U)$ есть открытое множество в *X*. Если система ν есть π-сеть пространства *X*, то существует $E_\alpha\in\nu$ такое, что $E_\alpha\subset f^{-1}(U)$. Тогда $f(E_\alpha)\subset U$, где $f(E_\alpha)\in\nu_1$. Значит, система ν_1 есть π-сеть пространства *Y*. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7 [8]. Пусть ковариантный функтор $F:Comp\to Comp$ слабо нормален. Тогда $F_\varpi(X)$ является всюду плотным подпространством пространства $F(X)$.

Лемма 1 [8]. Пусть ковариантный функтор $F:Comp\to Comp$ слабо нормален. Пусть *Y* – бикомпакт и тихоновское пространство *X* всюду плотно в *Y*. Тогда $F_n(X)$ всюду плотно в $F_n(Y)$, где $F_n(X)=\pi_{n,\beta X}\left(X^n\times F(n)\right)$ (см. [9]).

Теорема 3. Пусть ковариантный функтор $F:Comp\to Comp$ слабо нормален. Если тихоновские пространства *X* и $F(n)$ удовлетворяет неравенство $\phi\left(F(n)\right)\leq\phi(X)$, $n\in N$, тогда

1) $\varphi\left(F_n^\beta(X)\right)\leq\varphi(X)$; 2) $\varphi\left(F_\varpi^\beta(X)\right)\leq\varphi(X)$; 3) $\varphi\left(F^\beta(X)\right)\leq\varphi(X)$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство 1). Аналогично доказывается для прекалибра и сетевого π-веса пространства *X*. Пусть для тихоновского пространства *X* и $F(n)$ выполняется неравенство $k\left(F(n)\right)\leq k(X)$, $n\in N$. Тогда в силу утверждения 1 для Стоун-Чеховского бикомпактного расширения βX пространства *X* имеем $k(X)\geq k(\beta X)$. В силу теоремы 1 и теоремы 2 имеем, что $k(X)\geq k\left((\beta X)^n\times F(n)\right)$ и $k\left(F_n(X)\right)\leq k(X)$. Известно, что $F_n(Z)=F_n^\beta(Z)$ для любого тихоновского пространства *Z*. Тогда $k\left(F_n^\beta(X)\right)\leq k(X)$. Этим доказано неравенство 1). Используя утверждения 1 и 2 доказываются неравенства 2), 3). Теорема 3 доказана.

Следствие 2. Пусть ковариантный функтор $F:Comp\to Comp$ – слабо нормален. Если тихоновские пространства *X* и $F(n)$ удовлетворяют неравенству $\phi\left(F(n)\right)\leq\phi(X)$, $n\in N$, тогда

1) $\phi\left(F_n^\beta(X)\right)\leq\phi(X)$; 2) $\phi\left(F_\varpi^\beta(X)\right)\leq\phi(X)$; 3) $\phi\left(F^\beta(X)\right)\leq\phi(X)$, где $\phi=\left\{sh,psh\right\}$.

Литература

1. *Федорчук В.В.* Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и *Q*-многообразия // УМН. – 1981. – Вып. 3. (36). – С. 177–195.
2. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов // УМН. – 1981. – Вып.3 (36). – С. 3–62.
3. *Radul T. N.* On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math.Univ. Carol. – 1998. – №3 (39). – P. 609–615.
4. *Чигогидзе А.Ч.* О продолжении нормальных функторов // Вестник Моск. уни-та. Сер. 1. Матем., мех. – 1984. – № 6. – С. 23–26.
5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
6. *Шанин Н.А.* О произведении топологических пространств // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. – 1948. – Т. 24. – С. 1–112.
7. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. – М.: Физматлит, 2006. – 332 с.
8. *Бешимов Р.Б.* О неувеличении плотности и слабой плотности слабонормальными функторами // Математические заметки. – 2008. – Т. 84. – Вып. 4. – С. 527–531.
9. *Жураев Т.Ф.* Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов: Дис. … канд. физ.-мат. наук.– М.: МГУ, 1989. – 90 с.