



О ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ В СРЕДЕ EXCEL УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛОСЕ, СЖАТОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

САЛИЕВ А.Б., СТАМКУЛОВА Г.К.

КГТУ им.И.Раззакова

izvestiva@ktu.aknet.kg

Рассматриваются вопросы расчета упругой деформации в среде Excel на основе использования дискретной модели [1,3]. Установлены закономерность изменения перемещений и растягивающей деформации в конечной полосе, сжатой сосредоточенными силами.

It is considered questions of calculation of elastic deformation in the environment of Excel on the basis of use of discrete model [1,3]. Установлены law of change of movings and stretching deformation in the final strip compressed by concentrated forces.

Получить решение задачи теории упругости затруднительно, когда рассматривается тела конечных размеров. Результаты могут быть получены численными методами. Принципиальными здесь является выбор той или иной расчетной схемы (шаблонов)[2]. В данной работе в качестве таких шаблонов, рассматривается шестиатомная модель молекулы, из которой состоит твердое тело[1,3]. Для численного решения задач теории упругости известны различные пакеты прикладных программ. Наиболее простым для применения являются встроенные функции офисного приложения MS Excel. Реализация таких возможностей имеет научную и практическую значимость.

Исходя из этого в данной работе рассматривается задача численного расчета балки упругой полосы (в случае плоской деформации), сжимаемой сосредоточенными симметричными силами.(Рис.1.)

Упругая балка ширины $2h$ и длины $2L$, сжимается в середине двумя поперечными сосредоточенными силами U . Требуется определить наибольшие растягивающие деформации при различных значениях силы U и установить характер ее изменения.

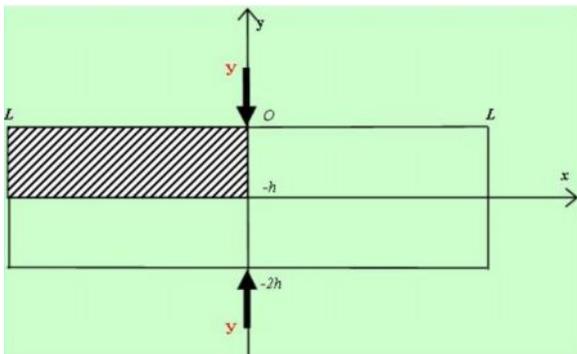


Рис. 1. Расчетная схема нагружения полосы

Учитывая симметрию, будем рассматривать далее только 1/4 часть полосы (на рис.1). В этом случае горизонтальные (U) и вертикальные (V) перемещение точек сечения $x=0$, $x=\pm\rho$, а также $x=\pm\lambda$ ($\lambda=2\rho$) подчиняются при $y \in (0;h)$ следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} U(0,y) &= 0; \\ U(+\rho,y) &= -U(-\rho,y); & U(+\lambda,y) &= -U(-\lambda,y); \\ V(+\rho,y) &= V(-\rho,y) & \text{и} & V(+\lambda,y) = V(-\lambda,y) \end{aligned} \quad (1)$$

Перемещения точек сечений $y=-h$, $y=\pm\rho$ и $y=\pm\lambda$ при $x \in (0;L)$ подчиняется условиям:

$$\begin{aligned} V(x,-h) &= 0; & V(x,-h-\rho) &= -V(x,-h+\rho); \\ V(x,-h-\lambda) &= -V(x,-h+\lambda); \\ U(x,-h-\rho) &= U(x,-h+\rho) & \text{и} \\ U(x,-h-\lambda) &= U(x,-h+\lambda) \end{aligned} \quad (2)$$

Для получения численного решения поставленной задачи упругая рассматриваемая полоса моделируется нами дискретной средой в виде совокупности “молекул”, связанных друг с другом через общие “атомы”. Отдельная молекула состоит из 6 «атомов» (рис.2).

“Атомы молекулы” упругого тела взаимодействуют друг с другом по линейному закону, причем коэффициент взаимодействия «атомов» расположенных на расстоянии λ считается равным $K_1 = \mu\lambda^2/4$, а для «атомов» расположенных на расстоянии $\lambda/\sqrt{2}$ аналогичный $K_2 = \sqrt{2} \mu\lambda^2/2$, где μ - модуль сдвига, характеризующий упругие свойства балки.

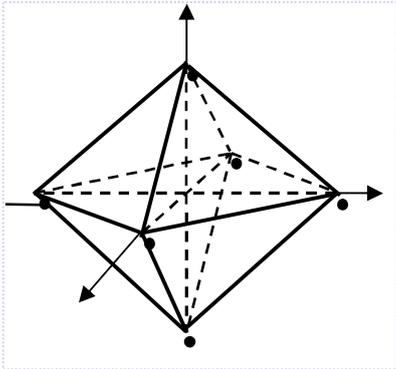


Рис. 2. 6-«атомная» модель элементарного объема упругого тела

Свойство такой модели тела (указанные коэффициенты) определялись законами центрального взаимодействия (притяжение или отталкивание) двух атомов и в соответствии с упругим поведением макро однородного, изотропного тела. При использовании такой модели рассматриваемая область полосы будет иметь вид подобный приведенному на (Рис.3)

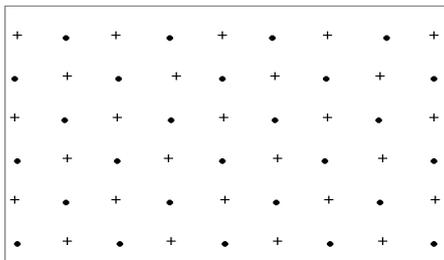


Рис. 3. Схема выделенной части полосы по дискретной модели: -«атомы» расположенные в плоскости рисунка, «+»-«атомы» в плоскостях на расстоянии $\pm \rho$ от плоскости рисунка

2. Уравнения равновесного состояния полосы в дискретной модели. Внутри тела каждый “атом” тела входит в общем случае в состав 6 “молекул” и взаимодействует с 18 “атомами”, входящих в эти “молекулы” (Рис .4). Перемещение такого атома связано с действующей на него объемной силой, а также с перемещениями окружающих его атомов. Оно должно удовлетворять условию равновесного состояния, заключающегося в балансе внешних (активных) и внутренних (реактивных) сил, зависящих от взаимного расположения атомов. Эти уравнения, записанные в проекциях на координатные оси, имеют следующий вид[1]:

$$\begin{aligned}
 X(x,y) &= -\lambda\mu/4 \{ 18U(x,y) - U(x-\lambda,y) - U(x+\lambda,y) - 4[U(x-\rho,y) + U(x+\rho,y)] - 2[U(x-\rho,y-\rho) + U(x-\rho,y+\rho) + U(x+\rho,y-\rho) + U(x+\rho,y+\rho)] + W(x-\rho,y-\rho) - W(x-\rho,y+\rho) + W(x+\rho,y+\rho) - W(x+\rho,y-\rho) \} \quad (3) \\
 Y(x,y) &= -\lambda\mu/4 \{ 18W(x,y) - W(x-\lambda,y) - W(x+\lambda,y) - 4[W(x-\rho,y) + W(x+\rho,y)] - 2[W(x-\rho,y-\rho) + W(x-\rho,y+\rho) + U(x+\rho,y) + U(x-\rho,y) + U(x-\rho,y-\rho) - U(x-\rho,y+\rho) + U(x+\rho,y+\rho) - U(x+\rho,y-\rho)] \}
 \end{aligned}$$

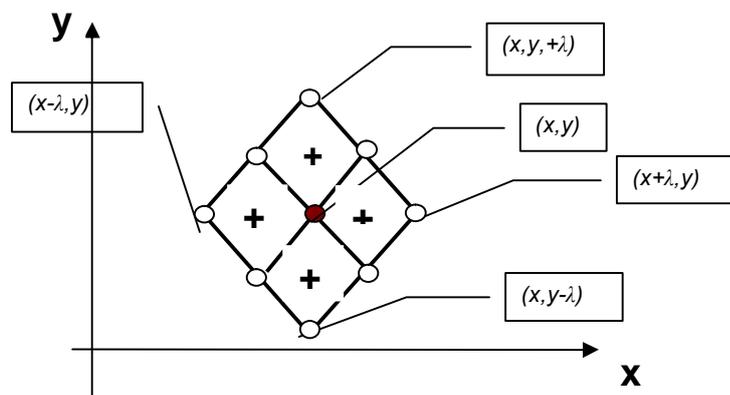


Рис. 4. Связи атома, имеющего полное окружение

Здесь (x, y) – координаты «внутреннего» «атома», $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ – проекции на оси ox и oy силы, действующую на этот атом., U, W – горизонтальная и вертикальная составляющая перемещения соответствующих атомов.

“Атомы” расположенные на поверхности тела с координатами $(x, 0)$ не имеют полного окружения молекул и они взаимодействуют только с 6 “молекулами” (Рис5), Соответствующие уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned}
 X(x, 0) &= -\lambda\mu/4 \{ 14U(x, 0) - U(x-\lambda, 0) - U(x+\lambda, 0) - 4[U(x-\rho, 0) + U(x+\rho, 0)] - 2[U(x-\rho, \rho) + U(x+\rho, -\rho) + W(x-\rho, -\rho) - W(x+\rho, -\rho)] \} \\
 Y(x, 0) &= -\lambda\mu/4 \{ 9W(x, 0) - W(x, -\lambda) - 2[W(x-\rho, \rho) + W(x+\rho, -\rho) + U(x-\rho, -\rho) - U(x+\rho, -\rho)] - 4W(x-\rho) \} \quad (4)
 \end{aligned}$$

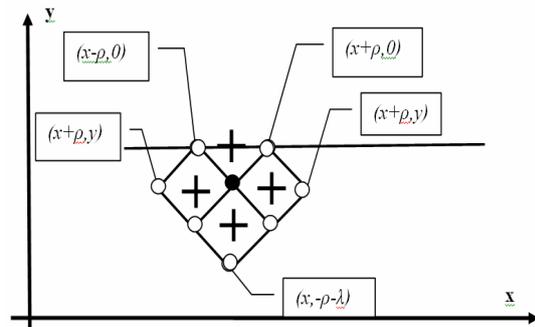
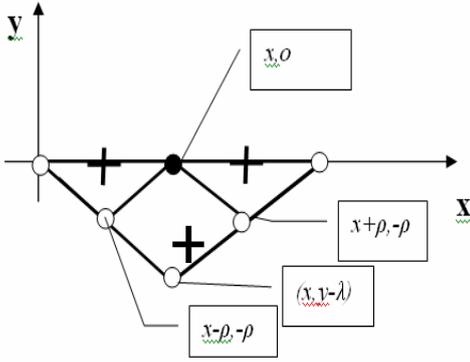


Рис. 6

Рис. 5. Взаимодействие поверхностного «атома» **Рис. 6. Взаимодействие атомов вблизи поверхности**

«Атомы» расположенные вблизи поверхности с координатами $(x, -\rho)$ также не имеют полного окружения “молекул”(для этого недостает 1 атом (см рис.6). Уравнения равновесия для них записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 X(x, y) &= -\lambda\mu/4 \{ 18U(x, y) - U(x-\lambda, y) - U(x+\lambda, y) - 4[U(x-\rho, y) + U(x+\rho, y)] - 2[U(x-\rho, y-\rho) + U(x-\rho, y+\rho) + U(x+\rho, y) + U(x-\rho, y) + W(x-\rho, y-\rho) - W(x-\rho, y+\rho) + W(x+\rho, y+\rho) - W(x+\rho, y-\rho)] \} \quad (5) \\
 Y(x, -\rho) &= -\lambda\mu/4 \{ 17W(x, -\rho) - W(x, -3\rho) - 4[W(x, \lambda) + W(x, 0)] - 2[W(x-\rho, -\lambda) + W(x-\rho, 0) + W(x+\rho, 0) + W(x+\rho, -\lambda) + U(x-\rho, -\lambda) - U(x-\rho, 0) + U(x+\rho, 0) - U(x+\rho, -\lambda)] \}
 \end{aligned}$$

Для атомов расположенных на самой (левой, боковой) границе $x = L, y \in [0, -h]$ и вблизи этой границы (на расстоянии ρ от нее) примем условие отсутствия нормальных и сдвиговых деформации, которое будет задаваться соотношениями

$$U(L, y) = U(L - \lambda, y); \quad V(L, y) = V(L - \lambda, y)$$

Аналогично, для атомов, расположенных в приповерхностном слое ($x = L - \rho, y \in [0, -h]$) Такие же условия записываем в виде:

$$U(L - \rho, y) = U(L - 3\rho, y), \quad V(L - \rho, y) = V(L - \rho, y).$$

Решение данной системы уравнений можно получить без особых затруднений, используя возможности современных ИТ, в частности офисное приложение Excel. При численном решении задачи были рассмотрены 2 случая:

- 1) $L = 50\lambda, h = 20\lambda,$
- 2) $L = 25\lambda, h = 11\lambda,$

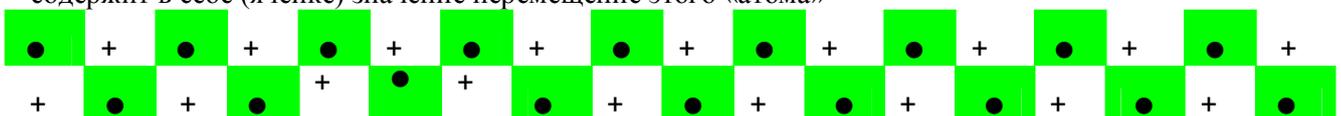
при этом “атомам” «•», расположенным в плоскости рисунка здесь мы сопоставляем ячейки на листе Excel, окрашенные зеленым цветом



а “атомам” «+», расположенным в плоскостях на расстоянии $\pm \rho$ от плоскости рисунка – не закрашенные (белые) ячейки



Рассматриваемая части полосы в этом приложении можно моделировать тогда совокупностью ячеек (см.рис.3). Каждая ячейка представляет собой определенный «атом» и содержит в себе (ячейке) значение перемещение этого «атома»



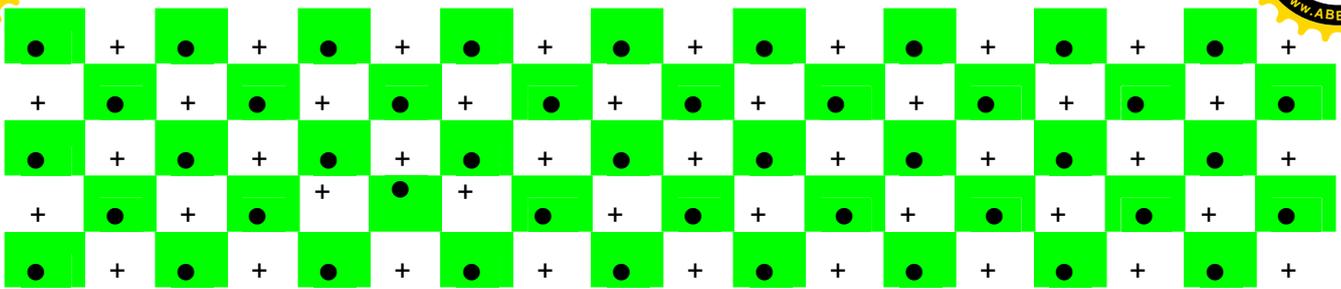


Рис.7. Расчетная схема в приложении Excel

В каждой ячейке можно вычислять только одну функцию, потому для разделения двух компонент -вертикального(V) и горизонтального (U)- использованы два Листа приложения Excel: на первом Листе вычислялись перемещения U , а на втором Листе - перемещения V . При этом в каждую ячейку вводятся соответствующие формулы из (3),(4),(5) и соответствующих граничных условий.

Вычисления перемещений «атомов» проведены применением функция автоматического решения системы уравнений данного приложения, использующий итерационный метод.

Для этого, после занесения в каждую ячейку соответствующую формулу, в какой то свободной ячейке на (- например H25) задается значение силы y . После чего нажатие на клавишу F9 дает команду на начало вычислительного процесса. Полученные результаты (числовые значение перемещений) отображаются в каждой ячейке (Рис.8).

Эти результаты могут быть изображены автоматически в виде диаграмм (Например - Рис 7,8,9,10,11,)

Анализ полученных результатов показал, что на расстояниях $x > 5 \div 6 \lambda$ равно как и при $y < (5 \div 6) \lambda$ перемещения атомов значительно малы и практически их можно не учитывать, поэтому в качестве базовой модели нами была выбрана полоса с размерами $L=12, h=8$.



Рис. 8. Вид ячеек после реализации вычислительной процедуры

Вычисления проведены при величинах заданной силы $4V/\mu l = 1, 5, 10, 20, 30, 50$. Отдельные результаты изображенные на рисунках (9,10).

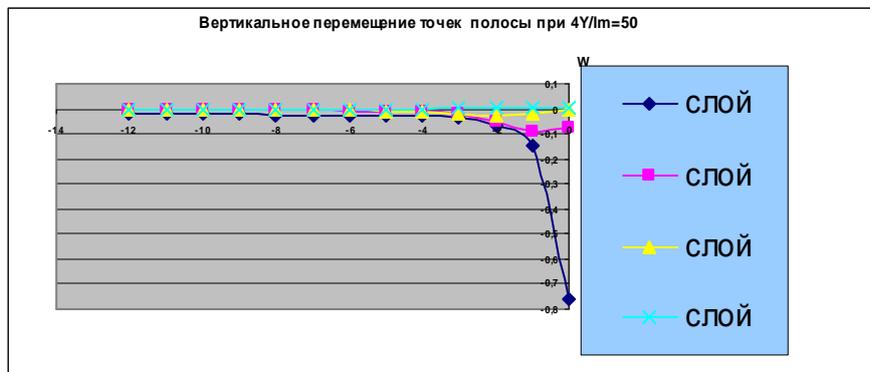
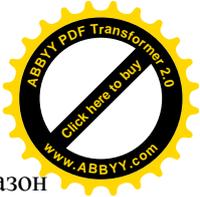
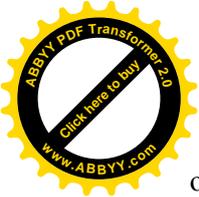


Рис. 9. Диаграммы вертикальных перемещений

Здесь ряд 1- (●—●) изображает перемещение поверхностных атомов, ряд 2 - () - перемещение атомов в сечении $x = -\lambda$, ряд 3-()-перемещение атомов в сечении $y = -3\rho$, Ряд 4 -()- перемещение атомов в сечении -3λ Как видим из диаграмм наибольшие перемещения испытывают «атомы» расположенные на поверхности балки. На больших расстояниях от точки приложения сил эти перемещения незначительны и для облегчения решения задачи мы выбрали



область размером $x \in (0, -8)$; $y \in (0, -8)$. В этой области мы видим практически весь диапазон изменений перемещений атомов.

При всех значениях силы Y картина изменения вертикальных перемещений атомов идентичны, то есть - линии подобны, наибольшие перемещение атомов происходит в области воздействия приложенной силы.

Такая же картина наблюдается и для горизонтальных перемещений атомов, расположенных по вертикальным сечениям (Рис.10):

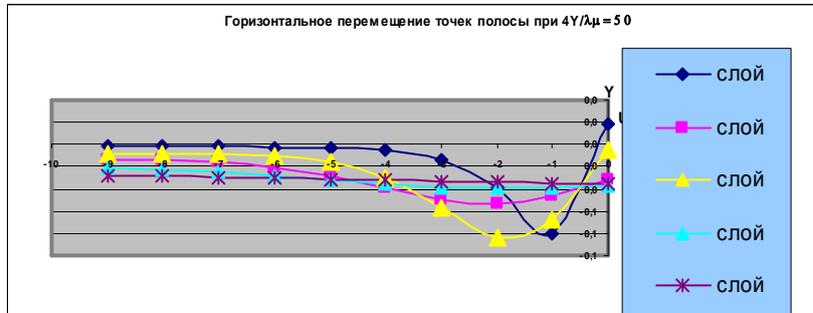


Рис. 10. Диаграммы горизонтальных перемещений

Здесь слой 1- (●●) изображает перемещение атомов ив сечении $x = 0$, слой 2- () – перемещение атомов в сечении $x = -\lambda$, слой

3- (◆◆)-перемещение атомов в сечении $x = -2\lambda$, слой 4 - ()- перемещение атомов в сечении $x = -7\rho$.

На этом рисунке (рис.10.) видно, что наибольшие горизонтальные перемещения испытывают атомы, расположенные в сечении $x=0$ на расстоянии $y = -(1 \div 2) \rho$.

При разных значениях приложенная картина изменения горизонтальных перемещений также идентичны, изменяются только их значения.

По известным же компонентам легко вычисляются деформации $\epsilon_x = 1/\lambda * [U(x+ \rho,y)- U(x- \rho,y)]$ и $\epsilon_y = 1/\lambda * [V(y+ \rho,x)- V(y- \rho,x)]$

Характер их изменения в сечениях полосы представлены на рис.12 и 11.

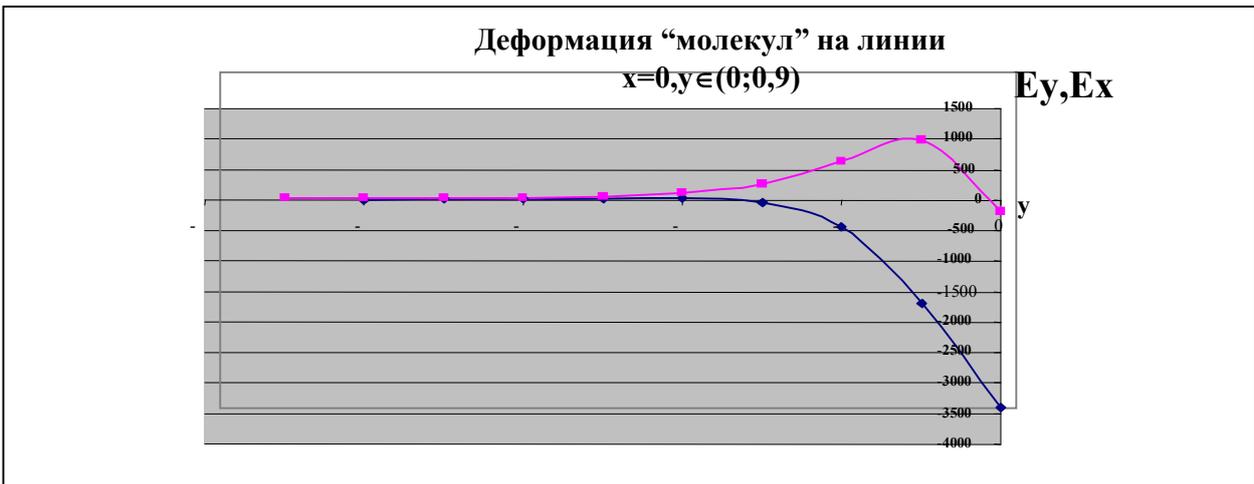


Рис. 11. Диаграмма распределения деформаций $\epsilon_x \epsilon_y$ вдоль вертикальной оси симметрии балки





Рис. 12. Диаграмма распределения деформаций $\epsilon_x \epsilon_y$ вдоль горизонтальной оси симметрии балки

При каждом значении силы наибольшую растягивающую деформацию испытывает “молекула” расположенная под точкой приложения силы $У$.

Характер изменения при изменении приложенной силы представлены на рис.13 и табл.1.



$У$	ϵ_x
1	1,582
0,5	0,791
0,1	0,158
0,05	0,079
0,01	0,015

Рис. 13. Диаграмма изменения деформации $\max \epsilon_x$ от приложенной силы



Из диаграммы можно найти, что, значение $\varepsilon_x = 0,01$ в частности достигается при силе $U = 0,015$. Как видно данная диаграмма линейна. Для линейной аппроксимации данной зависимости средства Excel -после пересчета, с учетом числовых данных параметров модели и значений силы U - дают зависимость

$\varepsilon_x = 63,4 U/\mu\lambda (- 0,003)$, в которой свободную часть (...) следует рассматривать как погрешности (итерационных) расчетов перемещений/деформаций и их аппроксимации при малых значениях сил U .

Литература

1. Леонов М.Я. Механика деформации и разрушения. –Фрунзе: Илим, 1981.-280 с.
2. Калиткин Н.Н «Численные методы» Н.Наука 1978
3. Салиев.А.Б. Автореферат Диссертации «Развитие и применение структурных представления в механике материалов». На соискание ученой степени доктора физ.мат. наук 1996