



ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОДНОРОДНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С ТЕКТОНИЧЕСКИМИ ТРЕЩИНАМИ.

РАМАТОВ К.С.
КГТУ им. И.Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

В данной работе предложен метод граничных элементов (МГЭ), который применяется не просто как один из способов решения традиционных задач горной геомеханики. В статье излагаются результаты построения гранично-элементных моделей (ГЭ моделей) расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) породных массивов с учетом некоторых основных их особенностей геологического строения.

Массив горных пород является сложной физической средой, обладающей целым рядом специфических особенностей, которые в значительной степени определяют его механическое состояние. Одной из основных причин, порождающими указанные особенности, является трещиноватость массива (естественная и искусственная). Это приводит к тому, что в самом общем случае массив горных пород является физически дискретной, неоднородной, анизотропной средой, механические процессы деформирования которой носят нелинейный, временной характер.

Очевидно, что математическое описание (как, впрочем, и физическое воспроизводство) подобной среды является крайне сложным, а решение конкретных задач обычными аналитическими методами становится практически невозможным из-за непреодолимых математических трудностей. Это обстоятельство вынуждает при исследовании механических процессов в массиве горных пород аналитическими методами, основанными на общих положениях механики, в качестве объекта исследований рассматривать не собственно породный массив, а некоторое его идеализированное отображение, и применительно к нему использовать модель численных подходов, применяемых для расчета НДС породного массива и вмещающих пород.

Предложить и обосновать применение модели реализации геомеханических задач на основе численного метода определения НДС массива горных пород.

В качестве метода исследования применяется один из широко известных численных методов решения задач механики деформируемого твердого тела – метод граничных элементов (МГЭ).

Рассмотрим однородный и изотропный породный массив, содержащий тектонические нарушения [1]. Применение прямого элемента граничных элементов (ПМГЭ) к такой среде не оптимально с точки зрения вычислительного процесса. Более эффективным оказывается применение специальных форм граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющих использовать ту особенность контактных задач, что усилия на соприкасающихся границах остаются непрерывными и зависят только от линейных комбинаций предельных значений разрыва смещений. Это почти вдвое снижает число неизвестных и существенно упрощает расчеты.

Рассмотрим находящуюся в условиях плоской деформации однородную изотропную упругую среду, содержащую произвольную трещину c и выработку произвольной формы поперечного сечения (рис.1).

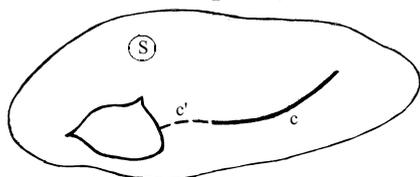


Рис. 1. Трещина вблизи выработки

Сделаем мысленный разрез $\tilde{\Gamma}'$, соединяющий трещину c с контуром выработки Γ . Тогда границу неограниченного массива можно представить состоящей из контура Γ и поверхностей c'^+, c'^- и c^+, c^- , где знаками "+" и "-" обозначены разные берега трещины c' и c соответственно. ГИУ для такого массива имеет вид [1]



$$c_{ij} u_j(\xi) = \int_s [U_{ij}(x, \xi) p_j(x) - P_{ij}(x, \xi) u_j(x)] ds + \int_{c^+} P_{ij}(x, \xi) \Delta u_j(x) dc. \quad (1)$$

Здесь $u_j(x)$ и $p_j(x)$ - компоненты векторов перемещения и нагрузки соответственно; ξ - точка приложения нагрузки, x - точка поля; $\Delta u_j = u_j^+ - u_j^-$ - разность смещений площадок, расположенных на разных берегах трещины; второй интеграл вычисляется только по положительному берегу трещины; интеграл по разрезу \tilde{n}' пропадает, т.к. на разрезе выполняются условия совместности деформаций, т. е. $p_j^+ = -p_j^-$ и $u_j^+ = u_j^-$; Тензоры U_{ij} и P_{ij} являются фундаментальными сингулярными решениями теории упругости, и для однородной изотропной среды имеем

$$U_{ij} = c_1 (c_2 \delta_{ij} \ln r - r_{,i} r_{,j}),$$

$$P_{ij} = \frac{c_3}{r} [c_4 (n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) + (c_4 \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}) r_{,s} n_s]$$

где $c_1 = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$, $c_2 = (3-4\nu)$, $c_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}$, $c_4 = 1-2\nu$.

В случае гладкого контура $\tilde{n}_{ij} = 0,5\delta_{ij}$. Соотношения (1) не дают замкнутой системы уравнений, так как на поверхности c неизвестными являются разрывы смещений Δu_j . Построим дополнительное ГИУ, для чего из (1) найдем нагрузки, действующие на поверхности. Для этого, продифференцировав (1) с помощью закона Гука, найдем напряжения в теле. Поскольку дифференцирование проводится по координате ξ , а функции u_j и p_j зависят только от x , то, меняя местами операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$\sigma_{kj}(\xi) = \int_s [T_{ijk}(x, \xi) p_i(x) - E_{ijk}(x, \xi) u_i(x)] ds + \int_{c^+} E_{ijk}(x, \xi) \Delta u_i(x) dc. \quad (2)$$

Для получения явного выражения тензоров T_{ijk} и E_{ijk} необходимо продифференцировать тензоры U_{ij} и P_{ij} по координате ξ . Учитывая, что $r_{,i} = -r^{,i}$, $r_{,i}^{,k} = \frac{1}{r} (r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik})$, где запятой внизу обозначена производная по x_i , а сверху - по ξ_i , после несложных преобразований находим

$$T_{ijk} = -\frac{2\mu c_1}{r} [(1-2\nu)(\delta_{ij} r_{,k} - \delta_{ik} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,i}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}]$$

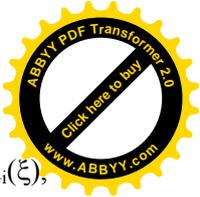
$$E_{ijk} = \frac{c_6}{r^2} \left\{ 2[\nu(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) + c_4 r_{,i} \delta_{jk} - r_{,i} r_{,j} r_{,k}] r_{,s} n_s + (2c_4 r_{,j} r_{,k} - c_5 \delta_{jk}) n_i + \right. \\ \left. + (2\nu r_{,i} r_{,j} + c_4 \delta_{ij}) n_k + (2\nu r_{,i} r_{,k} + c_4 \delta_{ik}) n_j \right\}$$

где $c_5 = 1-4\nu, c_6 = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}$.

Уравнение (2) дает напряжения внутри тела.

Устремляя сингулярную точку ξ к поверхности c и используя связь поверхностной нагрузки c напряжениями $p_i = \sigma_{ij} n_j$, будем иметь $p_j^+ = n_k^+ \left[\int_s (T_{ijk} p_i - E_{ijk} u_i) ds + \int_{c^+} E_{ijk} \Delta u_i dc \right]$.

Это дает дополнительные соотношения для получения полностью замкнутой системы уравнений. Применяя далее обычную процедуру дискретизации поверхности тела граничными элементами, внутри которых перемещения u_i и нагрузки p_i выражаются через их значения в узловых точках u_i^α и p_i^α с помощью функций формы, граничные интегральные уравнения можно свести к системе алгебраических уравнений. При прямом вычислении интегралов в уравнении (2) от функции E_{ijk} , имеющей сингулярность $1/r^2$, возникают математические трудности, так как интегралы с такой особенностью являются расходящимися [2]. Выделим ε -окрестность вблизи точки сингулярности и разобьем интеграл от функции E_{ijk} на два интеграла - вне ε -окрестности и внутри нее: $\int_c E_{ijk} \Delta u_i dc = \int_{c-\varepsilon} E_{ijk} \Delta u_i dc + \int_\varepsilon E_{ijk} \Delta u_i dc. \quad (3)$



Для достаточно малой величины ε функцию $\Delta u_i(x)$ можно принять постоянной и равной $\Delta u_i(\xi)$, тогда $\int_{\varepsilon} E_{ijk} \Delta u_i dc = \Delta u_i(\xi) \int_{\varepsilon} E_{ijk} dc$. При этих условиях справедливо уравнение $\oint E_{ijk} dc = 0$, которое является следствием применения дифференциального оператора к интегральному уравнению равновесия $\oint E_{ijk} dc = D_k \oint P_j dc$. Здесь интеграл берется по произвольному контуру, охватывающему сингулярную точку, следовательно, интеграл по отрезку, проходящему через сингулярную точку, заменяется интегралом по полуокружности радиуса ε :

$$\int E_{ijk} dc = - \int_{\rho=\varepsilon} E_{ijk} dc.$$

Поскольку $E_{ijk} = \varepsilon_{ijk}/r^2$, где ε_{ijk} - регулярная функция, то последний интеграл может быть вычислен аналитически: $\int_{\rho=\varepsilon} \frac{\varepsilon_{ijk}(\varphi)}{\rho^2} \rho d\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\pi \varepsilon_{ijk}(\varphi) d\varphi$.

При этом выражение (3) примет вид

$$\int_c E_{ijk} \Delta u_i dc = \int_{c-\varepsilon} E_{ijk} \Delta u_i dc - \frac{\Delta u_i(\xi)}{\varepsilon} \int_0^\pi \varepsilon_{ijk}(\varphi) d\varphi.$$

Так как при вычислении первого интеграла выделяется слагаемое, аналогичное последнему, но противоположное по знаку, то они уничтожаются, и интеграл от функции E_{ijk} можно вычислять обычными методами, не обращая внимания на сингулярность. В результате приходим к интегралу от сингулярной функции с особенностью $1/r^2$, получившему название конечно-частного интеграла [3], который эффективно применяют при решении граничных интегральных уравнений для задач с криволинейными трещинами.

В целях проверки правильности полученных уравнений и возможности применения конечно-частных интегралов для решения задач о трещинах рассмотрим прямолинейную трещину длины $2C$ в бесконечно упругой изотропной среде под действием равномерного давления P , приложенного к ее берегам. Уравнение (2) для нее примет вид $P_j(\xi) = n_k \int_{-C}^C E_{ijk}(x, \xi) \Delta u_i(x) dc$.

(4)

Пусть точка сингулярности ξ расположена на поверхности трещины, но не совпадает с ее серединой, тогда $r = x_1 - \xi_1$, $r_{,1} = \delta_{11}$, $n_1 = \delta_{12}$, $r_{,S} n_S = 0$, $dc = dx_1$ и, следовательно,

$$n_k E_{ijk} = \frac{c_6}{r^2} \delta_{ij}. \quad (5)$$

Из аналитического решения известно, что распределение разрывов смещений для такой задачи имеет вид

$$\Delta u_i(x_1) = \Delta u_i^* \left(1 - \frac{x_1^2}{C^2}\right)^{1/2} \delta_{i2}. \quad (6)$$

Здесь Δu_i^* - разрыв смещений в центре трещины. Подставляя (5) и (6) в уравнение (4) для $j=2$, получим

$$P = \int_{-C}^C \Delta u_2^* \left(1 - \frac{x_1^2}{C^2}\right)^{1/2} \frac{c_6}{(x_1 - \xi_1)^2} dx_1$$

Этот интеграл является, конечно-частным, и вычисление его дает

$$P = \frac{c_6 \Delta u_2^*}{C} \left[-\pi - \frac{\xi}{\sqrt{C^2 - \xi^2}} \left(\ln \frac{C - \sqrt{C^2 - \xi^2} - \xi}{C + \sqrt{C^2 - \xi^2} - \xi} - \ln \frac{C + \sqrt{C^2 - \xi^2} + \xi}{C - \sqrt{C^2 - \xi^2} + \xi} \right) \right]$$

Отсюда видно, что $\Delta u_2^* = -\frac{2(1-\nu)C}{\mu}P$ соответствует разрыву смещений в центре трещины в бесконечном упругом теле, полученному другим способом [4].

Из приведенных решений следует, что конечный результат не зависит от места расположения точки ξ на поверхности трещины. Это, в свою очередь, свидетельствует о правильности исходного интегрального уравнения и возможности применения конечно-частных интегралов при решении задачи определения НДС тел с трещинами. При этом подынтегральная функция в сингулярных конечно-частных интегралах терпит разрыв, и аппроксимация ее с помощью полиномов не может дать хороших результатов. К тому же конечно-частные интегралы от положительных функций отрицательны. Остановимся подробнее на их вычислении.

После разбиения поверхности s^+ на граничные элементы и введения локальных координат приходим к необходимости вычислять интеграл вида

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(r)}{r^2} d\eta. \quad (7)$$

Здесь η - локальная координата, $f(r)$ - регулярная функция. Пусть сингулярной точке ξ ($r=0$) соответствует локальная координата η_0 . Умножив и разделив подынтегральную функцию в последнем выражении на $(\eta-\eta_0)^2$, приходим к следующему интегралу:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(\eta-\eta_0)^2} \left[\frac{(\eta-\eta_0)^2}{r^2} f(r) \right] d\eta. \quad (8)$$

При этом функция $F = f(r) \frac{(\eta-\eta_0)^2}{r^2}$ регулярна на отрезке $(-1,1)$; в окрестности точки η_0 ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(\eta) = F_0 + F_1(\eta-\eta_0) + F_i(\eta-\eta_0)^i, \quad (9)$$

где F_0 и F_1 - соответственно значения самой функции F и ее производной в точке η_0 .

Подставляя разложение (9) в интеграл (8), будем иметь

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(\eta-\eta_0)^2} [F_0 + F_1(\eta-\eta_0) + F_i(\eta-\eta_0)^i] d\eta. \text{ Используя свойства конечно-частного интеграла и}$$

понимая второй интеграл в смысле главного значения, получим

$$I = -\frac{2}{1-\eta_0^2} F_0 + F_1 \ln \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} + \int_{-1}^1 F_i(\eta-\eta_0)^{i-2} d\eta$$

Функция $F_i(\eta-\eta_0)^{i-2}$ регулярна, интеграл от нее можно вычислять стандартными

численными методами. Из разложения (9) следует $F_i(\eta-\eta_0)^{i-2} = \frac{[F(\eta) - F_0 - F_1(\eta-\eta_0)]}{(\eta-\eta_0)^2}$.

На рис. 2 показана расчетная схема задачи и приведена разбивка поверхности круглого отверстия и трещины на граничные элементы. Поверхность выработки разбивается на четыре, а трещина - на три граничных элемента. Размеры элементов, примыкающих к кончику трещины, в четыре раза меньше размера срединного элемента. Физические и геометрические параметры задачи:

$$E=10^4 \text{ МПа}; \nu=0,2; R_0=1\text{м}; C=1\text{м}; \sigma_y^\infty=-5\text{МПа}; \sigma_x^\infty=-2,5\text{МПа};$$

E - модуль Юнга, σ_x^∞ и σ_y^∞ - напряжения на бесконечности.

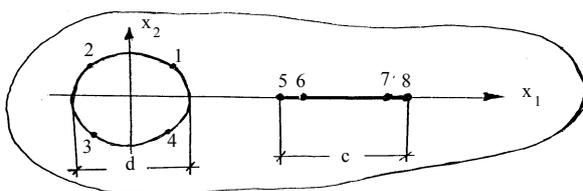


Рис 2. Разбивка на граничные элементы выработки и трещины вблизи неё

Проведена серия расчетов для различных значений d и x ; коэффициент интенсивности напряжений K_1 определялся по смещениям точки 6. Результаты



сравнивались с коэффициентом интенсивности напряжений K_1^* для трещины, находящейся вне зоны влияния отверстия. При этом результаты расчета показывают, что приближение выработки к трещине приводит к резкому возрастанию коэф интенсивности напряжений, а при удалении ее влияние уменьшается, и на расстоянии $x > 5R$ отношение K_1 / K_1^* стремится к 1. Увеличение размера R приводит сначала к росту коэффициента интенсивности напряжений, а затем к его стабилизации, которая определяется лишь расстоянием от трещины до поверхности выработки.

Предлагаемая ГЭ модель позволяет легко определять НДС произвольных областей, содержащих трещины.

По разработанному алгоритму можно исследовать влияние отверстий различной формы на коэффициент интенсивности напряжений для трещин, находящихся в зоне влияния отверстий.

Литература

1. Тентиев Ж.Т., Кожахметов К.Х., Жумуков С.Ж., МекенбаевБ.Т. Гранично-элементная модель расчета напряженного состоянием деформируемых сред с трещинами // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, №1, 1997.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.
3. Линьков А.М., Могилевская С.Г. Конечно-частные интегралы в задачах о пространственных трещинах // ПММ, 1986, №5, с. 844-850.
4. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975.

