ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 517.956.4

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

ПЕТРУШКО И.М.*, ПЕТРУШКО М.И.*, ТАГАЕВА С.Б.**
**МЭИ, Москва, **КГТУ им. И.Раззакова*
izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе изучаются свойства решений вырождающихся параболических уравнений 2-го порядка с меняющимся направлением времени. Доказывается однозначная разрешимость первой краевой с граничными и начальными функциями из пространства L_2

Пусть Q – ограниченная область n- мерного пространства R_n ($x=(x_1,x_2,\dots x_n)$ – точка R_n) границы которой ∂Q - (n-1) мерная поверхность без края класса C^2.

Пусть $Q_\delta = Q \bigcap \left\{ \min\limits_{y\in\partial Q} |x-y| > \delta \right\}$

Обозначим через r(x)- расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q области Q: $r(x) = \min\limits_{y\in\partial Q} |x-y|$.

Через Q_β^T мы будем обозначать цилиндр $Q\times(\beta,T)$ при этом $Q^T = Q_0^T$

Пусть функция $\rho(x)$ обладает следующими свойствами $\rho(x) = r(x)$, $r(x) = Q/Q_\delta$, $\rho(x)\in C^2(\overline{Q})$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для всех $x \in Q$ $\gamma_1 r(x) < \rho(x) \le \gamma_1^{-1} r(x)$.

Рассмотрим в цилиндрической области Q^T уравнение

$Lu = k(x)u_t - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j} u_{x_i}\right)_{x_j} + au = f(x,t)$ (1) Предположим, что коэффициенты $a_{i,j}(x,t)$ достаточно гладкие и удовлетворяют условиям: для любой точки $x\in Q_\delta, \delta\in(0,\delta_0]$ и для любых $t\in[0,T]$ существуют такие $\gamma_\delta > 0, \gamma_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$, что для всех $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in R_n$

$$\Phi(x,\xi,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \gamma_\delta \left|\xi^2\right|.$$

Для $(x_0 t) \in \partial Q \times (0,T)$ квадратичная форма вырождается, т.е.

$$\Phi(x_0,\xi,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0,t)\xi_i\xi_j \ge 0.$$

Однако будем предполагать, что существует такая постоянная $\gamma^0 > 0$, что для всех $(x_0 t) \in (\partial Q \times (0,T))$

$$\gamma^0 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x_{0,t})\nu_i(x_0), \nu_j(x_0) \le \left(\gamma^0\right)^{-1},$$

где $\nu(x_0) = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ - вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали к поверхности ∂Q в точке x_0.

Положим $Q^+ = \{x\in Q, k(x) > 0\}, Q^- = \{x\in Q, k(x) < 0\}$.

Для простоты изложения будем предполагать, что k(x)=1 $x\in Q^+$ и k(x)=-1 $x \in Q^-$

Правую часть f(x,t) уравнения (1) будем предполагать принадлежащей гильбертовому пространству $L_2(Q^T)$.

Будем говорить, что функция u(x,t) является обобщенным решением из $W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ уравнения (1), если она принадлежит $W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ и является решением уравнения (1) п.в.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Будем также говорить, что u(x,t) принимает граничное значение $u\big|_{(x,t)\in\partial Q\times(0,T)} = \varphi(x,t)$ в среднем, если $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$ и $\underset{\delta,\beta\to 0}{Lim}\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{\partial Q}(u(x_\delta(x),t)-\varphi(x,t))^2dxdt = 0$; будем говорить, что функция u(x,t) принимает начальное значение $u\big|_{t=0,x\in Q^+} = u_1(x)$ в среднем с весом $\rho(x)$, если $u_1(x)\in L_2(Q_\delta^+,\rho)$ и

$$\underset{\delta,\beta\to 0}{Lim}\int\limits_{Q_\delta^+}(u(x,\beta)-u_1(x))^2(\rho(x)-\delta)dx = 0.$$

Функция u(x,t) принимает начальное значение $u\big|_{t=T,x\in Q^-} = u_2(x)$ в среднем с весом $\rho(x)$, если $u_2(x)\in L_2(Q_\delta^-,\rho)$ и $\underset{\delta,\beta\to 0}{Lim}\int\limits_{Q_\delta^-}(u(x,\beta)-u_2(x))^2(\rho(x)-\delta)dx = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Существует такая постоянная $a_0 > 0$ что для всех $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$, $u_1(x)\in L_2(Q_\delta^+,\rho)$, $u_2(x)\in L_2(Q_\delta^-,\rho)$ и для всех $f(x,t)\in L_2\left(Q^T\right)$ существует решение из $W_{2,loc}^{2,1}\left(Q^T\right)$ перво2й смешанной задачи для уравнения (1) при всех a(x,t)>a_0, это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\rho(x)dxdt + \sup_{\delta,\beta}\left(\int\limits_{Q_\delta^+}u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx + \int\limits_{Q_\delta^-}u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx\right)$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_Q u^2(x,t)dxdt \le C\left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + \|\varphi\|^2_{\partial Q\times(0,T)} + \|u_1\|^2_{L_2(Q^+,\rho)} + \|u_2\|^2_{L_2(Q^-,\rho)}\right]$$

Литература

1. Петрушко И.М. О граничных и начальных значениях параболических уравнений // Математический сборник 1984, Т 125(167) С. 487-521.
2. Петрушко И.М., Черных Е.В. О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ 2000, №6 С.60-70.
3. Пятков С.Г. Разрешимость начально-краевых задач для одного нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: НГУ, 1987.
4. Кислов Н.В. Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложение // Математический сборник 1984, Т 125. Вып. 1. С.19-37.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com