УДК 681-5

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ОМОРОВ Т.Т., ДЖОЛДОШЕВ Б.О., КОЖЕКОВА Г.А, ДЖУНУШАЛИЕВ У.Б.
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается задача построения безынерционных управляющих устройств многомерных систем управления. Методика построения наглядно иллюстрируется примером.

The problem of construction of operating devices of multivariate control systems is considered. The technique of construction is evidently illustrated by an example.

В процессе проектирования автоматической системы, возникает необходимость создать необычную систему автоматического управления, а такую систему, в которой параметры (а иногда и структура) автоматически настраивались бы таким образом, чтобы фактически получающийся в ходе эксплуатации (или движения) процесс управления удовлетворял заданным требованиям. Для этого необходимо в дополнение к обычному замкнутому контуру системы управления вводить добавочное устройство, которое реагировало бы на определенные факторы, характеризующие систему, пли на тот или иной показатель качества процесса управления, с тем, чтобы соответственно изменять некоторые параметры регулятора (например, коэффициент усиления) или даже его структуру так, чтобы процесс управления получал требуемое качество [1, 2].

Предположим, что управляемый объект описывается векторным линейным уравнением в отклонениях

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bu(t), \qquad (1)$$
$$e(t_0) = e^0, \qquad t \in [t_0, t_1],$$

где $e(t) = [e_1(t), e_2(t), ..., e_n(t)]^T$ - n-мерный вектор ошибки управления; $u(t) = [u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)]^T$ - m-мерный вектор стабилизирующего управления; t_0, t_1 – начальный и конечный моменты процесса управления; e^0 – вектор начального отклонения фактического состояния x(t) объекта от желаемого состояния g(t); матрицы

$$A = \{a_{ij}\}_{n\times n}, \qquad B = \{b_{iv}\}_{n\times m}.$$

Далее предполагается, что объект обладает свойством управляемости и все компоненты вектора ошибки управления e(t) доступны для измерения.

Пусть структура закона управления u(t) задана и определяется линейной обратной связью:

$$u(t) = K\,e(t), \qquad (2)$$

где матрица регулятора $K = \{k_{ij}\}_{n\times m}$.

Задача синтеза регулятора заключается в определении матрицы K, обеспечивающей близость к нулю компонентов $e_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, вектора ошибки управления. Для решения сформулированной выше задачи управления введем критериальную функцию:

$$J_i(t) = \int_0^t e_i(\tau)\dot{e}_i(\tau)d\tau, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Далее будем использовать следующую теорему [3, 4].

Теорема. Пусть $e_i(t_0) \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, и для каждого t_0 и $t > t_0$ выполняются условия

$$\int_{t_0}^t e_i(\tau)\dot{e}_i(\tau)d\tau < 0, \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Тогда модули невязок $|e_i(t)|$ с течением времени убывают и

$$\lim_{t\to\infty} e_i(t) = 0, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, в качестве критерия оценки качества управления можно использовать соотношения (3) и функции $J_i(t)$.

Уравнение замкнутой САУ получаем путем подстановки выражения (2) для закона управления u(t) в уравнение (1) объекта:

$$\dot{e}(t) = (A + BK)e(t). \qquad (4)$$

Введем матрицу $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{n\times n}$:

$$\Lambda = A + BK. \qquad (5)$$

Тогда векторное уравнение (4) в координатной форме можно записать в виде

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j(t), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Используя теорему, запишем условия, при выполнении которых замкнутая система управления будет устойчива и будет обеспечиваться цель управления:

$$J_i(t) = \int_{t_0}^{t} e_i(\tau)\dot{e}_i(\tau)d\tau < 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Решение сформулированной выше задачи параметрического синтеза проведем в два этапа: на первом этапе на основе критериальных соотношений (7) получим уравнения настройки параметров λ_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, а на втором – уравнения адаптации параметров регулятора $k_{i\nu}$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{1,m}$.

С учетом (6) критериальные функции $J_i(t)$, принятые в качестве показателя оценки качества, имеют вид

$$J_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \lambda_{ij} e_i(\tau) e_j(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Теперь потребуем, чтобы динамика переменных $\lambda_{ij}(t)$ описывались следующими уравнениями:

$$\dot{\lambda}_{ij}(t) = \alpha_{ij}^{-1}(t) e_i(t) e_j(t), \quad i, j = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

где $\alpha_{ij}(t)$ - функции- параметры, подлежащие определению.

С учетом соотношений (9) выражения (8) для $J_i(t)$ имеют вид

$$J_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \alpha_{ij}(\tau)\lambda_{ij}(\tau)\dot{\lambda}_{ij}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \quad (10)$$

Теперь предположим, что выбор параметров α_{ij} осуществляется по алгоритму:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{*} \, \mathrm{sign}[\lambda_{ij}(t)\dot{\lambda}_{ij}(t)], \qquad i = \overline{1,n}, \quad (11)$$

где α_{ij}^{*} - вещественные параметры;

$$\mathrm{sign}(\varphi_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi_{ij} \ge 0, \\ -1, & \text{если} \quad \varphi_{ij} < 0. \end{cases}$$

С учетом выражений (11) критериальные функции $J_i(t)$ представляются в виде

$$J_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{*} \int_{t_0}^{t} \left|\lambda_{ij}(\tau)\dot{\lambda}_{ij}(\tau)\right| d\tau, \qquad i = \overline{1,n}. \quad (12)$$

Анализ выражений (12) показывает, что выбор параметров α_{ij}^{*}, удовлетворяющих соотношению $\alpha_{ij}^{*} < 0$, $\quad i, j = \overline{1,n}$, $\qquad$ (13)

обеспечивает выполнение условий (7), т.е. стремление ошибок управления $e_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, к нулю. Следует отметить, что техническая или программная реализация параметров α_{ij}, определяемых формулами (11), представляется сложной проблемой. В связи с этим исследуем возможность получения эквивалентных формул для их вычисления. Для этой цели рассмотрим следующие соотношения [5]:

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_{ij}(\tau)\dot{\lambda}_{ij}(\tau)d\tau = 0,5[\lambda_{ij}^2(t)-\lambda_{ij}^2(t_0)], \quad i,j=\overline{1,n}. \quad (14)$$

Теперь исследуем ситуацию, когда текущий момент времени t находится в непосредственной близости от момента t_0, т.е. $t_0 \in [t-\Delta t, t]$, где Δt - малое положительное число (время задержки). В этом случае соотношения (14) с достаточно высокой точностью можно аппроксимировать следующими равенствами:

$$\lambda_{ij}(t)\dot{\lambda}_{ij}(t)\Delta t \approx 0,5[\lambda_{ij}^2(t)-\lambda_{ij}^2(t_0)], \ i,j=\overline{1,n}. \qquad (15)$$

Отсюда видно, что при достаточно малом $\Delta t > 0$ знаки функций, входящих в левые и правые части выражений (15), совпадают:

$$\operatorname{sign}\left[\lambda_{ij}(t)\dot{\lambda}_{ij}(t)\right] = \operatorname{sign}[\lambda_{ij}^2(t)-\lambda_{ij}^2(t_0)], \ i,j=\overline{1,n},$$

В результате выражения (11) для вычисления искомых параметров можно заменить следующими эквивалентными формулами:

$$\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ij}^{*}\operatorname{sign}\left[\lambda_{ij}^2(t)-\lambda_{ij}^2(t-\tau_0)\right], \quad i,j=\overline{1,n}. \ (16)$$

Теперь получим уравнения адаптации параметров регулятора. Продифференцируем левую и правую части матричного соотношения (5):

$$\dot{\Lambda}(t) = B\dot{K}(t). \qquad (17)$$

При этом матрица

$$\Lambda(t) = F(t) = \left\{f_{ij}(t)\right\}_{n\times n}, \qquad (18)$$

где $f_{ij}(t)$ − функции, составленные из правых частей уравнений (9):

$$f_{ij}(t) = \alpha_{ij}^{-1}(t)e_i(t)e_j(t), \quad i,j=\overline{1,n}. \qquad (19)$$

В результате для определения уравнений адаптации параметров регулятора получаем следующее матричное соотношение:

$$B\dot{K}(t) = F(t). \qquad (20)$$

Рассмотрим случай, когда размерности векторов ошибки e(t) и управления u(t) равны, т.е. n = m;

Пусть существует обратная матрица B^{-1}, тогда получаем явное решение уравнения (20): $\dot{K}(t) = B^{-1}F(t).$ (21)

Введем матрицу $\hat{B} = B^T B$. Предположим, что для $\hat{B}$ существует обратная матрица $\hat{B}^{-1}$. Тогда решение уравнения (20) можно записать в виде: $\dot{K}(t) = \hat{B}^{-1}B^T F(t).$ (22)

Следует отметить, что установившееся решение матричного уравнения (22)

$$K^* = \left\{k_{ij}^*\right\}_{m\times n} = \lim_{t\to\infty} K(t) \qquad (23)$$

представляет собой вариант решения задач синтеза адаптивного регулятора.

Пример. Рассматривается задача динамического расчета системы управления синхронным генератором. Синхронный генератор является одной из важнейших подсистем энергосистемы. Его режим работы в значительной степени определяет эффективность всей системы.

В качестве объекта управления (ОУ) рассмотрим синхронный генератор (СГ), функционирующий в симметричном режиме.

Управляемый объект описывается векторным линейным уравнением в отклонениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11}u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{23}x_3(t) + b_{22}u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) \end{cases}$$

где $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, при начальных условиях: $x_1(0) = 0.15$, $x_2(0) = 0.05$, $x_3(0) = 0.05$,

$a_{11} = -0.565, \ a_{13} = 0.756, \ a_{21} = -0.5316, \ a_{23} = -0.401, \ b_{11} = 0.34, \ b_{22} = 0.211,$

Объект обладает свойством управляемости и все компоненты вектора ошибки управления e(t) доступны для измерения.

Требования к качеству управления заданы в виде следующих модульных ограничений: $\left|x_j(t)\right| \le б_i(t), \quad j=\overline{1,3},$

$$\sigma_1(t)\ \ \sigma_1^{\circ}e^{\alpha t}, \qquad \sigma_1^{\circ}= 0.25, \quad \alpha=-2,$$

где $\sigma_2(t)\ \ \sigma_2^{\circ}e^{\alpha t}, \qquad \sigma_2^{\circ}=0.05,$

$$\sigma_i \le \Delta_i, = \quad i \quad \overline{1,2}, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = 0.01,$$

x_1 – отклонение э.д.с. генератора; x_2 – отклонение угловой частоты вращающего ротора генератора; x_3 – отклонение угла ротора генератора; u_1 – отклонение э.д.с. возбудителя, u_2 – отклонение механического момента.

Матрицы коэффициентов объекта управления

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Структуру закона управления u(t) зададим в виде (2), где матрица регулятора

$$K(t)=\{k_{ij}(t)\}=\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & k_{13}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & k_{23}(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнение замкнутой системы

$$\dot{y}=C\dot{x}=C[Ax+Bu]= CAx+CBu= \ \hat{A}x+\hat{B}u,$$

где матрицы $\hat{A}=CA \begin{bmatrix} -0565 & 0 & -0.756 \\ -0.5316 & 0 & -0401 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \hat{B}=CB=\begin{bmatrix} 0.34 & 0 \\ 0 & 0.211 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Матрица замкнутой системы

$$\Lambda(t) \quad \hat{A}x+\hat{B}u \quad \begin{bmatrix} \lambda_{11}(t) & \lambda_{12}(t) & \lambda_{13}(t) \\ \lambda_{21}(t) & \lambda_{22}(t) & \lambda_{23}(t) \\ \lambda_{31}(t) & \lambda_{32}(t) & \lambda_{33}(t) \end{bmatrix}.$$

Формируем матрицу

$$F(t)=\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix},$$

где $f_{ij}(t)=\alpha_{ij}^{-1}\cdot x_i(t)\cdot x_j(t)$,

Матричное дифференциальное уравнение $\dot{K}(t)=B^{-1}F(t)$, или

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_{11}(t) & \dot{k}_{12}(t) & \dot{k}_{13}(t) \\ \dot{k}_{21}(t) & \dot{k}_{22}(t) & \dot{k}_{23}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.9412 & 0 & 0 \\ 0 & 4.7393 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix}=$$ где $b_{01}=2.9412, \quad b_{02}=4.7393.$

$$=\begin{bmatrix} b_{01} & 0 & 0 \\ 0 & b_{02} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{bmatrix},$$

Элементы матричного дифференциального уравнения адаптации параметров регулятора (контура самонастройки):

$$
\begin{cases}
\dot{k}_{11}(t) = b_{01}\cdot\dfrac{1}{\gamma^*_{11}\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda^2_{11}(t)-\lambda^2_{11}(t-\tau_0)\right]}\cdot x_1^2(t),\\
\dot{k}_{12}(t) = b_{01}\cdot\dfrac{1}{\gamma^*_{12}\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda^2_{12}(t)-\lambda^2_{12}(t-\tau_0)\right]}\cdot x_1(t)x_2(t),\\
\dot{k}_{13}(t) = b_{01}\cdot\dfrac{1}{\gamma^*_{13}\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda^2_{13}(t)-\lambda^2_{13}(t-\tau_0)\right]}\cdot x_1(t)x_3(t),\\
\dot{k}_{21}(t) = b_{02}\cdot\dfrac{1}{\gamma^*_{21}\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda^2_{21}(t)-\lambda^2_{21}(t-\tau_0)\right]}\cdot x_1(t)x_2(t),\\
\dot{k}_{22}(t) = b_{02}\cdot\dfrac{1}{\gamma^*_{22}\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda^2_{22}(t)-\lambda^2_{22}(t-\tau_0)\right]}\cdot x_2^2(t),\\
\dot{k}_{23}(t) = b_{02}\cdot\dfrac{1}{\gamma^*_{23}\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda^2_{23}(t)-\lambda^2_{23}(t-\tau_0)\right]}\cdot x_2(t)x_3(t).
\end{cases}
$$

Выберем параметры контура самонастройки регулятора в следующем виде:

$$\gamma^*_{ij}<0,\quad \gamma^*_{11}=-10^{-4},\quad \gamma^*_{12}=-10,\quad \gamma^*_{13}=-9\cdot10^{-4},\quad \gamma^*_{21}=-25,\quad \gamma^*_{22}=-10^{-3},\quad \gamma^*_{23}=-8.5\cdot10^{-4}.$$

Начальные условия:

$$k_{11}(t)=0.01,\quad k_{12}(t)=0.05,\quad k_{13}(t)=0.05,\quad k_{21}(t)=0.01,\quad k_{22}(t)=0.01,\quad k_{23}(t)=0.015.$$

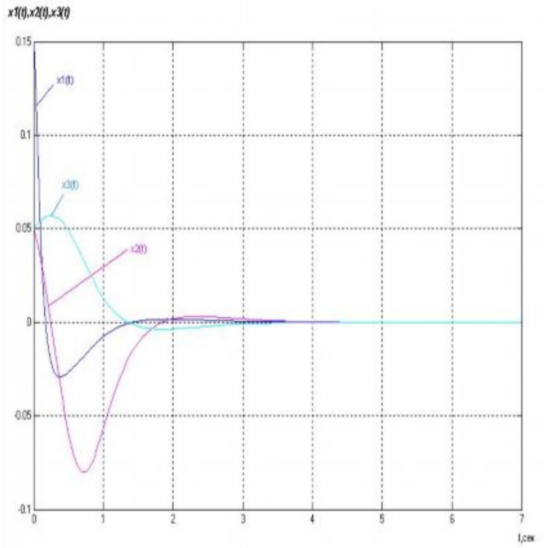

Рис.1. Переходные процессы по управляемым переменным $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

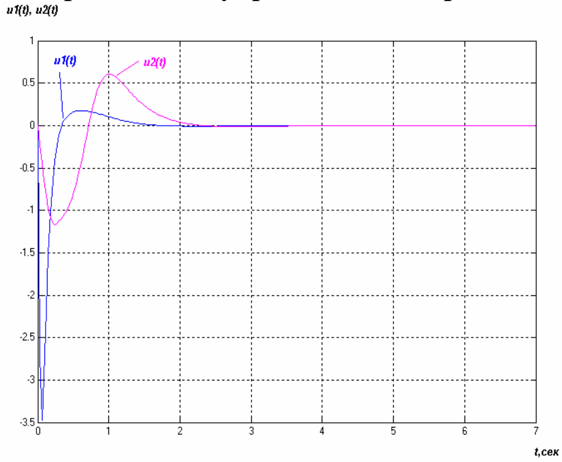

Рис.2. Графики управляющих воздействий $u_1(t)$, $u_2(t)$

Линейный закон управления u(t) имеет:

$$u_1(t)=k_{11}(t)\cdot x_1(t)+k_{12}(t)\cdot x_2(t)+k_{13}(t)\cdot x_3(t),$$
$$u_2(t)=k_{21}(t)\cdot x_1(t)+k_{22}(t)\cdot x_2(t)+k_{23}(t)\cdot x_3(t).$$

На основе моделирования с использованием программной системы MATLAB/Simulink [6] построены графики управляемых процессов по $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и закона управления по $u_1(t)$, $u_2(t)$, которые приведены на рис.2, 3 .

Анализ полученных результатов показывает, что синтезированная система управления обеспечивает устойчивость и соответствующие показатели качества системы управления.

Литература

1. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского.– М.: Наука, 1987. – 712с
3. Оморов Т.Т., Кожекова Г.А. Синтез систем управления многомерными объектами по критериальным ограничениям //Известия НАН КР. - Б.: Илим, 2009.-№1.-С.45-51.
4. Оморов Т.Т., Джолдошев Б.О., Кожекова Г.А. Новые алгоритмы адаптивного управления и идентификации систем // Респ. научно-практическая конференция. -Бишкек, КРСУ, 2008. – С.
5. Оморов Т.Т., Шаршеналиев Ж.Ш. Управление многомерными объектами на основе концепции допустимости.–Б.:Илим,1996.–160с.
6. http://matlab.exponenta.ru/simulink/book1/index.php.