УДК: 528.113:517.968.43

АШИРБАЕВ Б. Ы., АПЫШОВА Г. Ж.
И.Раззаков атындагы КМТУ,
Ж. Баласагын атындагы КУУ
АШИРБАЕВ Б. Ы., АПЫШОВА Г. Ж.
КГТУ им. И.Раззакова,
КНУ им. Ж.Баласагына,
ASHIRBAEV B. Y., APYSHOVA G. ZH.
KSTU I.Razzakov,KNU J.Balasagyn

СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮКТҮРҮЛГӨН СИСТЕМАНЫН КЫЙМЫЛЫНЫН ЧЕТТЕПКЕТҮҮСҮНҮН ШАРТТАРЫН ЧЫГАРУУ

ВЫВОД УСЛОВИЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

DERIVATION OF CONDITIONS FOR ESTIMATING THE ROOT-MEAN-SQUAREDEVIATION OF THE MOTION OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

Аннотация: Сингулярдык дүүлүктүрүлгөн башкарылма кайта келүүчү системанын каалагандай абалдан координата башталышына кайтып келүүсү жана квадраттык функционалдын маанисинин мындай каалагандай кыймылында минималдык болушу негизгиталаптардан болуп саналат. Илимий макалада жогорудагыдай кыймылда квадраттык функционалдын маанилерин эсептөөнүн жана сингулярдык дүүлүктүрүлгөн системанын кыймылынын четтеп кетүүсүн баалоонун ыкмалары сунушталды.

Аннотация: Основное требование сингулярно-возмущенной управляемой системы с обратной связью состоит в том, чтобы система возвращалась в начало координат из любого состояния, причем значение квадратического критерия качества вдоль любого такого движения должно быть минимальным. В данной статье предложен способ для вычисления значений квадратичного функционала и определены условия для оценки среднеквадратического отклонения движения сингулярно-возмущенной системы.

Annotation: The main requirement of a singularly perturbed feedback control system is that the system returns to the origin of coordinates from any state, and the value of the quadratic performance criterion along any such movement should be minimal. This article proposes a method for calculating the values of a quadratic functional and determines the conditions for estimating the root-mean-square deviation of the motion of a singularly perturbed system.

Негизги сөздөр: сингулярдык дүүлүктүрүлгөн башкарылма система, квадраттык функционал, өтмө матрица, кыймылдын орточо квадраттык четтеп кетүүсү.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенная управляемая система, квадратичный функционал, переходная матрица, среднеквадратическое отклонения движения.

Keywords: singularly perturbed control system, quadratic functional, transition matrix, standard deviation of motion.

Постановка задачи

Пусть объект управления описывается сингулярно-возмущенным уравнением

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t),\ y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

где $y(t) = (x'(t)\ z'(t))'$, $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^m$ —векторы переменных состояния,

$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{1}{\mu}A_3(t) & \frac{1}{\mu}A_4(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \frac{1}{\mu}B_2(t) \end{pmatrix}$, $A_1 - (n \times n)$, $A_2 - (n \times m)$, $A_3 - (m \times n)$, $A_4 - (m \times m)$, $B_1 - (n \times r)$, $B_2 - (m \times r)$ – матрицы, $u(t) \in R^r$ —вектор управления, $t \in [t_0, t_1]$, μ —малый параметр, $0 < \mu \ll 1$, штрих обозначает транспонирование.

В замкнутом контуре движение системы определяется однородными уравнениями,поэтому ограничимся однородными уравнениями в (1) при $u(t) = 0$.

Рассмотрим квадратичный функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y'(t)Q(t)y(t)dt, \tag{2}$$

где $Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2(t) & Q_3(t) \end{pmatrix}$.

Решение задачи

Далее будет показана способ вычисления квадратичного функционала (2). В работе [1] система (1) заменено при $u(t) = 0$ эквивалентной системой, у которой разделены медленные $x(t)$ и быстрые $z(t)$ вектора состояния в виде:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_1(t)\tilde{x}(t),\quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \tag{3}$$

$$\mu\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A}_4(t)\tilde{z}(t),\quad \tilde{z}(t_0) = z_0, \tag{4}$$

где

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \mu N(t)\tilde{z}(t),\ \tilde{z}(t) = z(t) - H(t)x(t), \tag{5}$$

$\tilde{A}_1(t) = A_1(t) + A_2(t)H$, $\tilde{A}_4(t) = A_4(t) + \mu H(t)A_2(t)$,

$\tilde{x}_0 = x_0 + \mu N\tilde{z}_0$, $\tilde{z}_0 = z_0 - Hx_0$.

Матрицы $H = H(t)$ и $N = N(t)$ определяются из уравнения [1]:

$$\mu\dot{H} + \mu H\tilde{A}_1(t) - A_3(t) - A_4(t)H = 0, \tag{6}$$

$$\mu\dot{N} - \mu\tilde{A}_1(t)N + N\tilde{A}_4(t) + A_2(t) = 0. \tag{7}$$

Пусть матрицы $F(t, t_0, \mu)$ и $\Psi(t, t_0, \mu)$ являются переходными матрицами уравнений (3) и (4) соответственно. Тогда справедливы соотношения [2]:

$$\tilde{x}(t, \mu) = F(t, t_0, \mu)\tilde{x}_0, \tag{8}$$

$$\tilde{z}(t, \mu) = \Psi(t, t_0, \mu)\tilde{z}_0. \tag{9}$$

С учетом (8) и (9) из (2) имеем

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{y}'(t_0)G'(t, t_0, \mu)Q(t)G(t, t_0, \mu)\tilde{y}(t_0)dt = \tilde{y}'(t_0)P(t_0, t_1, \mu)\tilde{y}(t_0), \tag{10}$$

где

$$\tilde{\chi}(t_0) = (\chi(t_0)\ \ z(t_0))', \quad P(t_0, t_1, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} G'(t, t_0, \mu)\tilde{Q}(t, \mu)G(t, t_0, \mu)dt. \quad (11)$$

Здесь переходная матрица $G(t, t_0, \mu)$, матрица $\tilde{Q}(t, \mu)$ и вектор $y(t, \mu)$ определяются формулами из [1,2]:

$$G(t, t_0, \mu) = diag(F(t, t_0, \mu)\ \Psi(t, t_0, \mu)), \quad (12)$$

$$\tilde{Q}(t, \mu) = M'(t, \mu)Q(t)M(t, \mu) = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1(t, \mu) & \tilde{Q}_2(t, \mu) \\ \tilde{Q}_2'(t, \mu) & \tilde{Q}_3(t, \mu) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q}_1(t, \mu) = Q_1(t) + H'Q_2(t) + Q_2(t)H + H'Q_3(t)H,$$

$$\tilde{Q}_2(t, \mu) = Q_2(t) + H'Q_3(t) - \mu\tilde{Q}_1(t, \mu)N,$$

$$\tilde{Q}_3(t, \mu) = Q_3(t) - \mu\tilde{Q}_2'(t, \mu)N - \mu N'\tilde{Q}_2(t, \mu) + \mu^2 N'\tilde{Q}_1(t, \mu)N,$$

$$y(t, \mu) = M(t, \mu)\tilde{\chi}(t, \mu), \quad \tilde{\chi}(t, \mu) = M^{-1}(t, \mu)y(t, \mu),$$

$$M(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix}, \quad M^{-1}(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если будут известны переходные матрицы $F(t, t_0, \mu)$, $\Psi(t, t_0, \mu)$ и начальные условия $\tilde{\chi}(t_0)$, то квадратичный функционал (2) можно вычислить формулой (10).

Основное требование системы с обратной связью состоит в том, чтобы система возвращалась в начало координат из любого состояния, причем значение квадратического критерия качества вдоль любого такого движения должно быть минимальным. В связи с этим нам необходимо определить условия для оценки квадратичного функционала (2). Известно [3] что, такая оценка нам дает информацию о длительности по времени переходного процесса приводящего систему (3), (4) в начало координат. В формуле (11) примем $t_0 = t$ и дифференцируем выражение $P(t, t_1, \mu)$ по t имеем

$$\frac{d}{dt}P(t, t_1, \mu) = -\tilde{A}'(t, \mu)P(t, t_1, \mu) - P(t, t_1, \mu)\tilde{A}(t, \mu) - \tilde{Q}(t, \mu). \quad (13)$$

Матрицу $P(t, t_1, \mu)$ представим в виде

$$P(t, t_1, \mu) = \begin{pmatrix} P_1(t, t_1, \mu) & \mu P_2(t, t_1, \mu) \\ \mu P_2'(t, t_1, \mu) & \mu P_3(t, t_1, \mu) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из цели оценки следует, что $P(t, t_1, \mu) = 0$, тогда уравнения (13) записывается в виде:

$$\dot{P}_1(t, t_1, \mu) = -\tilde{A}_1'(t, \mu)P_1(t, t_1, \mu) - P_1(t, t_1, \mu)\tilde{A}_1(t, \mu) - \tilde{Q}_1(t, \mu), \quad P_1(t_1, t_1) = 0, \quad (15)$$

$$\mu\dot{P}_2(t, t_1, \mu) = -\mu\tilde{A}_1'(t, \mu)P_2(t, t_1, \mu) - P_2(t, t_1, \mu)\tilde{A}_4(t, \mu) - \tilde{Q}_2(t, \mu), \quad P_2(t_1, t_1) = 0,$$

$$\mu\dot{P}_3(t, t_1, \mu) = -\tilde{A}_4'(t, \mu)P_3(t, t_1, \mu) - P_3(t, t_1, \mu)\tilde{A}_4(t, \mu) - \tilde{Q}_3(t, \mu), \quad P_3(t_1, t_1) = 0.$$

Из формулы (15) замечаем, что решения всех трех уравнений находятся независимо друг от друга и за начальные условия принимаются не в начальный момент времени, а в момент окончания процесса.

Теорема 1. Если блоки матрицы $P(t, t_1, \mu)$ в (14) являются решениями уравнений (15), $\tilde{\chi}(t, \mu)$ и $\tilde{z}(t, \mu)$ решения системы (3) и (4) соответственно, то справедлива формула

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tilde y'(t)\bar Q(t)\tilde y(t)dt = \tilde y'(t_0)P(t_0,t_1,\mu)\tilde y(t_0), \quad (16)$$

где $\tilde y(t) = (x'(t)\ z'(t))'$, $\tilde y(t_0) = (x'(t_0)\ z'(t_0))'$.

Доказательство. При $\mu \to 0$ из (15) получаем предельную задачу

$$\dot{\bar P}_1(t,t_1) = -\bar A_0'(t)\bar P_1(t,t_1) - \bar P_1(t,t_1)\bar A_0(t) - \bar Q_1(t), \quad \bar P_1(t_1,t_1) = 0, \quad (17)$$

$$\bar P_2(t,t_1)\bar A_4(t) + \bar Q_2(t) = 0, \quad (18)$$

$$A_4'(t)\bar P_3(t,t_1) + \bar P_3(t,t_1)A_4(t) + \bar Q_3(t) = 0, \quad (19)$$

где

$$\bar A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad (20)$$

$$\bar Q_1(t) = Q_1(t) + H_0'(t)Q_2'(t) + Q_2(t)H_0(t) + H_0'(t)Q_3(t)H_0(t),$$

$$\bar Q_2(t) = Q_2(t) + H_0'Q_3(t),\ \bar Q_3(t) = Q_3(t),\ H_0(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t).$$

Второе и третье уравнения системы (15) при $0 < \mu \ll 1$ записываем в виде:

$$\frac{d\tilde P_2}{dc} = -\mu \bar A_1'\tilde P_2 - \tilde P_2 A_4 - \bar Q_2, \qquad \tilde P_2(0) = 0,$$

$$\frac{d\tilde P_3}{dc} = -A_4'\tilde P_3 - \tilde P_3 A_4 - \bar Q_3, \qquad \tilde P_3(0) = 0, \quad (21)$$

где $\bar A_1 = \bar A_1(t) \approx \bar A_1(t_1 + r\mu)$, $A_4 = A_4(t) \approx A_4(t_1 + r\mu)$, $\bar Q_i = \bar Q_i(t) \approx \bar Q_i(t_1 + r\mu)$, $i = 2,3$, $r = \frac{t-t_1}{\mu} = -\frac{t_1-t}{\mu} = -\lambda$..

Тогда решения задачи (21) можно записать в виде:

$$\tilde P_2(r) = \int_c^0 \exp(-\mu \bar A_1'(r-s))\bar Q_2 exp(-A_4(r-s))ds, \quad (22)$$

$$\tilde P_3(r) = \int_c^0 \exp(-A_4'(r-s))\bar Q_3 exp(-A_4(r-s))ds. \quad (23)$$

Предположим, что

Условие 1. Матрицы $\bar A_1$ и A_4 устойчивые, то

$$\varphi_2 = \int_0^\infty \exp(\mu \bar A_1' s)\bar Q_2 exp(A_4 s)ds, \quad \varphi_3 = \int_0^\infty \exp(A_4' s)\bar Q_3 exp(A_4 s)ds \quad (24)$$

соответственно являются единственными решениями уравнений [3]:

$$-\mu \bar A_1'\varphi_2 - \varphi_2 A_4 - \bar Q_2 = 0, \quad -A_4'\varphi_3 - \varphi_3 A_4 - \bar Q_3 = 0. \quad (25)$$

Нам интересен вопрос, при каких условиях решения уравнений (21) стремятсяк решениям уравнений (25)? На этот вопрос положительный ответ дает следующая

Теорема 2. При выполнении условии 1 и $r \to -\infty$, $(\mu \to 0)$, $\tilde P_3(r) \to \varphi_3$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\int_c^0 \exp(A_4' s)\bar Q_3 exp(A_4 s)ds = \exp(A_4' r)\varphi_3 exp(A_4 r) - \varphi_3. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть равенство (25) выполняется. Функцию $\tilde{P}_3(r)$ из (23) записываем в виде

$$\tilde{P}_3(r) = exp(-A_4' r)\int_c^0 \exp(A_4' s) Q_3\, exp(A_4 s)ds\, exp(-A_4 r). \quad (27)$$

Тогда с учетом (25) из (27) получаем

$$\tilde{P}_3(r) = \varphi_3 - \exp(-A_4' r)\,\varphi_3\, exp(-A_4 r). \quad (28)$$

Пусть теперь, $\tilde{P}_3(r) \to \varphi_3$ при $r \to -\infty$. Тогда интеграл (27) может быть представлен в виде (28), т.е.

$$exp(-A_4' r)\int_c^0 \exp(A_4' s)\bar{Q}_3 exp(A_4 s)ds\, exp(-A_4 r) = \varphi_3 - \exp(-A_4' r)\,\varphi_3\, exp(-A_4 r).$$

Из последнего равенство получаем (26).

Покажем теперь, справедливость второго равенства (26) при условии, что φ_3 решение уравнения (25). Дифференцируя обе части равенства (26) по r имеем

$$-\exp(A_4' r)\bar{Q}_3 exp(A_4 r) = A_4' \exp(A_4' r)\,\varphi_3\, exp(A_4 r) + \exp(A_4' r)\,\varphi_3\, exp(A_4 r) A_4 .$$

Умножая последнего равенства слева и справа на матриц $exp(-A_4' r)$ и $exp(-A_4 r)$ соответственно, получаем уравнение

$$-\bar{Q}_3 = exp(-A_4' r) A_4' \exp(A_4' r)\,\varphi_3 + \varphi_3\, exp(A_4 r) A_4\, exp(-A_4 r). \quad (29)$$

Следствие 1. Вычисление квадратичного функционала (2) сводится к решению алгебраических уравнений (25) на полубесконечном интервале $(0, \infty)$.

Следствие 2. Если матрицы $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ равномерно ограничены $A_0(t)$, $A_4(t)$ устойчивы при $t \in [t_0, t_1]$, то найдется число μ такое, что при

$0 < \mu < \mu_0$

решения задач (15) существуют и являются единственными на отрезке $[t_0, t_1]$.

Заключение

Решения задач (17) – (19), (22), (23) могут служит в качестве асимптотические решения задач для оценки квадратичного функционала (2) и при вычислении величины квадратичного функционала (2) обеспечиваются более точные результаты чем решения задачи (10) – (12).

Список цитируемх источников:

1. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т Разделение движений в управляемых системах с сингулярными возмущениями //Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, №8, Бишкек, 2006. - С.75-79.
2. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. О переходных матрицах медленных и быстрых подсистемуправляемой системы с малым параметром /Труды межд. научной конференции посв. 70 летию акад. М.И. Иманалиева //Вестник КГНУ им. Ж. Баласагына. Серия 3. Естест. -тех. науки. - Вып.6, Бишкек, 2001. - С. 235- 239.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - М:Наука,1976.424 с.