Министерство образования и науки Кыргызской Республики
Нарынский государственный университет им. С.Нааматова

Макеев А.К. Кулманбетова С.М.

Дифференциальные уравнения

I часть.

Методическое руководство к решению задач для студентов специальности «Математика и информатика»

Нарын 2018

УДК 517. 911.

«Рекомендовано»
к изданию Ученым советом Нарынского Государственного университета им. С.Нааматова

Рецензент: Саадабаев А., доктор физико-математических наук, профессор

Составители: А.К.Макеев, С.М.Кулманбетова

Дифференциальные уравнения
Методическое руководство к решению задач для студентов специальности «Математика и информатика» I часть
/Нарынский государственный университет: – Нарын, 2016.- 76 с.

Цель данной работы- оказание помощи студентам методикой решения задач по дифференциальным уравнениям 1-го порядка. В руководстве приведены решения основных типовых задач.

Руководство предназначено для студентов специальности «Математика и информатика».

Оглавление

Введение

Методическое руководство написано в соответствии с программой по дифференциальным уравнениям для специальности «Математика и информатика».

В методическое руководство, включены только дифференциальные уравнения первого порядка. В руководстве сначала дается теоретический материал, который необходим специалисту в его практической деятельности.

Рассматриваются решение разных дифференциальных уравнений первого порядка.

Материал излагается доступно, приводятся подробные выводы. Включены примеры, сопровождающиеся подробными решениями. В конце имеются примеры для самостоятельного решения, а также после каждой темы даются примеры для самостоятельного решения.

§1. Уравнения с разделяющимися переменными.

1. Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y), \quad (1)$$

а так же в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \quad (2)$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую –только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражения, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения обращающие это выражение в нуль.

Пример. Решить уравнение

$$x^2y^2y' + 1 = y. \quad (3)$$

Приводим уравнение к виду (2):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2dy = (y-1)dx.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,dy = \int\frac{dx}{x^2}; \quad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ и $y-1=0$, т. е. $y=1$. Очевидно $y=1$- решение уравнение (3), а $x=0$-нет.

2. Уравнения вида $y' = f(ax+by)$ приводится к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z=ax+by+c$,где c любое).

В задачах 1-15 решить данные уравнения, для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

1. $xydx + (x+1)dy = 0.$
2. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$
3. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0; y(0) = 1.$
4. $y'ctgx + y = 2; y(0) = -1.$
5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; y(2) = 0.$
6. $xy' + y = y^2; y(1) = 0{,}5.$

7. $2x^2yy'+y^2=2.$

8. $y'-xy^2=2xy.$

9. $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1.$

10. $z'=10^{x+z}.$

11. $x\frac{dx}{dt}+t=1.$

12. $y'=\cos(y-x).$

13. $y'-y=2x-3.$

14. $(x+2y)y'=1;\ y(0)=-1.$

15. $y'=\sqrt{4x+2y-1}.$

Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

№1 $xydx+(x+1)dy=0$

Приводим уравнение к виду (2)

$$(x+1)dy=-xydx$$

Делим обе части уравнения на $y(x+1)$;

$$\frac{dy}{y}=-\frac{x}{x+1}dx$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{x+1}dx$$

$$\ln y=-\int\frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$\ln y=-\left[\int\frac{x+1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx\right]$$

$$\ln y=-x+\ln(x+1)+c$$

$$y=e^{-x+\ln(x+1)+c}$$

$$y=e^{-x}e^{\ln(x+1)}e^{c}$$

При делении на $y(x+1)$ могли быть потеряны решения $y=0$ и $x+1=0$ т.е. $x=-1$. Очевидно, $x=-1$ решение данного уравнения *а* $y=0$ - нет.

Ответ: y=c(x+1)e^{x}, x=-1.

Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

№3 $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0 \qquad y(0)=1$

Приводим уравнение к виду (2)

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$(x^2-1)dy = -2xy^2dx$$

делим обе части уравнения на $y^2(x^2-1)$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{-2x}{x^2-1}dx$$

Переменная разделена. Интегрируем обе части уравнения.

$$\int\frac{dy}{y^2} = -2\int\frac{x}{x^2-1}dx$$

$$-\frac{1}{y} = -2\int\frac{x}{x^2-1}d(x^2-1)$$

$$-\frac{1}{y} = -2\int\frac{x}{2x(x^2-1)}d(x^2-1)$$

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x^2-1) - c$$

умножая на *–1* получим

$$y(\ln(x^2-1)+c) = 1$$

Теперь подставляем начальные условия в общее решение по условию $y(0)=1$ это означает $x_0 = 0, \quad y_0 = 1$

$$1(\ln|0-1|+c) = 1$$

$$\ln|-1| + c = 1, \quad c = 1$$

$$y\left[\ln|-1|(1-x^2)+1\right] = 1$$

$$y\left[\ln(1-x^2)+1\right] = 1$$

При делении на $y^2(x^2-1)$ могли быть потеряны решения $y=0$ и $x^2-1=0$ т. е. $x=\pm 1$. Очевидно, $y=0$ решение данного уравнения, а $x=\pm 1$ нет.

ОТВЕТ: $$y\left[\ln(1-x^2)+1\right]=1$$
$$y=0$$

Решить дифференциальное уравнение

№13 $y'-y=2x-3$

Это уравнение приводится к виду

$$y'=y+2x-3$$

в уравнении

$$y+2x-3$$

заменяем через

$$z=y+2x-3$$

находим y

$$y=z-2x+3$$
$$y'=z'-2$$

Подставляем в данное уравнение

$$z'-2=z-2x+2x+3$$
$$z'-2=z-2x+3+2x-3$$
$$z'-2=z$$

это уравнение решается относительно z

$$z'=z+2,$$
$$\frac{dz}{dx}=z+2$$

$\frac{dz}{z+2}=dx$ интегрируя получим

$$\ln|z+2| = x + c$$

вместо z подставляем $y+2x-3$ тогда

$$\ln|y+2x-3+2| = x + c$$

$$\ln|y+2x-1| = x + c$$

отсюда $y + 2x - 1 = ce^{x}$

ОТВЕТ: $y + 2x - 1 = ce^{x}$

§2. Однородные уравнения.

1. Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, а также в виде $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$ где $M(x,y)$ и $N(x,y)$- однородные функции одной и той же степени. чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y = tx,$ после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример: Решить уравнение $xdy=(x+y)dx$.

Это уравнение- однородное. Полагаем $y=tx$. Тогда $dy=tdx+xdt$. Поставляя в уравнение, получим

$$x(xdt + tdx) = (x + tx)dx; xdt = dx.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$dt = \frac{dx}{x}; \qquad t = \ln|x| + c.$$

Возвращаясь к старому переменному y, получим $y = x(\ln|x| + c)$. Кроме того, имеется решение $x=0$, которое было потеряно при делении на x.

2. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $ax+by+c=0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = R(ax + by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y' = F(ax + by)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$(или $z=ax+by+c$).
3. Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$. Число m обычно заранее неизвестно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. Требуя, чтобы уравнения было однородным найдем число m, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

   Пример: Дано уравнение $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$. После замены $y = z^m$ уравнение примет вид $2mx^4zz^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$. Эти уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т. е. $4+(2m-1)=4m=6$. Эти равенство удовлетворяются одновременно, если $m = 3/2$.

Следовательно, уравнение можно привести к однородному заменой $y = z^{3/2}$.

Решит уравнение 16-44

16. $(x+2y)dx-xdy=0.$
17. $(x-y)dx+(x+y)dy=0.$
18. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$
19. $2x^3y'=y(2x^2-y^2).$
20. $y^2+x^2y'=xyy'.$
21. $(x^2+y^2)y'=2xy.$
22. $xy'-y = xtg\,\frac{y}{x}.$
23. $xy'=y-xe^{y/x}.$
24. $xy'-y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$
25. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$
26. $(y+\sqrt{xy})dx = xdy.$
27. $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y.$
28. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy = 0.$
29. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy = 0.$
30. $x-y-1+(y-x+2)y' = 0$
31. $(x+4y)y' = 2x+3y-5.$
32. $(y+2)dx = (2x+y-4)dy.$
33. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$
34. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$
35. $y' = \frac{y+2}{x+1}+tg\,\frac{y-2x}{x+1}.$
36. $x^3(y'-x) = y^2.$
37. $2x^2y' = y^3+xy.$
38. $2xdy+(x^2y^4+1)ydx = 0.$
39. $ydx+x(2xy+1)dy = 0.$

40. $2y'+x=4\sqrt{y}.$

41. $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}.$

42. $2xy'+y=y^2\sqrt{x-x^2y^2}.$

43. $\dfrac{2}{3}xyy'=\sqrt{x^6-y^4}+y^2.$

44. $2y+(x^2y+1)xy'=0.$

Решить дифференциальное уравнение

№16 $(x+2y)dx-xdy=0$

это однородное уравнение.

Полагаем $y=x\cdot u$. Тогда $dy=udx+xdu$. Подставляя в уравнение, получим

$$(x+2xu)dx-x(udx+xdu)=0$$

$$(x+2xu-xu)dx-x^2du=0$$

$$x(1+u)dx-x^2du=0$$

$$\frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x}$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$\int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dx}{x}, \qquad u=cx-1$$

возвращаясь к старому переменному *y*, получим

$$\frac{y}{x}=cx-1$$

$$y=cx^2-x$$

или $x+y=cx^2$;

Кроме этого, имеется решение $x=0$, которое было потеряно при делении на x^2 в общем решении

ОТВЕТ: $x+y=cx^2, \qquad x=0$

Решить дифференциальное уравнение

№18 $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$ это уравнение однородное.

Полагаем $y = x \cdot u$. Тогда $dy = udx + xdu$. Подставляя в уравнение, получим

$$\left((xu)^2 - 2x^2u\right)dx + x^2\left(udx + dxu\right)$$
$$x^2\left(u^2dx - 2udx + udx + xdu\right) = 0$$
$$\left(u^2 - u\right)dx + xdu = 0$$
$$\left(u^2 - u\right)dx = -xdu$$
$$\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u^2 - u}$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{u^2 - u}$$

В правую часть применяя метод неопределенных коэффициентов получим

$$\ln|x| = -\int \frac{du}{u(u-1)} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{u(u-1)} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{u-1} \\ Au - A + Bu = 1 \\ A + B = 0 \\ A = -1, \qquad B = 1 \end{array} \right|$$

$$= -\left[-\ln u + \ln|u-1|\right] = \ln|u| - \ln|u-1| = \ln\frac{u}{u-1}$$

$$\ln(x) = \ln\left|\frac{u}{u-1}\right| + \ln c$$

Возвращаясь к старому перемененному ***y***, получим:

$$x = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} \cdot c$$

$$x=\frac{y}{y-x}\cdot c, \qquad\qquad x(y-x)=yc$$

Кроме того, имеется решение $y=0$, которое было потеряно при делении на y.

ОТВЕТ: $\qquad x(y-x)=yc,\ y=0$

Решить дифференциальное уравнение

№28 $(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy=0$

Это уравнение однородное. Составляем систему и решим.

$$\begin{cases} 2x-4y+6=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x-x_0 \\ \eta = y-y_0 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} x=\xi+1 \\ y=\eta+2 \end{cases}$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\begin{aligned}
&(2(\xi+1)-4(\eta+2)+6)d\xi+((\xi+1)+(\eta+2)-3)d\eta=0 \\
&(2\xi+2-4\eta-8+6)d\xi+(\xi+1+\eta+2-3)d\eta= \\
&=(2\xi-4\eta)d\xi+(\xi+\eta)d\eta=0
\end{aligned}$$

Полагаем $\eta=u\cdot\xi$, тогда $d\eta=ud\xi+\xi du$

$$(2\xi - 4\xi u)d\xi + (\xi + \xi u)(ud\xi + \xi du) =$$
$$= \xi(2 - 4\eta + (\xi + \xi u)(ud\xi + \xi du) =$$
$$= \xi(2 - 4u + u + u^2)d\xi + \xi^2(1 + u)du$$
$$(2 - 3u + u^2)d\xi = -\xi(1 + u)du$$
$$\frac{(1+u)du}{2 - 3u + u^2} = -\frac{d\xi}{\xi}$$

Решаем полученное управление с разделяющимся переменными

$$\int \frac{(1+u)du}{2-3u+u^2} = -\int \frac{d\xi}{\xi} + \ln c$$
$$\int \frac{(1+u)du}{2-3u+u^2} = \int \frac{(1+u)du}{(u-1)(u-2)} =$$
$$= \left| \begin{array}{c} \dfrac{1+u}{(u-1)(u-2)} = \dfrac{A}{u-1} + \dfrac{B}{u-2} \\ A(u-2) + B(u-1) = 1+u \\ A = -2, \qquad B = 3 \end{array} \right| =$$
$$\int \left(\frac{-2}{u-1} + \frac{3}{u-2} \right) du = -2\ln(u-1) + 3\ln(u-2) =$$
$$= \ln \xi + \ln c$$
$$\ln \left| \frac{(u-2)^3}{(u-1)^2} \right| = \ln \xi c$$
$$\frac{(u-2)^3}{(u-1)^2} = \xi c$$
$$\left| \frac{(\frac{\eta}{\xi} - 2)^3}{(\frac{\eta}{\xi} - 1)^2} \right| = c\xi$$
$$\left| \frac{(\eta - 2\xi)^3}{(\eta - \xi)^2} \right| = c$$

Возвращаясь к старому переменному y и x, получим

$$(y\text{-}2x)^3 = (y\text{-}x\text{-}1)^2\, c$$

Кроме того, имеется решение $y=x+1$ которое было потеряно при делении на *y-x-1* в последнем общем решении.

ОТВЕТ: $(y-2x)^3=(y-x-1)^2 c$, $y=x+1$.

Решить дифференциальное уравнение

№34 $$(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}$$

Полагаем $$\left|\begin{array}{l}\dfrac{y+x}{x+3}=u\\ y+x=u(x+3)\\ y'=u'(x+3)u-1\end{array}\right|$$

$$(u'(x+3)+u-1+1)\cdot\ln u=u$$
$$u'(x+3)+u=\frac{u}{\ln u}$$
$$\frac{du}{dx}(x+3)=\frac{u-u\ln u}{\ln u}$$
$$\int\frac{du\ln u}{u-u\ln u}=\int\frac{dx}{x+3}$$
$$-\int\frac{\ln u}{\frac{1}{u}\cdot u(\ln u-1)}d(\ln u)=-\int\frac{\ln u}{\ln u-1}d(\ln u)=$$
$$=-\int\left(1+\frac{1}{\ln u-1}\right)d(\ln u)=-\ln u-\ln(\ln u-1)=$$
$$=\ln(x+3)\cdot c$$

Возвращаясь к старому переменному $\ln u+\ln(\ln u-1)=-\ln(x+3)\cdot c$

$$\ln\frac{y+x}{x+3}+\ln\left(\ln\frac{y+x}{x+3}-1\right)=\ln[(x+3)\cdot c]^{-1}$$
$$\ln\left[\frac{y+x}{x+3}\left(\ln\left|\frac{y+x}{x+3}-1\right|\right)\right]=\ln\frac{1}{(x+3)\cdot c}$$

$$\frac{y+x}{x+3}\left(\ln\left|\frac{y+x}{x+3}\right|-1\right)=\frac{1}{(x+3)c}$$

$$\ln\left|\frac{y+x}{x+3}\right|-1=\frac{c}{y+x}$$

$$\ln\frac{y+x}{x+3}=1+\frac{c}{y+x}$$

ОТВЕТ: $$\ln\frac{y+x}{x+3}=1+\frac{c}{y+x}$$

Решить дифференциальное уравнение

№36 $x^3(y'-x)=y^2$

После замены $y=z^r$ уравнение примет вид

$$x^3rz^{r-1}z'-x^4=z^{2r}$$

Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т.е.

$$3+r-1=2r=4$$

Эти равенства удовлетворяются одновременно, если $r=2$. Следовательно, уравнение можно привести к однородному заменой

$$y=z^2$$

тогда

$$y'=2z\,z'$$

$$x^3(2z\,z'-x)=z^4$$

$$2x^3z\,z'-x^4=z^4$$

Полагаем $z=ux$. Тогда $z'=u'\,x+u$. Подставляя в уравнение получим

$$2x^3ux(u'\,x+u)-x^4=u^4x^4$$

$$2xuu'+2u^2-1=u^4$$

$$\int\frac{2udu}{u^4-2u^2+1}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2ud\left(u^2-1\right)}{2u(u^2-1)^2}=\ln x+\ln c$$

$$-\frac{1}{u^2-1}=\ln x\cdot c$$

$$-\frac{1}{\frac{y}{x^2}-1}=\ln cx$$

$$-\frac{x^2}{y-x^2}=\ln cx$$

$$x^2=(x^2-y)lnc$$

Кроме того, имеется решение $y=x^2$ которое было потеряно при делении на y-x^2 в общем решении:

ОТВЕТ: $x^2=(x^2-y)lnc,\quad y=x^2$

Решить дифференциальное уравнение

№41 $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$

Полагаем *xy=u*. Тогда $y' = \frac{u'x - u}{x^2}$. Подставляя в уравнение, получаем

$$x^2\,\frac{u'x - u}{x^2} = u^2 - 2$$
$$u'x - u = u^2 - 2$$

Разделяем переменные

$$\frac{du}{u^2 + u - 2} = \frac{dx}{x}$$
$$\frac{du}{(u+2)(u-1)} = \ln cx$$

В левую часть применяя метод неопределенных коэффициентов получим:

$$\frac{u-1}{u+2} = x^2 c$$

Возвращаясь к старому переменному получим $xy-1=x^3c(xy+2)$. При делении на $xy+2$ могли быть потеряны решения т.е. $xy=-2$. Очевидно, что $xy=-2$ решения данного уравнения

ОТВЕТ: $xy-1=x^3c(xy+2)$, $xy=-2$

§3. Линейные уравнения первого порядка.

1. Уравнение

$$y'+a(x)y=b(x) \qquad (1)$$

называется линейным. Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$$y'+a(x)y=0. \qquad (2)$$

(это делается путем разделение переменных, см.§2) и в общем решении последнего заменит произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставит в уравнение (1) и найти функцию $C(x)$.

2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и не зависимое переменное. Например, уравнение $y=(2x+y^3)y'$, в котором y является функцией от x,- нелинейное. Запишем его в дифференциалах: $ydx-(2x+y^3)dy=0$. Так как в это уравнение x и dx линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y- независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2$ и решается аналогично уравнению (1).

3. Чтобы решить уравнение Бернулли, т .е. уравнение

$$y'+a(x)y=b(x)y^n \quad (n\neq 1),$$

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $1/y^{n-1}=z$. После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом.

4. Уравнение Риккати, т. е. $y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x)$, в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно частное $y_1.(x)$,то заменой $y=y_1(x)+z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y'+y^2=x^2-2x$ в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y=ax+b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения $y'+2y^2=6/x^2$ те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде $y=a/x$ в уравнение, найдем постоянную a.

Решить уравнения 45-69

45. $xy'-2y=2x^4$.

46. $(2x+1)y'\ 4x+2y$.

47. $y'+ytgx=secx$.

48. $(xy+e^x)dx-xdy=0$.

49. $x^2y'+xy+1=0$.

50. $y=x(y'-xcosx)$.

51. $2x(x^2+y)dx=dy$.

52. $(xy'-1)lnx=2y$.

53. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

54. $(x+y^2)dy=ydx$.

55. $(2e^y-x)y'=1$.

56. $(sin^2y+xctgy)y'=1$.

57. $(2x+y)dy=ydx+4lnydy$.

58. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$.

59. $(1-2xy)y'=y(y-1)$.

60. $y'+2y=y^2e^x$.

61. $(x+1)(y'+y^2)=-y$.

62. $y'=y^4cosx+ytgx$.

63. $xy^2y'=x^2+y^3$.

64. $xydy=(y^2+x)dx$.

65. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

66. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

67. $2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy}{x^2-1}$.

68. $y'\ x^3siny=xy'-2y$.

69. $(2x^2ylny-x)y'=y$.

В задачах 70-75, найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

70. $x^2y'+xy+x^2y^2=4$.

71. $3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0$.

72. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$.

73. $y'-2xy+y^2=5-x^2$.

74. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$.

75. $y'-2xy=2x^3y^3$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

№45 xy'-$2y=2x^4$

I-способ метод Лагранжа. Приводим к виду $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$

$$P(x) = -\frac{2}{x},\ f(x) = 2x^3$$

1) $\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln(x)$

2) а) $e^{\int P(x)dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{lux^{-2}} = \frac{1}{x^2}$

б) $e^{-\int P(x)dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$

3) $\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int 2x^3 \frac{1}{x^2} = \int 2xdx = x^2 + c$

Получаем искомое общее решение по формуле

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

тогда $y = x^2(x^2 + c)$

Итак

ОТВЕТ: $y=cx^2+x^4$

2 способ. xy'-$2y=2x^4$

Метод вариации постоянных. Сначала решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение. Данное уравнение разделим на x

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$$

Получим

$$y' - \frac{2}{x} y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx$$

$$\ln y = \ln x^2 + \ln c$$

$y=x^2c$ и так получим общее решение однородного уравнения:

Вместо постоянной С подставляем функцию х т.е. $C(x)$. Тогда

$y=x^2c(x)$

Дифференцируя получим $y'=2xc(x)+x^2c'(x)$

Подставляя значения y и y' в данное уравнение получим

$$2xc(x) + x^2c'(x) - \frac{2}{x} x^2 c(x) = 2x^3$$

$$c'(x)=2x$$

$\frac{dc}{dx} = 2x \qquad dc = 2xdx$ Интегрируя

находим $c(x)= x^2+c_1$

Подставляя в общем решении однородного уравнения получим

$$y=x^2(x^2+c_1)$$

Итак

ОТВЕТ: $y=x^4+cx^2$

$xy'-2y=2x^4$.

3 способ. **Метод Бернулли** $xy'-2y=2x^4$

Полагаем $y = u\vartheta$, тогда $y'=u'\vartheta+u\vartheta'$.

Подставляя в данное дифференциальное уравнение, имеем

$$xu'\vartheta+xu\vartheta'-2u\vartheta=2x^4$$

Объединяем второй и третий члены:

$$(x\vartheta'-2u)u+xu'\vartheta=2x^4$$

Приравнивая выражение в скобках нулю, получаем

$$x\vartheta' - 2u = 0$$

$\frac{d\vartheta'}{\vartheta} - 2\frac{dx}{x} = 0$ После интегрирования имеем, $ln\vartheta = 2lnx$, $ln\vartheta = lnx^2$

$$\vartheta = x^2$$

При таком выборе функции ϑ преобразованное дифференциальное уравнение запишется в виде

$$xu'x^2 = 2x^4 \text{ или } u' = 2x$$

$$du = 2xdx$$

После интегрирования

$$u = x^2 + c$$

Искомое общее решение

$$y = u\vartheta = x^2(x^2 + c)$$

ОТВЕТ: $y = x^4 + cx^2$

4 способ. Метод Эйлера. Дано уравнение $xy' - 2y = 2x^4$ уравнение приводится к виду

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$$

В данном случае $P(x) = -\frac{2}{x}$,

$$f(x) = 2x^3$$

по этому

$$\int p(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln x$$

Следовательно интегрирующий множитель

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = \frac{1}{x^2}$$

Умножая данное дифференциальное уравнение на $\frac{1}{x^2}$ и дифференцируя получаем

$$\frac{1}{x^2}dy - \frac{2}{x^3}ydx = 2xdx$$

Поскольку в левой частей равенства образовался дифференциал

$\frac{y}{x^2}$ то $d(\frac{y}{x^2}) = 2xdx$ или, после интегрирования $\frac{y}{x^2}=x^2+c$

Общее решение имеет вид

$$y=x^4+cx^2$$

Итак

ОТВЕТ: $y=x^2+cx^2$

Решить дифференциальное уравнение

№ 75 $y'-2xy=2x^3y^3$

Это дифференциальное уравнение Бернулли**.**

Разделим обе части уравнения на y^2

$$\frac{y^1}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3 \text{ или}$$

$$y^{-2}y'-2xy^{-1}=2x^3$$

Пусть $y^{-1}=z$, откуда $z'=-y^{-2}y'$

Умножим обе части последнего уравнения на (-1);

$$-y^{-2}y'+2xz=-2x^3$$

Применяя подстановку, получим

$$z'-2xz=-2x^3$$

Это уравнение линейное относительно z;

$$dz+2xzdx=-2x^3dx$$

Применяем подстановку Бернулли

$z=u\vartheta$, откуда $dz=ud\vartheta+\vartheta du$

Тогда

$$ud\vartheta + \vartheta du+2xu\vartheta dx=-2x^3dx,$$

$$ud\vartheta + \vartheta (du+2xudx)=-2x^3dx,$$

$$du+2xudx=0,\ du=-2xudx$$

$$\frac{du}{u} = -2xdx$$

Интегрируя, имеем

$$Ln\ u=-x^2$$

$$u = e^{-x^2}$$

$ud\vartheta=-2x^3dx$, откуда

$$d\vartheta=-2e^{x^2}x^3dx$$

Интегрируя, получаем

$$\vartheta = -2\int e^{x^2}x^3dx = -2\int e^{x^2}x^2xdx = -\int x^2e^{x^2}d(x^2)$$

Интегрируя последний интеграл по частям, имеем

$$\vartheta = -\int xe^{x^2}x^3d(x^2) = -(x^2e^{x^2} - \int e^{x^2}2xdx) = \int e^{x^2}d(x^2) - x^2e^{x^2} = e^{x^2} - x^2e^{x^2} + c = e^{x^2}(1-x^2)+c$$

Определим значения искомых функций u и ϑ. Согласно принятой подстановке

$$z = u\vartheta = e^{-x^2}\left[e^{x^2}(1-x^2)+c\right] = ce^{-x^2} + 1 - x^2$$

Так как $z=\frac{1}{y}$ то $y = \frac{1}{ce^{-x^2}+1-x^2}$

ОТВЕТ: $y = \frac{1}{ce^{-x^2}+1-x^2}$

Решить дифференциальное уравнение

№71 $x^2y'+xy+x^2y^2=4$

Это уравнение является уравнением Риккати. Находим из уравнения y', тогда

$$y' = -y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{4}{x^2},$$

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y = \frac{4}{x^2}$$

$$P(x) = -1, \qquad Q(x) = -\frac{1}{x}, \qquad C(x) = \frac{4}{x^2}$$

Подобные членам правой части, если взять $y_1 = \frac{2}{x}$ тогда частное решение будем искать в виде

$$y_1 = \frac{2}{x}, \qquad \text{то} \qquad y_1' = -\frac{2}{x^2}$$

$$x^2\left(-\frac{2}{x^2}\right) + x\frac{2}{x} + x^2\,\frac{4}{x^2} = 4, \qquad 4 = 4$$

Если же известно частное решение y_1, то заменой

$$\left| \begin{aligned} & y = y_1 + \frac{1}{u} \\ & y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \end{aligned} \right|$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$$

$$y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2}; \quad -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right) + \frac{4}{x};$$

$$\frac{2}{x^2} + \frac{u'}{u^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{xu} + \frac{1}{u^2} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{xu} - \frac{4}{x^2} \quad + \frac{u'}{u^2} = \frac{5}{xu} + \frac{1}{u^2}$$

$$u' = \frac{5}{x}u + 1$$

$$u' - \frac{5}{x}u = 1$$

$$P(x) = -\frac{5}{x}, \qquad f(x) = 1$$

Решая линейное уравнение относительно u и подставляя вместо u найденное решение находим общее решение.

Итак, $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{cx^5 - x}, \qquad y = \dfrac{2}{x}$

ОТВЕТ: $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{cx^5 - x}, \qquad y = \dfrac{2}{x}$

§4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

1. Уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$. Это имеет место, если $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial M}{\partial x}$. Чтобы решить уравнение (1), надо найти $F(x.y)$, от которой полной дифференциал $dF(x,y)=F'_x dx+F'_y dy$ равен левой части уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) можно написать в виде $F(x,y)=C$, где C- произвольная постоянная.

<u>Пример:</u> Решить уравнение

$$(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0. \quad (2)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial y}(2x+3x^2y)=3x^2, \frac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2)=3x^2,$ то уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,y)$, полный дифференциал которой $dF'_x dx+F'_y dy$ был бы равен левой части уравнения (2), т. е. такую функцию F, что

$$F'_x=2x+3x^2y, \;\; F'_y=x^3-3y^2. \quad (3)$$

Интегрируем по x первое из уравнений (3), считая y постоянным; при этом вместе постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$- неизвестную функцию от y

$$F=\int\left(2x+3x^2y\right)dx=x^2+x^3y+\varphi(y).$$

Поставляя это выражение для F во второе из уравнений (3), найдем $\varphi(y)$:

$\left(x^2+x^3y+\varphi(y)\right)'_y=x^3-3y^2; \varphi'(y)=-3y^2; \varphi(y)=-y^3+const.$ Следовательно, можно взять $F(x,y)=x^2+x^3y-y^3$, и общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x^2+x^3y-y^3=C.$$

2. Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \qquad (4)$$

называется такая функция $m(x,y)=0$, после умножение, на которую уравнение (4) на которую превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции M и N в уравнении (4) имеет непрерывные частные производные и не обращается в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его отыскания (когда общее решение уравнение (4)неизвестно).

В некоторых случаях интегрирующий множитель можно найти с помощью приемов. Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$d(xy) = ydx + xdy, d(y^2) = 2ydy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, d(\ln y) = \frac{dy}{y} \text{ и т. п.}$$

<u>Пример:</u> Решить уравнение

$$ydx - (4x^2 y + x)dy = 0. \qquad (5)$$

Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал. Так как $ydx\text{-}xdy\text{=-}x^2d(y/x)$, то, деля уравнение (5) на- x^2, имеем

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4ydy = 0, d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Это- уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя непосредственно (приводить к виду (1) не нужно), получаем решение

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$

Кроме того, при делении на $-x^2$ было потеряно решение $x=0.$

<u>Замечание</u> . так как после деления уравнения (5) на $-x^2$, т. е. умножения на $-1/x^2$, получилось уравнение в полных дифференциалах то интегрирующий множитель для уравнения (5) равен $-1/x^2$.

3. Если уравнение (4) можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x, y)$,то иногда уравнения упрощается, если от переменных (x,z) перейти к переменным (x,z) или (y,x) где $z = \varphi(x, y)$.

Примеры. 1) Решить уравнение $ydx\text{-}(x^3y+x)dy=0$.

Выделив полный дифференциал как в предыдущем примере, получим

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + xydy = 0.$$

Перейдя к переменным $z=y/x$ и y получим уравнение

$$dz+\frac{y^2}{z}dy=0,$$

которое легко решается

2. Решить уравнение $(xy+y^4)dx+(x^2-xy^3)dy=0$/

Сгруппируем члены так, чтобы выделить полные дифференциалы

$x(ydx+xdy)+y^3(ydx-xdy)=0,\quad xd(xy)+y^5d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$

Разделив на x и сделав замену $xy=u$, $x/y=\upsilon$, получим уравнение

$du+\frac{u^2}{\upsilon^3}d\upsilon=0,$ которое легко решается.

В задачах 76-84 проверить что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

76. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0.$
77. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0.$
78. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0.$
79. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0.$
80. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0.$
81. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0.$
82. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy=0.$
83. $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\frac{x^3}{y})dy.$
84. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0.$

Решить уравнения 85-110, Найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

85. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$
86. $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0.$
87. $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}.$
88. $xy^2(xy'+y)=1.$
89. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0.$
90. $\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{dy}{y}=0.$
91. $(x^2+3\ln y)ydx=xdy.$
92. $y^2dx+(xy+tgxy)dy=0.$
93. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0.$
94. $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0.$
95. $(x^2+2x+y)dx=(x-3x^2y)dy.$
96. $ydx-xdy=2x^3tg\frac{y}{x}dx.$
97. $y^2dx+(e^x-y)dy=0.$
98. $xydx=(y^3+x^2y+x^2)dy.$
99. $x^2y(ydx+xdy)=2ydx+xdy.$

100. $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0.$

101. $(2x^2y^2+y)dx+(x^3y-x)dy=0.$

102. $(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0.$

103. $y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0.$

104. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0.$

105. $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2ydx.$

106. $(x^2+1)(2xdx+\cos ydy)=2x\sin ydx.$

107. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0.$

108. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0.$

109. $(x^2-y)dx+x(y+1)dy=0.$

110. $y^2(ydx-2xdy)=x^3(xdy-2ydx).$

Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Решить уравнение

№76. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$

Так как $\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$, $\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)=2x$, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем функцию *M(x, y)* был бы равен левой части данного уравнения $M'_y=2x$, $N'_x=2x$

а) $$\frac{du}{dx}=M=2xy$$

$$\int du(x,y)=\int 2xydx$$
$$u(x,y)=\int 2xydx+\varphi(y)=x^2y+\varphi(y)$$

б) $$\frac{du}{dy}=x^2+\varphi'(y)=N=x^2-y^2$$

$$x^2+\varphi'(y)=x^2-y^2$$
$$\varphi'(y)=-y^2$$
$$\varphi(y)=-\frac{y^3}{3}+c$$

общее решение будет иметь вид

$$u(x,y)=x^2y-\frac{y^3}{3}=c$$

ОТВЕТ: $$x^2y-\frac{y^3}{3}=c$$

Решить дифференциальное уравнение

№85 $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$

деля уравнение на x^2+y^2 имеем

$$x^2dx+y^2dx+xdx+ydy=0$$

$$\int dx+\int\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$$

$$x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$$

ОТВЕТ: $2x+\ln\left|x^2+y^2\right|=c$

Если дифференциальное уравнение $Mdx+Ndy=0$ не является уравнением в полных дифференциалах, но существует такая дифференцируемая функция

$$M=M(x,y),$$

что уравнение

$$\mu(Mdx+Ndy)=0$$

уже представляет собой дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, так что

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

то эта функция называется интегрирующим множителем данного дифференциального уравнения. Если интегрирующий множитель μ определен, то интегрирование дифференциального уравнения сводится к умножению его на μ и определению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах.

Из уравнения

$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ следует, что

интегрирующий множитель μ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (*)$$

Определение интегрирующего множителя не всегда возможно.

Если заранее известно, что $\mu = \mu(V)$ где $\boldsymbol{V}$ – заданная функция x и y, то уравнение (*) приводится x линейному дифференциальному уравнению с неизвестной (искомой) функцией μ от аргумента V:

$$\frac{\partial\mu}{\partial V} = \varphi(V)\mu \qquad (*\ \ *)$$

где
$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial V}{\partial x} - M\dfrac{\partial V}{\partial y}} \equiv \varphi(V)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (* *), находим

$$\mu = e^{\int \varphi(V)dV}$$

В частных случаях, если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x), \qquad \mu = e^{\int \varphi(x)dx}$$

$$\text{если } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \varphi(y),$$

$$\text{то} \qquad \mu = e^{\int \varphi(y)dy}$$

<u>Пример</u> Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1\text{-}x^2y)dx + x^2(y\text{-}x)dy = 0$$

<u>Решение</u> Это дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель μ, зависящий только от x так как выполняется условие

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x} \equiv \varphi(x),$$

$$\text{Ïîýòîìó} \qquad \mu = e^{\int \varphi(\tilde{o})d\tilde{o}} =$$

$$= e^{\int \frac{\tilde{o}}{2} d\tilde{o}} = e^{-2\ln \tilde{o}} = \frac{1}{e^{2\ln \tilde{o}}} = \frac{1}{\left(e^{\ln \tilde{o}}\right)^2} = \frac{1}{x^2}$$

Умножая данное дифференциальное уравнение на интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x^2}$, получаем дифференциальное уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0$$

Группируя члены в левой части этого дифференциального уравнения, имеем

$$\frac{dx}{x^2}-(ydx+xdy)+ydy=0$$

так как

$$\frac{dx}{x^2}=d\left(-\frac{1}{x}\right), \qquad ydx+xdy=d(xy)$$

$$ydy=d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

Тогда

$$\int d\left(-\frac{1}{x}\right)-\int d(xy)+\int d\left(-\frac{y^2}{2}\right)=0$$

Общий интеграл уравнения

ОТВЕТ**:** $$y^2-2xy-\frac{2}{x}=c$$

Решить дифференциальное уравнение

№100 $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0$

Уравнение делим на $-x^2$

$x^2\,dx-y^2\,dx+y\,dx+2\,x\,ydy-xdy=0$

$$-\frac{ydx+xdy}{x^2}-dx+\frac{y^2dx}{x^2}-\frac{2y}{x}dy=0$$

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right)-\int dx=\int d\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

ОТВЕТ: $y=xc+x^2+y^2$

Решить дифференциальное уравнение

№102 $(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0$

$2x^2y^4dx -ydx+4x^2y^3\ xdy -xdy=0$

Уравнение делим на x^2y^2 получим

$$2y^2dx+4xydy-\left(\frac{dx}{x^2y}+\frac{dy}{xy^2}\right)=0$$

$$\int d(2xy^2)+\int d\left(\frac{1}{xy}\right)=0$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{xy}+2xy^2=c$

Решить дифференциальное уравнение

№103 $y(x+y^2)dx+ x^2\ (y-1)dy=0$

Уравнение делим на xy^2

$$ydx+\frac{y^3}{x}dx+xydy-xdy=0$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{y}{x}dx+\frac{x}{y}dy=0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y}{x}dx+\frac{x}{y}dy=0$$

Заменяя $\left|\frac{x}{y}=t, \qquad x=ty, \qquad dx=ydt+tdy\right|$

$$dt+\frac{dx}{t}+tdy=0$$

$$tdt+t^2dy+dx=0$$

$$tdt+t^2dy+tdy+ydt$$

$$(t+y)dt+(t^2+t)dy=0$$

$$y'+\frac{1}{t(t+1)}y=-\frac{1}{t+1}$$

1) $\int\frac{dt}{t(t+1)}=\ln\frac{t}{t+1}$

2) $a)\frac{t}{t+1} \qquad б)\frac{t+1}{t}$

3) $\int-\frac{tdt}{(t+1)^2}=\left|\begin{matrix} u=t & du=dt \\ dV=-\frac{dt}{(t+1)^2} & V=\frac{1}{t+1}\end{matrix}\right|$

$$=\frac{t}{t+1}-\ln|t+1|+c$$

$$y=\frac{t+1}{t}\left(\frac{t}{t+1}-\ln|t+1|+c\right)$$

ОТВЕТ: $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{x(y-1)}{x+y}=c$

§5. Уравнения, не разрешенные относительно производной.

1. Уравнения вида $F(x,y,y')=0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. уравнения $F(x,y,y')=0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y'=f(x,y)$,Каждой из них надо решить.

б) Метод введения параметра.

Пусть уравнение $F(x,y,y')=0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y=f(x,y')$. Введя параметр.

$$p=\frac{dy}{dx}=y' \quad (1).$$

получим

$$y=f(x,p). \ (2).$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив dy через pdx (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x,p)dx+N(x,p)dp=0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x=(\varphi(p)$ то получим x=$\varphi(p)$, y= ($\varphi(p)$, p)

Уравнения вида $x=f(y,y')$ решаются тем же методом.

<u>Пример:</u> Решить уравнение $y=x+y'-lny'$. Вводим параметр $p=y'$:

$$y=x+p-\ln p. \qquad (3)$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем dy на pdx в силу (1): $dy=dx+dp-\frac{dp}{p}, pdx=dx+dp-\frac{dp}{p}.$ Решаем полученное уравнение. Переносим члены с dx влево, с dp- вправо :

$$(p-1)dx=\frac{p-1}{p}dp. \qquad (4)$$

а) Если $p\neq 1$, то сокращаем на $p-1$:

$$dx=\frac{dp}{p}, x=\ln p+c.$$

Поставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи:

$$x=lnp+c, y=p+c \qquad (5)$$

В данном случае можно исключить параметр p и получить решение в явном виде. Для этого из первого из уравнений (5) выражаем p через x, т. е. $p=e^{x-c}$. Поставляя это во второе уравнение, получаем искомое решение:

$$y=e^{x-c}+c. \qquad (6)$$

б) Рассмотрим случай, когда в (4) имеем *p=1*. поставляя *p=1* в (3), получаем еще решение

$$y=x+1. \qquad (7)$$

(Было бы ошибкой в равенстве $p=1$ заменит p на y' и, проинтегрировав, получить $y=x+c$)

2. Решение $y=\varphi(x)$ уравнения $F(x,y,y')=0$ называется особым, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющие в этой точке ту же касательную, что и решение $y=\varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки

Если функция $F(x,y,y')$ и производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x,y,y')=0. \qquad (8)$$

удовлетворяет так же уравнению

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0. \qquad (9)$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить y' из уравнений (8) и (9). Полученное уравнение $\varphi(x,y)=0$ называется уравнением дискриминантной кривой. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли это ветвь решением уравнения (8), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. касаюся ли его в каждой точке другие решения.

Пример. Найти особые решение уравнения

$$y=x+y'-\ln y'. \qquad (10)$$

Дифференцируем обе части равенства по y'

$$0=1-\frac{1}{y'}. \qquad (11)$$

Исключаем y' из уравнений (10) и (11). Из (11) имеем $y'=1$: подставляя это в (10), получаем уравнение дискриминантной кривой

$$y=x+1. \qquad (12)$$

Проверим, будет ли она особым решением, является ли она решением уравнением (10). Подставляя (12) в (10), получаем тожество $x+1=x+1$. Значит, кривая (12) – решение.

Теперь проверим, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. Пишем условия касания кривых $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y_1(x_0)=y_2(x),\ y_1'(x_0)=y_2'(x_0). \qquad (13)$$

Для решений (6) и (12) эти условия принимают вид $e^{x_0-C}+C=x_0+1, e^{x_0-C}=1.$ Из второго равенства имеем $C=x_0;$ подставляя это в первое равенство, получаем $1+x_0=x_0+1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение (12) в точке абсциссой x_0 касается одной из кривых семейства, а именно той кривой, для которой $C=x_0$.

Итак, в каждой точке решение (12) касаются другого решения, не совпадающего с ним. Значит, решение (12) –особое.

Если семейство решений записано в параметрическом виде, как в (5), то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что $y'=p$.

3. Если семейство кривых $\Phi(x,y,C)=0$, являющихся решениями уравнения $F(x,y,y')=0$, имеет огибающую $y=\varphi(x)$, то это огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция Φ имеет непрерывные первые производные, то для отыскание огибающей надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x,y,C)=0, \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C}=0.$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей, т. е. касаются ли ее в каждой точке кривые семейства. Эту проверку можно повести изложенным в конце п. 2 методом, используя условия касания (13).

В задачах 111-120 найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть):

111. $y'^2-y^2=0.$

112. $8y'^3=27y.$

113. $(y'+1)^3=27(x+y)^2.$

114. $y^2(y'^2+1)=1.$

115. $y'^2-4y^3=0.$

116. $y'^2=4y^3(1-y).$

117. $xy'^2=y.$

118. $yy'^3+x=1.$

119. $y'^2+y^2=yy'(y'+1).$

120. $4(1-y)=(3y-2)^2y'^2.$

Уравнения 121-136 разрешить относительно y', после этого общее решение искать обычными методами. Найти также особые решения, если они есть.

121. $y'^2+xy=y^2+xy'.$

122. $xy'(xy'+y)=2y^2.$

123. $xy'^2-2yy'+3=0.$

124. $xy'^2=y(2y'-1).$

125. $y'^2+x=2y.$

126. $y'^3+(x+2)e^y=0.$

127. $y'^2-2xy'=8x^2.$ 128. $(xy'+3y)^2=7x.$

129. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1).$ 130. $y'(2y-y')=y^2\sin^2 x.$

131. $y'^4+y^2=y^4.$ 132. $x(y-xy')^2=xy'^2-2yy'.$

133. $y(xy'-y)^2=y-2xy'.$ 134. $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2.$

135. $y'^2+4xy'-y^2-2x^2y=x^4-4x^2.$ 136. $y(y-2xy')^2=2y'.$

Уравнение 137-156 решить методом введения параметра.

137. $x=y'^3+y'.$ 138. $x(y'^2-1)=2y'.$

139. $x=y'\sqrt{y'^2+1}.$ 140. $y'(x-\ln y')=1.$

141. $y=y'^2+2y'^3.$ 142. $y=\ln(1+y'^2).$

143. $(y'+1)^3=(y'-y)^2.$ 144. $y=(y'-1)e^{y'}.$

145. $y'^4-y'^2=y^2.$ 146. $y'^2-y'^3=y^2$

147. $y'^4=2yy'+y^2.$ 148. $y'^2-2xy'=x^2-4y.$

149. $5y+y'^2=x(x+y').$ 150. $x^2y'^2=xyy'+1.$

151. $y'^3+y^2=xyy'.$ 152. $2xy'-y=y'\ln yy'.$

153. $y'=e^{xy'/y}.$ 154. $y=xy'-x^2y'^3.$

155. $y=2xy'+y^2y'^3.$ 156. $y(y-2xy')^2=y'^2.$

Решить уравнения Лагранжа и Клеро (задачи 157-166).

157. $y=xy'-y'^2.$ 158. $y+xy'=4\sqrt{y'}.$

159. $y=2xy'-4y'^3.$ 160. $y=xy'-(2+y').$

161. $y'^3=3(xy'-y).$ 162. $y=xy'^2-2y'^3.$

163. $xy'-y=\ln y'.$ 164. $xy'(y'+2)=y.$

165. $2y'^2(y-xy')=1.$ 166. $2xy'-y=\ln y'.$

Уравнение не разрешенные относительно производной.

Пример. Найти особое решение дифференциального уравнения.

$$y^2(1+y'^2)=r^2$$

Решение: Найдем его общий интеграл.

Разрешим уравнение относительно y'

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{r^2 - y^2}} = dx$$

Отсюда интегрируя находим общий интеграл

$(x\text{-}c)^2 + y^2 = r^2$

Легко видеть, что семейство интегральных линий представляет собой семейство окружностей радиуса R с центрами на оси абсцисс. Огибающей семейства кривых будет пара прямых $y = \pm R$

Функция $y = \pm R$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$y^2(1 + y'^2) = R^2$ Следовательно, это есть особое решение.

Решить дифференциальное уравнение

№111 $y'^2 - y^2 = 0.$

<u>Решение</u> $y' = \pm y, \quad \ln y = \pm x + c$

Ответ: $\begin{cases} y = ce^{x} \\ y = ce^{-x} \end{cases}$

Решить дифференциальное уравнение

№119. $y'^3+y^2=yy'(y'+1)$

Решение: $y'^3+y^2-yy'^2-yy'=0$

$(y'^3-yy'^2)-(yy'-y^2)=0$

$y'^2(y'-y)-y(y'-y)=0$

$$\begin{cases} y'-y=0 \\ y'^2-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=y \\ y'^2=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=ce^x \\ 4y=(x+c)^2 \end{cases}$$

Найти особое решение.

№157 $y=xy'-y'^2$

Решение: $\begin{cases} y=xy'-y'^2 \\ \dfrac{dF}{dy'}=x-2y'=0 \end{cases}$ $y'=x/2, y=x^2/4$ это является особым решением, потому что оно удовлетворяет данному уравнению.

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение Лагранжа

Y=2xy'-y'^{2}

Решение. Пусть *y'=p*. Тогда заданное уравнение можно записать виде *y=2xp-p*^{2}

так как *dy=ydx=pdx*, что *dy=2(pdx+xdp)-2pdp*, или *pdx+(2x-2p)dp=0*

Разделив на pdp, получаем линейное дифференциальное уравнение

$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=2$ Общее решение этого уравнения

$$x=e^{-2\int\frac{dp}{p}}\left(c+2\int e^{2\int\frac{dp}{p}}dp\right)=e^{-2\ln p}\left(c+2\int e^{2\ln p}dp\right)=p^{-2}\left(c+2\int p^{2}dp\right)=$$

$$=\frac{1}{p^{2}}\left(c+\frac{2}{3}p^{3}\right)=\frac{c}{p^{2}}+\frac{2}{3}p$$

Подставляя найденное общее решение в данное дифференциальное уравнение,

имеем $y=2xp-p^{2}=2\left(\frac{c}{p^{2}}+\frac{2}{3}p\right)p-p^{2}=\frac{2c}{p}+\frac{p^{2}}{3}$

Подставляем p=0 в равенство $y=2xp-p^2$ и получаем частное решение y=0.

<u>Пример</u>**.** Проинтегрировать дифференциальное уравнение Клеро

$Y=xy'+y'^2$

Решение. Заменяя в данном уравнении производную y' на c получаем общее решение $y=xc+c^2$ дифференцируя по C получим

$\begin{cases} y=xe+c^{2}\\ 0=x+2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-2c\\ y=-c^{2}\end{cases}$ из первой системы $c=-\frac{x}{2}$ Подставляя

это значение во второе уравнение системы, получаем особое решение $y = -\frac{x^2}{4}$, которое графически представляет собой огибающую семейства $y = xc + c^2$

§6. Разные уравнения первого порядка.

Решить уравнения 167-286.

167. $xy' + x^2 + xy - y = 0.$

168. $2xy' + y^2 = 1.$

169. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0.$

170. $(xy' + y^2) = x^2 y'.$

171. $y - y' = y^2 + xy'.$

172. $(x + 2y^3)y' = y.$

173. $y^2 - y'e^{2x} = 0.$

174. $x^2 y' = y(x + y).$

175. $(1 - x^2)dy + xydx = 0.$

176. $y'^2 + 2(x-1)y' - 2y = 0.$

177. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'.$

178. $x^2 y' - 2xy = 3y.$

179. $x + yy' = y^2(1 + y'^2).$

180. $y = (xy' + 2y)^2.$

181. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}.$

182. $y'^3 + (3x - 6)y' = 3y.$

183. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}.$

184. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y.$

185. $(x + y)^2 y' = 1.$

186. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 7 = 0.$

187. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy.$

188. $xy' = e^y + 2y'.$

189. $2(x - y^2)dy = ydx.$

190. $x^2 y'^2 + y^2 = 2x(2 - yy').$

191. $dy + (xy - xy^3)dx = 0.$

192. $2x^2 y' = y^2(2xy' - y).$

193. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$

194. $x(x-1)y' + 2xy = 1.$

195. $xy(xy' - y)^2 + 2y' = 0.$

196. $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy.$

197. $y' + y = xy^3.$

198. $(xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0.$

199. $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0.$

200. $3y'^3 - xy' + 1 = 0.$

201. $yy' + y^2 ctgx = \cos x.$

202. $(e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0.$

203. $xy'^2 = y - y'.$

204. $x(x+1)(y' - 1) = y.$

205. $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}.$

206. $xy' + y = \ln y'.$

207. $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx.$

208. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y.$

209. $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1.$

210. $y'^2 - yy' + e^x = 0.$

211. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y.$

212. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1.$

213. $(4xy - 3)y' + y^2 = 1.$

214. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}.$

215. $xy' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y.$

216. $3y'^4 = y' + y.$

217. $y^2(y - xy') = x^3 y'.$

218. $y' = (4x + y - 3)^2.$

219. $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0.$

220. $x^2 y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2.$

221. $\dfrac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0.$

222. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y.$

223. $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$

224. $(2xe^y - y^4)y' = ye^y.$

225. $xy'(\ln y - \ln x) = y.$

226. $2y' = x + \ln y'.$

227. $(2x^2 y - 3y^2)y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1.$

228. $yy' = 4x + 3y - 2.$

229. $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 ctgx.$

230. $2xy' - y = \sin y'.$

231. $(x^2 y^2 + 1)y + (xy - 1)^2 xy' = 0.$

232. $y \sin x + y' \cos x = 1.$

233. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}\, dx.$

234. $y^2 + x^2 y'^5 = xy(y'^2 + y'^3).$

235. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2.$

236. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$

237. $2(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2})dx + x^3 dy = 0.$

238. $(y' - x\sqrt{y})(x^2 - 1) = xy.$

239. $y'^3 + (y'^2 - 2y')x = 3y' - y.$

240. $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dx = 0.$

241. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

242. $y = y'\sqrt{1 + y'^2}.$

243. $y^2 = (xyy' + 1)\ln x.$

244. $4y = x^2 + y'^2.$

245. $2xdy + ydx + xy^2(xdy + ydx) = 0.$

246. $xdx + (x^2 ctgy - 3\cos y)dy = 0.$

247. $x^2 y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0.$

248. $xy' + 1 = e^{x-y}.$

249. $y' = tg(y - 2x).$

250. $3x^2 - y = y'\sqrt{x^2 + 1.}$

251. $yy' + xy = x^3.$

252. $x(x - 1)y' + y^3 = xy.$

253. $xy' = 2y + \sqrt{1 + y'^2}.$

254. $(2x + y + 5)y' = 3x + 6.$

255. $y' + tgy = x\sec y.$

256. $y'^4 + 4y(xy' - 2y)^2.$

257. $y' = \dfrac{y^2 - x}{2y(x + 1)}.$

258. $xy' = x^2 e^{-y} + 2.$

259. $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}.$

260. $xdy - 2ydx + xy^2(2xdy + ydx) = 0.$

261. $(x^3 - 2xy^2)dx + 3x^2 ydy = xdy - ydx.$

262. $(yy')^3 = 27x(y^2 - 2x^2).$

263. $y' - 8x\sqrt{y} = \dfrac{4xy}{x^2 - 1}.$

264. $[2x - \ln(y + 1)]dx - \dfrac{x + y}{y + 1}dy = 0.$

265. $xy' = (x^2 + tgy)\cos^2 y.$

266. $x^2(y - xy') = yy'^2.$

267. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}.$

268. $y' = \dfrac{(1 + y)^2}{x(y + 1) - x^2}.$

269. $(y - 2xy')^2 = yy'^3.$

270. $6x^5 ydx + (y^4 \ln y - 3x^6)dy = 0.$

271. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}.$

272. $2xy' + 1 = y + \dfrac{x^2}{y - 1}.$

273. $yy' + x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)^2.$

274. $y' = \left(\dfrac{3x + y^3 - 1}{y}\right)^2.$

275. $(x\sqrt{y^2 + 1} + 1)(y^2 + 1)dx = xydy.$

276. $(x^2 + y^2 + 1)yy' + (x^2 + y^2 - 1)x = 0.$

277. $y^2(x - 1)dx = x(xy + x - 2y)dy.$

278. $(xy' - y)^2 = x^2 y^2 - x^4.$

279. $xyy' - x^2\sqrt{x^2 + 1} = (x + 1)(y^2 + 1).$

280. $(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$

281. $y' tgy + 4x^3 \cos y = 2x.$

282. $(xy' - y)^2 = y'^2 - \dfrac{2yy'}{x} + 1.$

283. $(x + y)(1 - xy)dx + (x + 2y)dy = 0.$

284. $(3xy + x + y)ydx + (4xy + x + 2y)xdy = 0.$

285. $(x^2 - 1)dx + (x^2 y^2 + x^3 + x)dy = 0.$

286. $x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'.$

Ответы:

1. $y = C(x+1)e^{-x}; x = -1.$
2. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}; x = 0.$
3. $y(\ln|x^2-1| + C) = 1, y = 0; y[\ln(1-x^2)+1] = 1.$
4. $y = 2 + C\cos x; y = 2 - 3\cos x.$
5. $y = (x-C)^3; y = 0; y = (x-2)^3; y = 0.$
6. $y(1-Cx) = 1; y = 0; y(1+x) = 1.$
7. $y^2 - 2 = Ce^{1/x}.$
8. $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2; y = 0.$
9. $e^{-s} = 1 + Ce^t.$
10. $z = -\lg(C - 10^x).$
11. $x^2 + t^2 - 2t = C.$
12. $ctg\,\dfrac{y-x}{2} = x + C; y - x = 2\pi r, r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
13. $2x + y - 1 = Ce^x.$
14. $x + 2y + 2 = Ce^y.$
15. $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1} + 2) = x + c.$
16. $x + y = Cx^2; x = 0.$
17. $\ln(x^2+y^2) = C - 2arctg(y/x).$
18. $x(y-x) = Cy; y = 0.$
19. $x = \pm y\sqrt{\ln Cx}; y = 0.$
20. $y = Ce^{y/x}.$
21. $y^2 - x^2 = Cy, y = 0.$
22. $\sin\dfrac{y}{x} = Cx.$
23. $y = -x\ln\ln Cx.$
24. $\ln\dfrac{x+y}{x} = Cx.$
25. $\ln Cx = ctg\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}\right); y = xe^{2\pi\Re}, \Re = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
26. $x\ln Cx = 2\sqrt{xy}; y = 0, x = 0.$
27. $\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln Cx \cdot \operatorname{sgn} x; y = \pm x.$
28. $(y-2x)^3 = C(x-y-1)^2; y = x + 1.$
29. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}.$
30. $(y-x+2)^2 + 2x = C.$
31. $(y-x-5)^5(x+2y-2) = C.$

32. $(y+2)^2 = C(x+y-1); y = 1-x.$

33. $y+2 = Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}.$

34. $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1+\frac{C}{x+y}.$

35. $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x+1).$

36. $x^2 = (x^2-y)\ln Cx; y = x^2.$

37. $x = -y^2\ln Cx; y = 0.$

38. $x^2y^4\ln Cx^2 = 1; y = 0; x = 0.$

39. $y^2e^{-1/xy} = C; y = 0; x = 0.$

40. $(2\sqrt{y}-x)\times\ln C(2\sqrt{y}-x) = x; 2\sqrt{y} = x.$

41. $1-xy = Cx^3(2+xy); xy = -2.$

42. $2\sqrt{(1/xy^2)-1} = -\ln Cx; xy^2 = 1; y = 0.$

43. $\arcsin\frac{y^2}{|x^3|} = \ln Cx^3; |x^3| = y^2.$

44. $x^2y\ln Cy = 1; y = 0.$

45. $y = Cx^2 + x^4.$

46. $y = (2x+1)(C+\ln|2x+1|.)+1$

47. $y = \sin x + C\cos x.$

48. $y = e^x(\ln|x|+C); x = 0.$

49. $xy = C - \ln|x|.$

50. $y = x(C+\sin x).$

51. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1.$

52. $y = C\ln^2 x - \ln x.$

53. $xy = (x^3+C)e^{-x}.$

54. $x = y^2 + Cy; y = 0.$

55. $x = e^y + Ce^{-y}.$

56. $x = (C-\cos y)\sin y.$

57. $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2.$

58. $x = Cy^3 + y^2; y = 0.$

59. $(y-1)^2x = y - \ln Cy; y = 0; y = 1.$

60. $y(e^x + Ce^{2x}) = 1; y = 0.$

61. $y(x+1)(\ln|x+1|+C) = 1; y = 0.$

62. $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x; y = 0.$

63. $y^3 = Cx^3 - 3x^2.$

64. $y^2 = Cx^2 - 2x, x = 0.$

65. $y = x^4 \ln^2 Cx; y = 0.$

66. $y^{-2} = x^4(2e^x + C); y = 0.$

67. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}.$

68. $x^2(C - \cos y) = y; y = o.$

69. $xy(C - \ln^2 y) = 1.$

71. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}; y = \dfrac{2}{x}.$

72. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Cx^{2/3} + x}; y = \dfrac{1}{x}.$

73. $y = x + \dfrac{x}{x + C}; y = x.$

74. $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1}; y = x + 2.$

75. $y = e^x - \dfrac{1}{x + C}; y = e^x.$

76. $x^2 y - \dfrac{y^3}{3} = C.$

77. $x^2 - 3x^3 y^2 + y^4 = C.$

78. $xe^{-y} - y^2 = C.$

79. $4y \ln x + y^4 = C.$

80. $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C.$

81. $x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C.$

82. $x - y^2 \cos^2 x = C.$

83. $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C.$

84. $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y.$

85. $2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$

86. $x + arctg\,\dfrac{x}{y} = C.$

87. $\sqrt{1 + y^2} = xy + C.$

88. $2x^3 y^3 - 3x^2 = C.$

89. $y^2 = x^2(C - 2y); x = 0.$

90. $(x^2 - C)y = 2x.$

91. $x^2 + \ln y = Cx^3; x = 0.$

92. $y \sin xy = C.$

93. $\dfrac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = C; y = 0.$

94. $-x + 1 = xy(arctgy + C); x = 0; y = 0.$

95. $x + 2\ln|x| + \dfrac{3}{2}y^2 - \dfrac{y}{x} = C; x = 0.$

96. $\sin\frac{y}{x}Ce^{-x^2}$.

97. $\ln|y|-ye^{-x}=C;\, y=0.$

98. $\ln(\frac{x^2}{y^2}+1)=2y+C;\, y=0.$

99. $x^2y\ln cxy=-1;\;\; x=0;\;\; y=0.$

100. $x^2+y^2=y+Cx;\, x=0.$

101. $x^2y+\ln|x/y|=C;\, x=0;\, y=0.$

102. $2xy^2+(1/xy)=C;\, x=0;\, y=0.$

103. $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C;\, y=0;\, y=-x.$

104. $\sin^2 y=Cx-x^2;\, x=0.$

105. $y=C\ln x^2y.$

106. $\sin y=-(x^2+1)\ln C(x^2+1).$

107. $xy(C-x^2-y^2)=1;\, x=0;\, y=0.$

108. $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}.$

109. $x\sqrt{1+(y^2/x^2)}+\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+(y^2/x^2)}\right)=C;\, x=0.$

110. $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy};\, x=0;\, y=0.$

111. $y=Ce^{\pm x}.$

112. $y^2=(x+C)^3;\, y=0.$

113. $y+x=(x+C)^3;\, y=-x.$

114. $(x+C)^2+y^2=1;\, y=\pm 1.$

115. $y(x+C)^2=1;\, y=0.$

116. $y[1+(x-C)^2]=1;\, y=0;\, y=1.$

117. $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2;\, y=0.$

118. $(y-x)^{4/3}+y^{4/3}=C.$

119. $4y=(x+C)^2;\, y=Ce^x.$

120. $y^2(1-y)=(x+C)^2;\, y=1.$

121. $y=Ce^x;\, y=Ce^{-x}+x-1.$

122. $x^2y=C;\, y=Cx.$

123. $x^2+C^2=2Cy;\, y=\pm x.$

124. $(x+C)^2=4Cy;\, y=0;\, y=x.$

125. $\ln\left|1\pm 2\sqrt{2y-x}\right|=2(x+C\pm\sqrt{2y-x});8y=4x+1.$

126. $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+C.$

127. $y=2x^2+C;\, y=-x^2+C.$

128. $y=Cx^{-3}\pm 2\sqrt{x/7}.$

129. $\ln Cy=x\pm 2e^{x/2},\, y=0.$

130. $\ln Cy=x\pm\sin x;\, y=o.$

131. $arctgu+\frac{1}{2}\ln\left|(u-1)/(u+1)\right|=\pm x+C,$ где $u=\sqrt{1-(1/y^2)};\ y=0;\ y=\pm 1.$

132. $x^2+(Cy+1)^2=1;\ y=0.$

133. $(Cx+1)^2=1-y^2;\ y=\pm 1.$

134. $2(x-C)^2+2y^2=C^2;\ y=\pm x.$

135. $y=Ce^{\pm x}-x^2.$

136. $y^2=C^2x-C; 4xy^2=-1.$

137. $x=p^3+p, 4y=3p^4+2p^2+C.$

138. $x=\frac{2p}{p^2-1}, y=\frac{2}{p^2-1}-\ln\left|p^2-1\right|+C.$

139. $x=p\sqrt{p^2+1}, 3y=(2p^2-1)\sqrt{p^2+1}+C.$

140. $x=\ln p+(1/p), y=p-\ln p+C.$

141. $x=3p^2+2p+C, x=2p^3+p^2;\ y=0.$

142. $x=2arctgp+C, y=\ln(1+p^2);\ y=0.$

143. $x=\ln|p|\pm\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1}\right|\pm 3\sqrt{p+1}+C, y=p\pm(p+1)^{3/2};\ y=\pm 1.$

144. $x=e^p+C, y=(p-1)e^p;\ y=-1.$

145. $x=\pm\left(2\sqrt{p^2-1}+\arcsin\frac{1}{|p|}\right)+C, y=\pm p\sqrt{p^2-1};\ y=0.$

146. $x=\pm\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right|+3\sqrt{1-p}\right)+C, y=\pm p\sqrt{1-p};\ y=0.$

147. $x=\pm 2\sqrt{1+p^2}-\ln(\sqrt{p^2+1}\pm 1)+C, y=-p\pm p\sqrt{p^2+1};\ y=0.$

148. $4y=C^2-2(x-C)^2; 2y=x^2.$

149. $x=-\frac{p}{2}+C, 5y=C^2-\frac{5p^2}{4};\quad x^2=4y.$

150. $\pm xp\sqrt{2\ln Cp}=1, y=\mp\left(\sqrt{2\ln Cp}-\frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right).$

151. $pxy=y^2+p^3, y^2(2p+C)=p^4;\ y=0.$

152. $y^2=2Cx-C\ln C; 2x=1+2\ln|y|.$

153. $Cx=\ln Cy;\ y=ex.$

154. $xp^2=C\sqrt{|p|}-1, y=xp-x^2p^3;\ y=0.$

155. $2p^2x=C-C^2p^2, py=C;\ 32x^3=-27y^4;\quad y=0.$

156. $y^2=2C^3x+C^2; 27x^2y^2=1.$

157. $y=Cx-C^2; 4y=x^2.$

158. $x\sqrt{p}=\ln p+C, y=\sqrt{p}(4-\ln p-C);\ y=0.$

159. $x=3p^2+Cp^{-2}, y=2p^3+2Cp^{-1};\ y=0.$

160. $y=Cx-C-2.$

161. $C^3=3(Cx-y); 9y^2=4x^3.$

162. $x=C(p-1)^{-2}+2p+1, y=Cp^2(p-1)^{-2}+p^2; y=0; y=x-2.$
163. $y=Cx-\ln C; y=\ln x+1.$
164. $y=\pm2\sqrt{Cx}+C; y=-x.$
165. $2C^2(y-Cx)=1; 8y^3=27x^2.$
166. $xp^2=p+C, y=2+2Cp^{-1}-\ln p.$
167. $y=x(Ce^{-x}-1).$
168. $(Cx+1)y=Cx-1; y=1.$
169. $y(x^2-C)=x; y=0.$
170. $x(C-y)=C^2; x=4y.$
171. $y(x+C)=x+1; y=0.$
172. $x=Cy+y^3; y=0.$
173. $y=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$
174. $y\ln Cx=-x; y=0.$
175. $y^2=C(x^2-1); x=\pm1.$
176. $2y=2C(x-1)+C^2; 2y=-(x-1)^2.$
177. $x=Cy+\ln^2 y.$
178. $y=Cx^2e^{-3/x}.$
179. $(x-C)^2+y^2=C; 4(y^2-x)=1.$
180. $4x^2y=(x+2C)^2; y=0.$
181. $x=Ce^y+y^2+2y+2.$
182. $3y=3C(x-2)+C^3; 9y^2=4(2-x)^3.$
183. $y^2=C(xy-1); xy=1.$
184. $4(x-C)^3=27(y-C)^2; y=x-1.$
185. $x+y=tg(y-C).$
186. $x^3y^2+7x=C.$
187. $y(xy-1)=Cx.$
188. $-e^{-y}=\ln C(x-2).$
189. $x=y^2(C-2\ln|y|); y=0.$
190. $3xy=C\pm4x^{3/2}.$
191. $y^2(Ce^{x^2}+1)=1; y=0.$
192. $y^2=2x\ln Cy; y=0.$
193. $\ln(x^2+y^2)+arctg(y/x)=C.$
194. $(x-1)^2y=x-\ln|x|+C.$
195. $C^2x^2+2y^2=2C; 2x^2y^2=1.$
196. $y(C\sqrt{|x^2-1|}-2)=1; y=0.$
197. $y^2(Ce^{2x}+x+0,5)=1; y=0.$
198. $y^2-1=C(x+1)^4e^{-4x}(y^2+1); x=-1.$

199. $y\sin x-\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=C.$

200. $x=3p^2+p,^{-1}\ y=2p^3-\ln|p|+C.$

201. $3y^2=2\sin x+C\sin^{-2}x.$

202. $x(e^y+xy)=C.$

203. $x(p-1)^2=\ln Cp-p, y=xp^2+p; y=0; y=x+1.$

204. $(x+1)y=x^2+x\ln Cx.$

205. $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C.$

206. $px=C\sqrt{p}-1, y=\ln p-C\sqrt{p}+1.$

207. $y=xtg\ln Cx; x=0.$

208. $y^{2/3}=Ce^{2x}+(x/3)+(1/6); y=0.$

209. $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y).$

210. $Cy=C^2e^x+1; y=\pm 2e^{x/2}.$

211. $y^2=(x^2+C)e^{2x}.$

212. $y=Cx-\sqrt[3]{C^3-1}; y^3=-(x^{3/2}\pm 1)^2.$

213. $x(y^2-1)^2=y^3-3y+C.$

214. $\sqrt{y-x}-\sqrt{x}=C; y=x.$

215. $x\sqrt{y}=\sin x+C; y=0.$

216. $x=4p^3-\ln Cp, y=3p^4-p; y=0.$

217. $y^2+2x^2\ln Cy=0; y=0.$

218. $4x+y-3=2tg(2x+C).$

219. $xy\cos x-y^2=C.$

220. $4Cxy=C^2x^4-1.$

221. $xy(\ln^2 x+C)=1.$

222. $2\sqrt{y-x^2}=x\ln Cx; y=x^2.$

223. $(y^2/2)-(1/x)-xy=C; x=0.$

224. $x=Cy^2-y^2(y+1)e^{-y}; y-0.$

225. $y(\ln y-\ln x-1)=C.$

226. $x=2p-\ln p, y=p^2-p+C.$

227. $2x^3-x^2y^2+y^3+x=C.$

228. $(y-4x+2)^4(2y+2x-1)=C.$

229. $y^3=(C-x^3)\sin^3 x.$

230. $p^2x=p\sin p+\cos p+C, py=p\sin p+2\cos p+2C; y=0.$

231. $x^2y^2-1=xy\ln Cy^2; y=0.$

232. $y=C\cos x+\sin x.$

233. $|x|=\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)+C; x=0.$

234. $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2; y^{2/3}-x^{2/3}=C; y=0.$

235. $27(y-2x)^2=(C-2x)^3; y=2x.$

236. $\sin(y/x) = -\ln Cx.$

237. $x^2(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}) = C.$

238. $3\sqrt{y} = x^2 - 1 + C\sqrt[4]{|x^2-1|};\ y = 0.$

239. $x = \frac{C}{p^2} - p - \frac{3}{2},\ y = C\left(\frac{2}{p} - 1\right) - \frac{p^2}{2};\ y = x + 2;\ y = 0.$

240. $(2x + 3y - 7)^3 = Ce^{x+2y}.$

241. $(x^2 + y + \ln Cy)y = x;\ y = 0.$

242. $x = 2\sqrt{p^2+1} - \ln(1 + \sqrt{p^2+1}) + \ln Cp,\ y = p\sqrt{p^2+1};y = 0.$

243. $y^2 = C\ln^2 x + 2\ln x.$

244. $x = Cue^u, 4y = C^2e^{2u}(2u^2 + 2u + 1);\ x^2 = 2y.$

245. $xy^2 \ln Cxy = C;\ x = 0;\ y = 0.$

246. $x^2 \sin^2 y = 2\sin^3 y + C.$

247. $y = 2C - C^2x;\ xy = 1.$

248. $xe^y = e^x + C.$

249. $\sin(y - 2x) - 2\cos(y - 2x) = Ce^{x+2y}.$

250. $y = (2x + C)\times\sqrt{x^2+1} - x^2 - Cx - 2.$

251. $(y + x^2)^2(2y - x^2) = C.$

252. $(x-1)^2 = 2y^2(x - \ln Cx);\ y = 0.$

253. $x = p\left[\ln(1 + \sqrt{p^2+1}) - \ln Cp\right], 2y = xp - \sqrt{p^2+1}; 2y = -1.$

254. $(y + 3x + 7)(y - x - 1)^3 = C.$

255. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1.$

256. $y = C^2(x - C)^2; 16y = x^4.$

257. $y^2 = x - (x+1)\ln C(x+1).$

258. $e^y = x^2 \ln Cx.$

259. $(y - 2x\sqrt{y - x^2})\times(2\sqrt{y - x^2} + x) = C.$

260. $xy^2 = \ln x^2 - \ln Cy;\ x = 0;\ y = 0.$

261. $x(y^2 + x^2)^3 = \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{3}x^2y^3 + 2x^4y + Cx^5;\ x = 0.$

262. $(u-1)\ln Cx^6(u-1)^5\times(u+2)^4 = 3,$ где $u^3 = (y^2/x^2) - 2;\ y^2 = 3x^2.$

263. $\sqrt{y} = (x^2 - 1)(2\ln|x^2 - 1| + C);\ y = 0.$

264. $x^2 - (x-1)\ln(y+1) - y = C.$

265. $tgy = x^2 + Cx;\ y = (2\Re + 1)\pi/2, \Re = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

266. $y^2 = Cx^2 + C^2.$

267. $x^3 = Ce^y - y - 2.$

268. $y + 1 = x\ln C(y+1);\ y = -1.$

269. $y^2 = 2C^2(x - C); 8x^3 = 27y^2.$

270. $x^6 = y^3(C - y\ln y + y);\ y = 0.$

271. $\ln C(u-\upsilon)^3\left(u^2+u\upsilon+\frac{\upsilon^2}{3}\right)^2=2arctg\frac{2u+\upsilon}{\upsilon}$, где $u^3=y,\upsilon^2=x; y^2=x^3.$

272. $(y-1)^2=x^2+Cx.$

273. $(x^2+y^2)\times(Cx+1)=x.$

274. $3x+y^3-1=tg(3x+C).$

275. $(C-x^2)\times\sqrt{y^2+1}=2x.$

276. $(x^2+y^2+1)^2=4x^2+C.$

277. $xy-x=y(y-x)\ln|Cy/(y-x)|; x=0; y=0; y=x.$

278. $y=\pm x\ln(x+C); y=\pm x.$

279. $\sqrt{y^2+1}=x(Ce^x-1).$

280. $(y-x)\ln C\frac{x-1}{x+1}=2; y=x.$

281. $(Ce^{x^2}+2x^2+2)\cos y=1.$

282. $(y^2-Cx^2+1)^2=4(1-C)y^2; y=\pm x.$

283. $y^2+xy-1=Ce^{x^2/2}.$

284. $6x^3y^4+2x^3y^3+3x^2y^4=C.$

285. $x+\frac{1}{x}+y^2-2y+2=Ce^{-y}; x=0.$

286. $e^y(C^2x^2+1)=2C; x^2=e^{-2y}.$

Тестовые задания.

Интегрирование дифференциальных уравнений разрешенных относительно производной.

1. Решить дифференциальные уравнения.

$y' = \frac{2x}{x^2+1}$

а) y=ln(x^2+1)+c
б) y=ln(x+1)+c
в) y=2xln(x^2+1)+c
г) y=xln(x^2+1)+c

2. Решить дифференциальные уравнения.

$y'=\cos^2 x$

а) y=$\frac{1}{2}$ (x + $\frac{1}{2}$ sin2x)+c

в) y=(1 + $\frac{1}{2}$ cos2)+c

б) y=(x + $\frac{1}{2}$ sin x)+c

г) y=$\frac{1}{2}$ (x +sin x)+c

3. Решить дифференциальные уравнения.

$y'=2x$

а) y’=x^2+c

в) y=$\frac{x^2}{2}$ +c

б) y=2

г) y=2x+c

4.Решить дифференциальные уравнения.

$y' = \frac{y}{x}$

а) y=cx б) y=x

в) $y=x^2+c$ г) y=x+c

5. Решить дифференциальные уравнения.

$y'=3x-1$

а) $y=\frac{3x^2}{2}-x+c$ б) $y=x^2+c$

в) $y=3x^2-x+c$ г) $y=\frac{3x^2}{2}-x$

6. Решить дифференциальные уравнения.

$y'=$ ctgx

а) y=ln(sinx)+c б) y=ln(cosx)+c

в) y=ln(tgx)+c г) y=lnx+c

7. Решить дифференциальные уравнения.

$y'=$ lnx+1

а) y=xlnx+c **б) y=lnx+1**

в) $y=\ln^2x+x+c$ **г) y=xlnx**

Интегрирование дифференциальных уравнений с разделенными переменными.

8. Решить дифференциальные уравнения.

$x^2dx+(y+1)dy=0$

а) $\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y=c$ **б)** $x^3+y^2+y=c$

в) $2x+1=c$ **г)** $x^3+y^2+x=c$

9. Решить дифференциальные уравнения.

$(x+2x^3)dx+(y+2y^3)dy=0$

а) $x^2+y^2+x^4+y^4=c^2$ **б)** $x \quad + y \quad + x^4+y^4=c^2$

в) $x^2+y^2=c^2$ **г)** $x^3+y^4+ \quad y \quad =c^2$

10. Решить дифференциальные уравнения.

$\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{dx}{\sqrt{y}}=0$

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ **б)** $x+y=c$

в) $\sqrt{x}+y=c$ **г)** $x^2+y^2=c$

Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющемся переменными.

11. Решить дифференциальные уравнения.

$xdy = ydx$

а) $y = cx$ **б)** $y = x^2 c$

в) $y = x + c$ **г)** $y = cx + x^2$

12. Решить дифференциальные уравнения.

$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$

а) $(1+x^2)(1+y^2) = c^2$ **б)** $(1+x)(1+y) = c^2$

в) $(1+x^2)y = c$ **г)** $(1+y^2)x = c$

13. Решить дифференциальные уравнения.

$y' = \frac{y-1}{x+1}$

а) $y = 1 + c(x+1)$ **б)** $y = x^2 + 1 + y^2 + c$

в) $y = c + x + y$ **г)** $y = 1 + c(x^2 + 1)$

14. Решить дифференциальные уравнения.

$y' = y \cos x$

а) $y = e^{\sin x} + c$ **б)** $y = \sin x + c$

в) $y = e^{\cos x} + c$ **г)** $y = y^2 + \sin x + c$

Интегрирование однородных дифференциальных уравнений.

15. Решить дифференциальные уравнения.

$x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

а) $x^3 + 3x^2 y - y = c$ **б)** $x^3 - y = c$

в) $x^3 + 3x^2 - y = c$ **г)** $x^3 + 3xy - y = c$

16. Решить дифференциальные уравнения.

$y' = \frac{x-y}{x-2y}$

а) $x^3 + 2x^2 + 2y^2 = c$ **б)** $x^3 + 2x^2 = c$

в) $x^3 - xy + y^2 = c$ **г)** $x + xy + y = c$

17. Решить дифференциальные уравнения.

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$

а) $x^2 + y^2 = c$ **б)** $x - y = c$

в) $\ln y = \ln x * c$ **г)** $x^2 + y^2 = c$

18. Решить дифференциальные уравнения.

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

а) $x^2 + y^2 - cy = 0$ **б)** $x^2 + y^2 = c$

в) $x^2 - cy = 0$ **г)** $x + y - cy = 0$

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений.

19. Решить дифференциальные уравнения.

$$xy' - 3y = x^2$$

а) $y = cx^3 - x^2$ **б)** $y = cx^2 - x$

в) $y = cx^2$ **г)** $y = c - x^2$

20. Решить дифференциальные уравнения.

$$y' + \frac{2}{x} y = x^3$$

а) $y = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{c}{x^2}$ **б)** $y = x^4 + x^2 c$

в) $y = x^2 + xc$ **г)** $y = \dfrac{x^4}{2} + cx^2$

21. Решить дифференциальные уравнения.

$$y' + \frac{1}{x} y = 4x^2$$

а) $y = \dfrac{c}{x} + x^3$ **б)** $y = c + x^3$

в) $y = cx^2 + x^3$ **г)** $y = c + x$

22. Решить дифференциальные уравнения.

$$y + y = c^x$$

а) $y = ce^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$ **б)** $y = ce^x + e^{-x}$

в) $y = e^x + \dfrac{ce^x}{2}$ **г)** $y = e^x + \dfrac{e^x}{c}$

Уравнение Бернулли.

23. Решить уравнение Бернулли.

$$y' - 2xy = 2x^3 y^2$$

а) $y = \dfrac{1}{ce^{-x^2} + 1 - x^2}$ **б)** $y = ce^{x^2} + 1 - x^2$

в) $y=\dfrac{1}{e^x+c-x^2}$ **г)** $y=cx^2+1-x^2$

24. Решить уравнение Бернулли.

$3y^2y'+y^3+x=0$

а) $y^3=ce^{-x}-x+1$ **б)** $y=ce^x+x+1$

в) $y^2=ce^2+x+1$ **г)** $y^2=e^x+ex+1$

25. Решить уравнение Бернулли.

$xy'+y=y^2\ln x$

а) $\dfrac{1}{y}=cx+\ln x+1$ **б)** $y=cx+\ln x+1$

в) $x^2-y=x+\ln x+c$ **г)** $\dfrac{1}{y}=x+\ln x+c$

26. Решить уравнение Бернулли.

$xy'+y=-x^2y^2$

а) $y=\dfrac{1}{cx+x^2}$ **б)** $xy=cx+x^2$

в) $y=\dfrac{1}{cx+1}$ **г)** $y=cx+x^3$

Интегрирование дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

27. Решить дифференциальные уравнения.

$xdx+ydy=0$

а) $x^2+y^2=c$ **б)** $x^2-y^2=c$

в) $x-y=c$ **г)** $x+y=c$

28. Решить дифференциальные уравнения.

$\dfrac{1}{x}dy-\dfrac{y}{x^2}dx=0$

а) $\dfrac{y}{x}=c$ **б)** $y=-cx$

в) $y-x=c$ **г)** $\dfrac{y}{x}=cx$

29. Решить дифференциальные уравнения.

$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$

а) $x^2+y^2-xy+x-y=c$ **б)** $x+y-xy=c$

в) $x^2+y^2-xy=c$ **г)** $xy+x-y=c$

Уравнения Лагранжа и Клеро.

30. Решить уравнение.

$y = 2xy' - y'^2$

а) $y = \frac{2c}{p} + \frac{p^2}{3}$ **б)** $y = 2c + p^2$

в) $y = \frac{2}{p} + p^2 + c$ **г)** $y = 2pc + p^2$

31. Решить уравнение.

$2yy' = x(y'^2 + 4)$

а) $y = cx^2 + \frac{1}{c}$ **б)** $y = x^2 + c$

в) $y = cx^2$ **г)** $y = x + \frac{x}{c}$

32. Решить дифференциальное уравнение.

$y = xy' - y'^2$

а) $y = cx - c^2$ **б)** $y = cx - c$

в) $y = cx$ **г)** $y = cx^2 - c$

33. Решить дифференциальное уравнение.

$y = yy'^2 + 2xy$

а) $3cx = c^2 - y^2$ **б)** $x = x^2 - y^2 + c$

в) $cx = x^2 - y^2$ **г)** $cx = x^2 + y^2$

Интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков путем понижения порядка.

34. Решить дифференциальное уравнение.

$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

а) $y = -\ln\cos x + c_1 x + c_2$ б) $y = \cos x + c_1 x + c_2$

в) $y = \ln\sin x + c_1 + c_2$ г) $y = \ln\cos x + \ln\sin x c_1 + c_2$

35. Решить дифференциальное уравнение.

$y''' = -\cos x$

а) $y = \sin x + c_1 x^2 + c_2 x + c^3$ б) $y = c_1 x^2 + c_2 + c_3$

в) $y = \sin x + \cos x + c_1 + c_2 x + c_3$

36. Решить дифференциальное уравнение.

$y''^3 - 1 = 0$

а) $y = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ б) $y = x^3 + c_1 x^2 + c_2$

в) $y = x^2 + c_1 x^2 + c_2$ г) $y = x^3 + c_1 x^2 + c_2$

Дифференциальные уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных.

37. Решить дифференциальное уравнение.

$4y'^2 = 9x$

а) $y = x\sqrt{x} + c$ б) $y = \sqrt{x} + c$

в) $y = x^2 + c$ г) $y = x\sqrt{x} + x^2 + c$

38. Решить дифференциальное уравнение.

$xy'' - y' = 0$

а) $y = c_1x^2 + c_2$ б) $y = c_1x + c_2$

в) $y = c_1x + c_2x^3$ г) $y = c_1x^3 + c_2x + x$

39. Решить дифференциальное уравнение.

$(1+x)y'' + y' = 0$

а) $y = c_1 \ln(1+x) + c_2$ б) $y = \ln(1+x) + c_1$

в) $y = c_1 \ln x + c_2$ г) $y = c_1 \ln(x+2) + c_2$

Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной.

40. Решить дифференциальное уравнение.

$yy'' = y'^3$

а) $y \ln y + x + c_1 y + c_2 = 0$ б) $y \ln y + c_1 x + c_2 = 0$

в) $y \ln x + c_1 y + c_2 x = 0$ г) $y + c_1 x + c_2 y + x = 0$

41. Решить дифференциальное уравнение.

$8y'^3 = 27y$

а) $y = (x+c)^{3/2}$ б) $y = \sqrt{x+c}$

в) $y = (x+1)^2 + c$ г) $y = (x+c)^3 + x$

42. Решить дифференциальное уравнение.

$y'^3 - 27y^2 = 0$

а) $y = (x+c)^3$ б) $y = (x^2+c)^2$

в) $y = (x^3+c)^3$ г) $y = (x+c) + x^2$

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

43. Решить дифференциальное уравнение.

$y'' - y'2y = 0$

а) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ б) $y = c_1e^{x} + c_2e^{x2}$

в) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$ г) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x}$

44. Решить дифференциальное уравнение.

$y'' + 2y' + y = 0$

а) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x}$ б) $y = c_1e^{x} + c_2e^{x}$

в) $y = c_1e^{2x} + c_2x$ г) $y = c_1e^{x} + c_2x^2e^{x}$

45. Решить дифференциальное уравнение.

$y'' + 6y' + 8y = 0$

а) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}$ б) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

в) $y = c_1e^{-x} + c_2y^{-4ч}$ г) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

46. Решить дифференциальное уравнение.

$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

а) $y = e^{2x}(c_1 + c_2x + c_3x^2)$ б) $y = e^{x}(c_1 + c_2x^2 + c_3e^{x})$

в) $y = e^{x}(c_1 + c_2x^3)$ г) $y = e^{2x}(c_1x^2 + c_2x^3)$

47. Решить дифференциальное уравнение.

$y''+4y=0$

а) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ б) $y=c_1\cos x+c_2\cos x$

в) $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ г) $y=c_1\sin x+c_2\sin x$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

48. Решить дифференциальное уравнение.

$y''-y=x^2-x+1$

а) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-x^2+x-3$ б) $y=c_1e^x+c_2e^x+x+z$

в) $y=c_1e^x+c_2e^x+x^2$ г) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+x-3$

49. Решить дифференциальное уравнение.

$y''+y=4e^x$

а) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+2e^x$ б) $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

в) $y=c_1\cos x+e^x$ г) $y=c_1\sin x+e^x$

50. Решить дифференциальное уравнение.

$y''+y=2x$

а) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-2x$ б) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

в) $y=c_1x+c_2x^2e^x$ г) $y=c_1e^x+2x$

Уравнения Эйлера.

51. Решить уравнение Эйлера.

$x^2y''-3xy'+3y=0$

а) $y=c_1x+c_2x^3$ б) $y=c_1x+c_2$

в) $y=c_1x^2+c_2x$ г) $y=c_1x^2+c_2x^4$

52. Решить уравнение Эйлера.

$x^2y''+xy'-y=0$

а) $y=c_1x+\dfrac{c_2}{x}$ б) $y=c_1x^2+c_2x$

в) $y=c_1x+c_2x^2+x$ г) $y=c_1x+c_2x^3$

53. Решить уравнение Эйлера.

$xy''-y'=0$

а) $y=c_1+c_2x^2$ б) $y=c_1+c_2x$

в) $y=c_1x+c_2x^3$ г) $y=c_1+c_2x$

Системы дифференциальных уравнений.

54. Решить системы методом Эйлера.

$$\begin{cases} y'=2y+z \\ z'=-6y-3z \end{cases}$$

а) $\begin{matrix} y=c_1+c_2e^{-3x} \\ z=-2c_1-3c_2e^{-x} \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} y=c_1+c_2e^{x} \\ z=2c_1+c_2x \end{matrix}$

в) $\begin{matrix} y=c_1+c_2e^{3x} \\ z=c_2e^{x} \end{matrix}$ г) $\begin{matrix} y=c_1+c_2x \\ z=2c_1+c_2x \end{matrix}$

55. Решить систему методом Эйлера.

$$\begin{cases} y'=y-z \\ z'=-4y+4z \end{cases}$$

а) $\begin{array}{l} y = c_1 + c_2 e^{5x} \\ z = c_1 - 4c_2 e^{5x} \end{array}$ б) $\begin{array}{l} y = c_1 + c_2 x \\ z = c_1 + c_2 x^2 \end{array}$

в) $\begin{array}{l} y = c_1 + c_2 e^{x} \\ z = c_1 - 4c_2 e^{3x} \end{array}$ г) $\begin{array}{l} y = c_1 + c_2 e^{3x} \\ z = c_1 - 2c_2 e^{x} \end{array}$

Решение системы дифференциальных уравнений матричным методом.

56. Решить системы Матричным методом.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

а) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2 = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{array}$ б) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{x} \\ y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} \end{array}$

в) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} \\ y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} \end{array}$ г) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} \\ y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} \end{array}$

57. Решить системы Матричным методом.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

а) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 + c_2 x \\ y_2 = 2c_1 + c_2(2x-1) \end{array}$ б) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 + c_2 x^2 \\ y_2 = c_1 + 2xc_2 \end{array}$

в) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 x + c_2 x^2 \\ y_2 = c_1 x + 2xc_2 \end{array}$ г) $\begin{array}{l} y_1 = c_1 x^2 + c_2 x^3 \\ y_2 = c_1 x + c_2 2x^2 \end{array}$

58. Дифференциальным уравнением называется ….

а) уравнение содержащее производные от одной или нескольких искомых функций.
б) уравнение содержащее неизвестные переменные
в) уравнение содержащее независимые переменные *x* и *y*.
г) уравнение содержащее неизвестные функции.

59. Порядком дифференциального уравнения называется ….

а) порядок старшей производной, входящей в это уравнение.
б) функция зависящей от одного аргумента.
в) переменные входящей в это уравнение.
г) порядок старшей производной не входящей в это уравнение.

60. Дифференциальное уравнение имеет ….

а) бесчисленное множество решений
б) только одно решение
в) два решения
г) три решения

61. Дифференциальные уравнение первого порядка записывается в виде ….

а) *F(x,y,y')=0* б) *F(x,y)=0*
в) *F(y,y')=0* г) *F(x,y,z)=0*

62. Дифференциальное уравнение в разрешенном относительно производной запишется в виде ….

а) *y'=f(x,y)* б) *y'=f(x,y,z)*
в) *y'=f(x)* г) *y'=f(y)*

63. Дифференциальное уравнение с разделенными переменными имеет вид…

а) $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$ б) $f(x)dy + \varphi(y)dx = 0$
в) $ydx + xdy = 0$ г) $f(x)dx + \varphi(x)dy = 0$

64. Дифференциальное уравнение с разделяющими переменными имеет вид…

а) $f(x)\varphi(y)dx + g(x)\varphi(y)dy = 0$ б) $f(x)dx + g(y)dy = 0$

в) $f(x)\varphi(y)dx + \varphi(y)dx = 0$ г) $f(x) + g(x)\varphi(y) = 0$

65. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида…

а) $y'+P(x)y = Q(x)$ б) $y'+P(y)x = Q(x, y)$

в) $y'+P(x)y = Q(y)$ г) $y'+P(x) = Q(y) + x$

66. Дифференциальное уравнение Бернулли имеет вид…

а) $y'+P(x)y = Q(x)y''$ б) $y'+P(x)y = Q(x)$

в) $y'+P(x)y = Q(y)y''$ г) $y'+P(y) = Q(y)y''$

67. Дифференциальное уравнение M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 является уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция U(x, y), что …...

а) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y)$ **б)** $M(x,y)dx + dy = d(x,y)$

в) $dx + dy = dz$ **г)** $Mdx + Ndy = 0$

68. Уравнение Лагранжа имеет вид ….

а) $y = f(y')x + g(y')$ **б)** $y = f(x,y')$

в) $y' = f(x) + g(y)$ **г)** $y = f(y) + g(x,y', z')$

69. Уравнение Клеро имеет вид ….

а) $y = xy'+g(y')$ **б)** $y = f(y')x + g(y')$

в) $y = f(x)y'+g(x)z$ **г)** $y = f(x)y + g(y')$

70. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид ….

а) $y''+ay'+by = 0$ **б)** $y''+p(x)y'+f(x)y = 0$

в) $y''+xy' = x = 0$ **г)** $y''+x = 0$

71. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид ….

а) $y''+ay'+by = f(x)$ **б)** $y''+ay'+by = f(y)$

в) $y''+f(x)y'+g(x)y = 0$ **г)** $y''+f(x)y = g(x)$

72. Дифференциальные уравнения называются обыкновенными ….

а) если неизвестная функция зависит только от одного аргумента

б) если функция зависит от x и от y

в) если неизвестная функция зависит от производной

г) если неизвестная функция зависит от трех аргументов

73. Проинтегрировать дифференциальное уравнение – значит найти ….

а) если функции y, удовлетворяющие этому уравнению

б) переменные x и y'

в) все производные y'

г) все функции y и ряд ее производны

74. Решение, в каждой точке которого нарушается условие единственности решения задачи Коши, называется….

а) особым **б) общим**

в) частным **г) параметрическим**

75. Укажите правильную формулу.

а) $d(xy) = ydx + xdy$ **б)** $d(xy) = ydy + xdx$

в) $d(xy) = xydx + xydy$ **г)** $d(xy) = xydxdy$

76. Укажите правильную формулу.

а) $d(y^2) = 2ydy$ **б)** $d(y^2) = y^2dx$

в) $d(y^2) = y^3dy$ **г)** $d(y^2) = 2 + ydy$

77. Укажите правильную формулу.

а) $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ **б)** $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx + xdy}{dy}$

в) $d(\frac{x}{y}) = ydx + xdy$ **г)** $d(\frac{x}{y}) = ydx + ydy$

78. Укажите правильную формулу.

а) $d(\ln y) = \frac{dy}{y}$ **б)** $d(\ln y) = \ln ydy$

в) $d(\ln y) = ydy$ **г)** $d(\ln y) = \ln xdx$

79. Укажите уравнение Риккати.

а) $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ **б)** $y' + a(x)y = b(x)$

в) $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ **г)** $y' + a(x)y = f(x)y^n$

80. Найти особые решение уравнения.

$y = x + y' - \ln y'$

а) $y = x + 1$ **б)** $y = x^2 + 2$

в) $y = x + 3x^2$ **г)** $y = x$

81. Найти особые решение уравнения.

$8y'^3 = 27y$

а) $y = 0$ **б)** $y = x$

в) $y = 1$ **г)** $y = x + 1$

Использованные литературы.

1. Арнольд В.И. «Обыкновенные дифференциальные уравнения, - М,: Наука,1971

2. Еругин Н.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. –Киев: Виша школа,1974

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М. Наука,1971

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.-М. Наука,1979

5. Киселев А.И. , Краснов М.А., Макаренко Т.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М. Высшая школа,1965