УДК. 532.546 DOI:10.35803/1694-5298.2021.4.588-594

САГЫНДЫКОВА Р.К., ДЫЙКАНОВА А.Т., ЖУСУПБЕКОВА С.Т.
[1]Кыргызский национальный аграрный университет имени К.И.Скрябина, Бишкек, Кыргызская Республика

SAGYNDYKOVA R.K., DYYKANOVA A.T., ZHUSUPBEKOVA S.T.
[1]Kyrgyz National Agrarian University named after K. I. Scriabin, Bishkek, Kyrgyz Republic
rahat_82s@mail.ru dat_1967@mail.ru samaraj-t@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЛАГИ В ПОЧВЕ

NUMERICAL SIMULATION OF THE MOVEMENT OF MOISTURE IN THE SOIL

Радиалдык базистик функциялардын коллокация ыкмасы менен айырмачылык ыкмасын айкалыштыруу аркылуу түзүү үчүн, сугат учурунда топурак сууларынын кыймылынын чек ара шарттары менен эки өлчөмдүү математикалык модели сунушталат. Сызыктуу эмес мүчө айырма ыкмасы менен каралат жана теңдеме айкын эмес схеманын жардамы менен чечилет. Мындан тышкары, жер астындагы суулардын кыймылынын теңдемесинин чыгарылышы бар экендиги жана жалгыздыгы далилденген. Алар изотроптук жана формасы тарабынан жөнөкөй, ошондой эле сандык эсептөө менен оңой чечилет. Радиалдык базистик функцияларын коллокация менен айкалыштыруу ыкмасы жекече туундудагы теңдемелерди чечүүдө көптөгөн артыкчылыктарга ээ. Сандык жыйынтыктар көрсөткөндөй, сунушталган ыкма салттуу ыкмаларга караганда абдан так жана колдонууга оңой. Мындан тышкары, ***c*** *параметрин тандоо эсептөөлөрдүн тактыгын камсыз кылууда маанилүү роль ойнойт. Бул жер астындагы суулардын кыймылынын чоң өлчөмдүү теңдемелеринин сандык чечимдеринин негизин түзөт.*

Өзөк сөздөр: к*оллокация ыкмасы, радиалдык негизги функциялар, Гаусстун функциясы, ным өткөрүмдүүлүк коэффициенти, диффузиянын коэффициенти, сызыктуу эмес тендеме.*

Путем построения метода коллокации радиальных базисных функций в сочетании с методом разностей предлагается двумерная математическая модель с граничными условиями движения почвенной воды при орошении. Нелинейный член рассматривается разностным методом, и уравнение решается с использованием неявной схемы. Кроме того, доказано существование и единственность решения уравнения движения грунтовых вод.

Радиальные базисные функции, также известные как базисные функции расстояния, представляют собой тип функций с базовой переменной. Они изотропны и просты по форме и могут быть легко решены с помощью численного расчета. Метод, сочетающий радиальные базисные функции с коллокацией, имеет много преимуществ при решении уравнения в частных производных. Численные результаты показывают, что предлагаемый метод обладает высокой точностью и проще в использовании, чем традиционные методы. Кроме того, выбор параметра с играет важную роль в обеспечении точности расчетов. Это закладывает основу для численных решений уравнений движения грунтовых вод высокой размерности.

Ключевые слова: *метод коллокации, радиальные базисные функции, функция Гаусса, коэффициент влагопроводности, коэффициент диффузии, нелинейное уравнение.*

By constructing the method of collocation of radial basis functions in combination with the method of differences, a two-dimensional mathematical model with boundary conditions for the movement of soil water during irrigation is proposed. The nonlinear term is considered by the *difference method, and the equation is solved using an implicit scheme. In addition, the existence and uniqueness of the solution of the equation of motion of groundwater is proved.*

Radial basis functions, also known as distance basis functions, are a type of functions with a base variable. They are isotropic and simple in form and can be easily solved by numerical calculation. The method combining radial basis functions with collocation has many advantages in solving partial differential equations. Numerical results show that the proposed method has high accuracy and is easier to use than traditional methods. In addition, the choice of parameter c plays an important role in ensuring the accuracy of calculations. This lays the foundation for numerical solutions of high-dimensional equations of groundwater motion.

Key words: *collocation method, radial basis functions, Gaussian function, moisture conductivity coefficient, diffusion coefficient, nonlinear equation.*

Введение. В период с 1960 по 2000 год численные методы, такие как методы граничных элементов и конечных элементов, добились впечатляющих успехов в вычислении физических явлений в технике и естественных науках. В частности, за последние два десятилетия были предприняты значительные усилия по разработке нового класса численных методов. Эти методы, использующие традиционные методы, требующие определенных базовых сеток, таких как триангуляция области для вычислений, были в основном разработаны для моделирования прикладных задач с низкой размерностью. Однако проектирование соответствующих сеток, как правило, является довольно сложной задачей для двумерных областей и может стать невозможным для задач более высокой размерности. Однако процесс триангуляции занимает слишком много времени, даже если используется сложный генератор сетки. Фактически, для заданного распределения точек можно быстро создать сетку, но для этого всегда требуется значительное количество итераций, включая ручное взаимодействие, прежде чем достичь удовлетворительной сетки. Методы без сетки были впервые представлены Люси, Гингольдом и Монаганом в 1977 году [1]. Дальнейшие работы, такие как Найролес и др. [2], Беличко и др. [3], Шабак [4], Сукумар и др. [5], попытались уменьшить или даже устранить необходимость дискретизации области или поверхности в контексте численных решений краевых и начальных задач. Эти быстро развивающиеся методы позволяют не только снизить большие затраты труда, но и сэкономить вычислительное время по сравнению с методом конечных элементов, методом граничных элементов и другими методами, зависящими от сетки[6].

Метод конечных элементов испытывает трудности с повторным построением и адаптивным анализом. В отличие от этого, методы без сетки не требуют сетки для дискретизации области, и приближенное решение строится полностью с набором рассеянных узлов. Однако методы без сетки могут привести к более низкой вычислительной эффективности, чем метод конечных элементов, поскольку требуется больше вычислительных усилий для интерполяции без сетки и численного интегрирования. Следовательно, повышение вычислительной эффективности методов без сетки, ориентированных на интерполяцию без сетки и численное интегрирование, становится важной проблемой. Другие проблемы или недостатки существующих методов без сетки включают трудности с введением существенных граничных условий, более высокую стоимость оценки производных функции формы, проблемы с обработкой разрывов, например, из-за неоднородного распределения материалов, и необходимость сложной связи узлов для обеспечения точных результатов.

Этот метод обладает преимуществом более высокой точности, удобен для вычислений и успешно применяется для численных решений. При использовании коллокации с радиальными базисными функциями разбиение области не требуется; следовательно, метод может быть применен к сложным областям и преодолевает некоторые недостатки традиционного метода конечных элементов. Ему нужно только вычислить функции формы и их производные, в то время как метод конечных элементов требует вычисления соответствующих интегралов, что часто значительно снижает эффективность вычислений. Граничные условия относительно легче накладывать без специальных манипуляций. С практической точки зрения этот подход может обеспечить более высокую точность с помощью более легко кодируемых компьютерных программ. Поэтому метод коллокации с интерполяцией радиальной базисной функции может дать хорошие результаты.

Методы исследования. Предположим, что проницаемые трубы в полях параллельны и имеют одинаковое расстояние и глубину. На рисунке 1 показан профиль грунта, перпендикулярный проницаемому трубопроводу. Если предположить, что расход воды в почве незначителен, то задача, рассматривающая орошение, может быть решена как плоская задача. Очевидно, что в случае рисунка 1 достаточно сосредоточиться на движении почвенных вод в затененной части abcd, а именно в области потока.

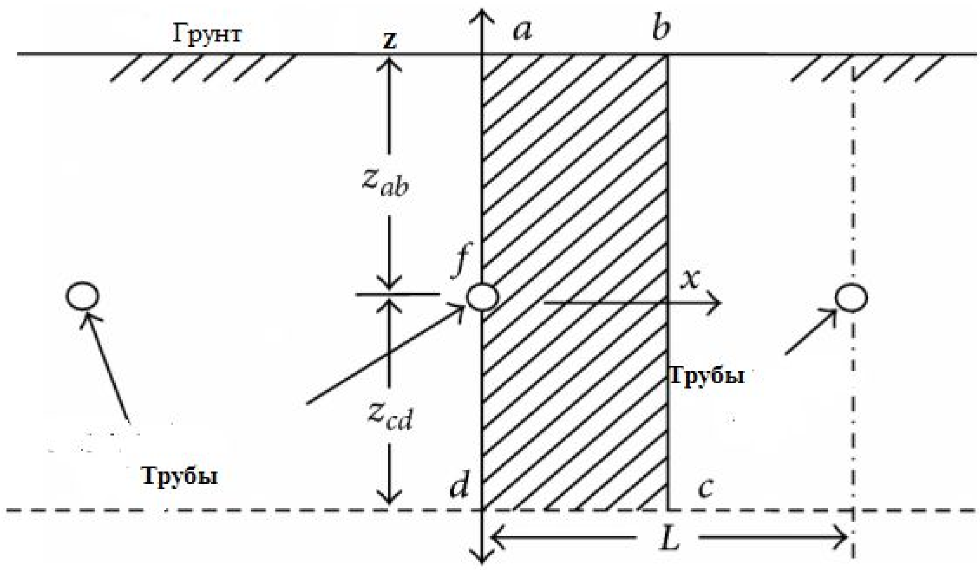

Рис. 1. Профиль грунта, перпендикулярный проницаемому трубопроводу

Предположим, что в области потока почвенной воды поток почвенной воды непрерывен во времени и пространстве, подчиняясь закону сохранения массы. Затем мы можем разработать математические модели движения почвенных вод, основанные на физическом процессе, протекающем по территории.

Математическая модель двумерного движения воды в ненасыщенном грунте может быть установлена следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z}, \theta(x,z,0)=\theta_0, \theta(x,z,t)=\theta_1, \tag{1}$$

где θ - объемное содержание воды в почве; $D(\theta)$ и $K(\theta)$ оба являются непрерывными функциями, которые обозначают диффузионную способность и гидравлическую проводимость потока ненасыщенного грунта соответственно; t-время и z-расстояние с направлением вверх, определенным как положительное.

Поскольку квадратичный член в (1) нелинейный, мы не можем напрямую использовать метод коллокации. Таким образом, мы применяем центрированные различия для работы с нелинейным термином в (x_i, z_j) :

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_{x=x_i} \approx \frac{1}{2\Delta x}\left\{\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_{x=x_i+1} - \left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_{x=x_i-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}\left[D(\theta_{i+1,j})\left(\frac{\partial \theta_{i+1,j}}{\partial x}\right)_{x=x_{i+1}} - D(\theta_{i-1,j})\left(\frac{\partial \theta_{i-1,j}}{\partial x}\right)_{x=x_{i-1}}\right],$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{z=z_{ji}} \approx \frac{1}{2\Delta z}\left\{\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{z=z_j+1} - \left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{z=z_{ji}-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}\left[D(\theta_{i,j+1})\left(\frac{\partial \theta_{i,j+1}}{\partial z}\right)_{z=z_{j+1}} - D(\theta_{i,j-1})\left(\frac{\partial \theta_{i,j-1}}{\partial z}\right)_{z=z_{ji-1}}\right],$$

где Δx и Δz являются пространственными интервалами соответственно (x_i, z_j) являются граничными точками когда $i, j = 1, N$, являются внутренними точками, когда $i, j = 2,3..., N-1$.

Дискретизация левой части (2) с прямыми разностями дает

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_{(x_i, z_j)}^{t=t^{n+1}} \approx \left(\frac{\theta^{n+1} - \theta^{n}}{\Delta t}\right)_{(x_i, z_j)} = \frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

(3)

Дискретизация третьего члена в правой части (2) с центральными различиями дает

$$\left(\frac{\partial K(\theta)}{\partial z}\right)_{(x_i, z_j)}^{t=t^{n+1}} \approx \frac{K(\theta_{i,j+1}^{n+1}) - K(\theta_{i,j-1}^{n})}{2\Delta z} \quad (4)$$

Пусть функция $\tilde{\theta}(X, t^n)$ является приближением $\theta(X, t^n)$:

$$\tilde{\theta}(X, t^n) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^n \varphi(\|X - I_i\|) + \sum_{i=1}^{N_b} \beta_i^n \varphi(\|X - B_i\|) \quad (5)$$

где $X = (x, z), I_i \in \Omega$, и $B \in \partial\Omega$. N_1 -это количество узлов в регионе и N_b -количество узлов на границе.

Применяя метод коллокации, (5) должно удовлетворять дифференциальному уравнению для области Ω в (6) и граничным условиям на границах $\partial\Omega$ в (7). То есть,

$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^n \left(\varphi(\|I_j - I_i\|) - \frac{\partial}{dx}\left(D(\theta^n(I_j))\frac{d\varphi(\|I_j - I_i\|)}{dx}\right) - \frac{\partial}{dz}\left(D(\theta^n(I_j))\frac{d\varphi(\|I_j - I_i\|)}{dz}\right)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_b} \beta_i^n \left(\varphi(\|X - B_i\|) - \frac{\partial}{dx}\left(D(\theta^n(I_j))\frac{d\varphi(\|I_j - B_i\|)}{dx}\right) - \frac{\partial}{dz}\left(D(\theta^n(I_j))\frac{d\varphi(\|I_j - B_i\|)}{dz}\right)\right) \quad 6)$$

$$= \theta_{i,j}^n + \frac{\partial K(\theta^n(I_i))}{dz}, \; j = 1,2,..., N_1$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i^n \varphi(\|B_j - I_i\|) + \sum_{i=1}^{N_b} \beta_i^n \varphi(\|B_j - B_i\|) = \theta_1^n(B_j), \; j = 1,2,..., N_b \quad (7)$$

$$\psi(\|X - I\|) = \varphi(\|X - I\|) - \frac{d}{dx}\left(D(\theta(X))\left(\frac{d\varphi(\|X - I\|)}{dx}\right)\right) - \frac{d}{dz}\left(D(\theta(X))\left(\frac{d\varphi(\|X - I\|)}{dz}\right)\right) \quad (8)$$

$$f^n\left(I_j\right)=\theta^{n-1}\left(I_j\right)+\frac{\partial K\left(\theta^n\left(I_j\right)\right)}{\partial z}$$

пусть (6) и (7) могут быть выражены следующим матричным уравнением:

$$HU = F \tag{9}$$

где

$$H=\begin{bmatrix} \psi(0) & \ldots\psi\left(\left\|I_1-I_{N_i}\right\|\right) & \psi\left(\left\|I_1-B_1\right\|\right) & \ldots\psi\left(\left\|I_1-B_{N_b}\right\|\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi\left(\left\|I_{N_1}-I_1\right\|\right) & \ldots\psi(0) & \psi\left(\left\|I_{N_1}-B_1\right\|\right) & \ldots\psi\left(\left\|I_{N_1}-B_{N_b}\right\|\right) \\ \varphi\left(\left\|B_1-I_1\right\|\right) & \ldots\varphi\left(\left\|B_1-I_{N_i}\right\|\right) & \varphi(0) & \ldots\varphi\left(\left\|B_1-B_{N_{bi}}\right\|\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi\left(\left\|B_{N_b}-I_1\right\|\right) & \ldots\varphi\left(\left\|B_{N_b}-I_{N_i}\right\|\right) & \varphi\left(\left\|B_{N_b}-B_1\right\|\right)\ldots & \varphi(0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

$U=\left[\alpha_1^n,\alpha_2^n,\ldots,\alpha_{N_i}^n,\beta_1^n,\beta_2^n,\ldots,\beta_{N_i}^n\right]^T$,

$F=\left[f_1^n\left(I_1\right),f_1^n\left(I_2\right),\ldots,f_1^n\left(I_{N_{ii}}\right),\theta_1^n\left(B_1\right),\theta_1^n\left(B_2\right),\ldots,\theta_1^n\left(B_{N_{ib}}\right)\right]^T$

Результаты исследования. Решить следующую линейную модель, используя метод коллокации радиальной базисной функции:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z}+f\,,(x,z)\in\Omega=[0,1]\times[0,1], \tag{11}$$

$$\theta(x,z,0)=\theta_0,(x,z)\in\Omega,\ \theta(x,z,t)=\theta_1,(x,z)\in\partial\Omega,\ t\succ 0$$

Пусть $D(\theta)=1$; тогда аналитическое решение (11) равно $\theta(z,t)=\left(x^2-x\right)\left(z^2-z\right)t$ и $f=\left(x^2-x\right)\left(z^2-z\right)-2t\left(x^2+z^2-x-z\right)$.

Значения θ_0 и θ_1 определяются аналитическим решением с использованием пространственного шага h=0.1 и временного шага $\Delta t=0.01$ от t=0 до t=10. Функция Гаусса exp(-cr^2) выбрана в качестве радиальной базисной функции, и оценка погрешности основана на L_2-норме. На рисунке 2 показан численные и точные решения примера 1.

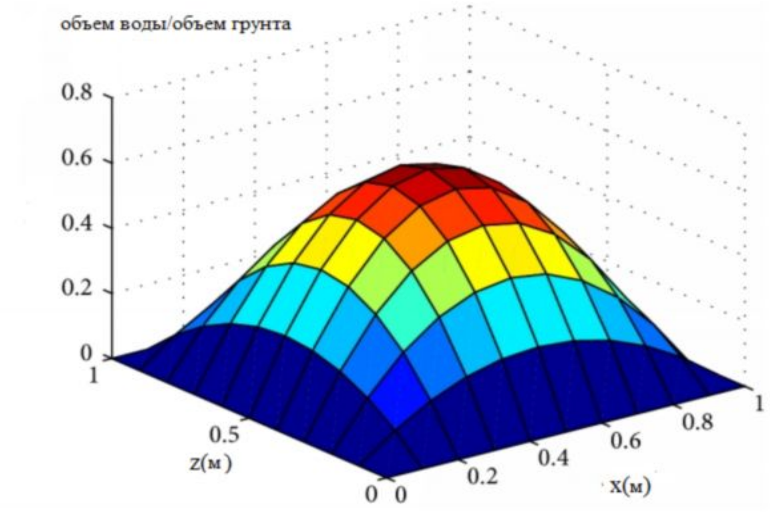

Рис. 2.Численные решения с использованием метода коллокации радиальных базисных функций

В таблице 1 показано сравнение этого метода с методом конечных элементов, где h=0.1 и t=10.

Таблица 1 - Результаты нового метода сравниваются с методом конечных элементов

Численные методы	t	Ошибки в расчетах	Время расчета	Степень сходимости
Новый метод	0.5 1.0	8.4197e-004 9.1056e-004	1.230020 2.427944	2.7300 2.4725
Метод конечных элементов	0.5 1.0	1.0017e-003 1.6667e-003	1.021520 3.825802	2.6720 2.2707

Далее мы рассмотрим временной шаг $\Delta t = 0.01$, другой пространственный шаг и другие параметры с в функции Гаусса exp(-cr^2). Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2 - Численные решения примера 1, связанные с параметром и пространственным шагом

Пространственный шаг	Параметры с	Ошибки в расчетах	Время расчета
0.1	9.0 9.5 9.6	3.4000e-003 9.1056e-004 3.4000e-003	1.372784 2.427944 1.580791
0.25	0.33 0.35 0.4	1.1000e-003 5.7098e-004 9.2511e-004	0.672394 0.659509 0.659885

Для линейной модели рисунки 1-3 и таблица 1 показывают, что метод, представленный в этой статье, выполним. И сравнивая его с традиционным методом, он показал хорошую точность и быструю скорость сходимости. И таблица 2 показывает, что вычислительная точность и вычислительное время связаны как с выбором параметра в радиальных базисных функциях, так и с пространственным шагом.

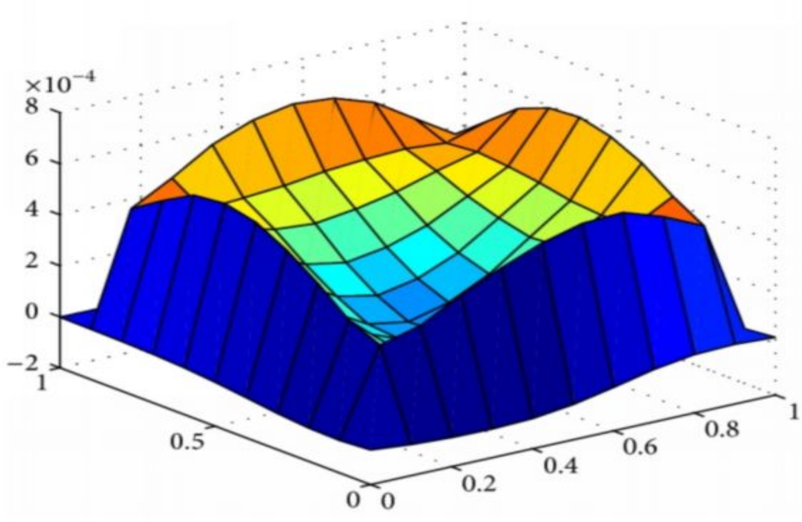

Рис. 3. График ошибок нового метода

Выводы. В данной работе математическая модель с граничными условиями для движения почвенных вод при орошении была разработана путем построения метода коллокации радиальной базисной функции. Существование и единственность решения были доказаны. Несколько численных примеров показывают, что предлагаемый метод обеспечивает более высокую точность и легче решает двумерные уравнения движения грунтовых вод, чем традиционные методы. Кроме того, выбор временных, пространственных шагов и параметра напрямую влияет на точность расчета. Поэтому для получения численных решений необходимо изучить комбинацию шагов, радиальной базисной функции и параметра. Кроме того, это закладывает основу для численных решений уравнений движения воды в почве с высокой размерностью, что очень важно.

Список литературы

1. Люсит Л. Б. Численный подход к проверке гипотезы деления [Текст] / Л.Б. Люсит // Астрономический журнал. – 1977. - том 82. - 1013-1024с.

2. Найролес Б. Обобщение метода конечных элементов: диффузное приближение и диффузные элементы [Текст] / Б. Найролес, Г. Тузо и П. Вийон // Вычислительная механика. – 1992. - том 10. - № 5.- с.307-318.

3. Беличко Т. Без элементные методы Галеркина [Текст] / Т. Беличко, Ю. Ю. Лу, Л. Гу // Международный журнал численных методов в инженерии. -1994. - том 37. - № 2. - с.229-256.

5. Сукумар Н. Метод естественных элементов в механике твердого тела [Текст] / Н. Сукумар, Б. Моран, Т. Беличко // Международный журнал численных методов в инженерии. – 1998. - том 43. - № 5. – с.839-887./

6. Алкезуини М. М. Обучение сетей радиальных базисных функций методом Нестерова при решении краевых задач математической физики [Текст] / М.М. Алкезуини, В.И. Горбаченко // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: материалы XII Междунар. науч.- 105 техн. конф. . — Пенза: Изд-во ПГУ. 2017. — с. 171–175.

7. Абдулаев А. Математические модели дискретных технологий орошения сельскохозяйственных культур по бороздам [Электронный ресурс] / А.Абдулаев,

Н.А.Оморова // Вестник КГУСТА. – 2021. - №2(72). – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=46696918