

ПАПИЕВА Т.М., ШАМШИЕВА Г.А.

¹Ошский государственный университет, Ош, Кыргызская Республика

PAPIEVA T.M., SHAMSHIEVA G.A.

¹Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic

(e-mail: tpaпка73@mail.ru tpaпieva73@gmail.com__ gshamshieva@mail.ru)

**О МИНИМАЛЬНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНО-ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННОМУ p -МЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ В
ПРОСТРАНСТВЕ E_{p+3}**

**ABOUT MINIMALITY OF ORTHOGONAL COMPLIMENTARY DISTRIBUTION TO
GIVEN p -DIMENSIONAL DISTRIBUTION IN THE SPACE E_{p+3}**

E_{p+3} мейкиндигинде берилген p -ченемдүү Δ_p бөлүштүрүүсүнө ортогоналдык-толуктоочу $\bar{\Delta}_3$ бөлүштүрүүсү каралган. Берилген Δ_p бөлүштүрүүсүнүн ийрилик вектору менен $\bar{\Delta}_3$ бөлүштүрүүсүнүн минималдуу жана $\bar{\Delta}_2$ бөлүштүрүүсүнүн N -минималдуу болушунун ортосундагы байланышы табылган.

Өзөк сөздөр: бөлүштүрүү, ортогоналдык-кошумча бөлүштүрүү, орточо ийректин вектору, бөлүштүрүүнүн минималдуулугу, N - бөлүштүрүүнүн минималдуулугу.

В пространстве E_{p+3} рассмотрено ортогонально-дополнительного распределение $\bar{\Delta}_3$ данному p -мерному распределению Δ_p . Найдены связи между минимальностью распределения $\bar{\Delta}_3$ и N -минимальностью распределения $\bar{\Delta}_2$ с вектором средней кривизны данного распределения Δ_p .

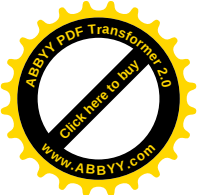
Ключевые слова: распределение, ортогонально-дополнительного распределение, вектор средней кривизны, минимальность распределения, N - минимальность распределения.

It is considered the orthogonal complimentary distribution $\bar{\Delta}_3$ to given p -dimensional distribution Δ_p in the space E_{p+3} . It is defined the connection between minimality of $\bar{\Delta}_3$ and N -minimality of $\bar{\Delta}_2$ with the vector of mild curvature of the given distribution Δ_p .

Key words: distribution, orthogonal complimentary distribution, vector of mild curvature, minimality of distribution, N - minimality of distribution.

Введение. Теория распределений на гладких многообразиях является значительной главой современной дифференциальной геометрии. Она позволила по новому подойти к ряду задач геометрии сетей, вскрыты тесные связи между этими двумя теориями.

Заданием p -мерного распределения Δ_p в некоторой области Ω евклидова пространства E_{p+3} инвариантным образом определяется распределение $\bar{\Delta}_3$, ортогонально дополнительные данному распределению.



В данной статье исследована связь между минимальностью распределения Δ_p и N минимальностью распределения $\bar{\Delta}_2$ с вектором средней привизны данного распределения Δ_p .

Методы и материалы: В исследовании использованы метод внешних форм Картана, тензорный метод, метод Г.Ф.Лаптева.

Результаты исследования. Пусть $p+3$ -мерное евклидово пространство E_{p+3} отнесено к подвижному реперу $\mathfrak{R}=(x, \vec{e}_A), (A, B, C=1, 2, \dots, p+3)$. Деривационные формулы репера $\mathfrak{R}$ имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B. \quad (1)$$

Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики:

$$d g_{AB} = g_{AK} \omega_B^K + g_{KB} \omega_A^K,$$

где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n и структурным уравнениям:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A = D\omega_A^B \wedge \omega_A^K \wedge \omega_K^B.$$

Контравариантные компоненты g^{BK} метрического тензора g_{AB} определяются из соотношения

$$g_{AB} g^{BK} = \delta_A^K \quad (2)$$

где δ_A^K – символ Кронекера.

Рассмотрим в области Ω пространства E_n распределение Δ_p и ортогонально дополнительное к нему распределение $\bar{\Delta}_3$. Векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ репера $\mathfrak{R}$ расположим в плоскости $\Delta_p(x)$, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \vec{e}_{p+2}, \vec{e}_{p+3}$ в плоскости $\bar{\Delta}_3(x)$, где $x \in \Omega$. При этом дифференциальные уравнения Δ_p будут:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A, (i, j, k=1, \dots, p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2, p+3), \quad (3)$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_3(x)$, то

$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha A}^i \omega^A. \quad (4)$$

В нашем репере $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, следовательно

$$g_{i\alpha} \cdot g_{\alpha i} = 0. \quad (5)$$

В силу равенств (5) из соотношений (2) получим:

$$g^{i\alpha} = g^{\alpha i} = 0,$$

и, следовательно

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (6)$$

Из соотношений (6) получаем:

$$dg^{ij} = -(g^{ik} \omega_k^j + g^{kj} \omega_k^i), \quad (7)$$

$$dg^{\alpha\beta} = -(g^{\alpha\gamma} \omega_\gamma^\beta + g^{\gamma\beta} \omega_\gamma^\alpha). \quad (8)$$

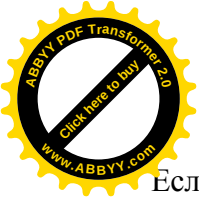
Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$ имеем:

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik} \omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \omega_i^\alpha = -g_{ij} \omega_j^\beta g^{\beta\alpha}. \quad (9)$$

Продолжив систему уравнений (3) и перенеся все слагаемые, содержащие главные формы, в правую часть, получим:

$$d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = \Lambda_{ijA}^\alpha \omega^A \quad (10)$$

$$d\Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma - \Lambda_{k\beta}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha = \Lambda_{i\beta A}^\alpha \omega^A \quad (11)$$



Если зафиксируем точку x (т.е. все формы $\omega^A = 0$), то системы (10), (11) примут вид:

$$\delta \Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \pi_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \pi_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \pi_\gamma^\alpha = 0, \quad (10')$$

$$\delta \Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \pi_\beta^\gamma - \Lambda_{k\beta}^\alpha \pi_i^k + \Lambda_{i\beta}^\gamma \pi_\gamma^\alpha = 0, \quad (11')$$

где $\pi_A^B = \omega_A^B|_{\omega^A=0}$ и δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам. Так как формы $\omega_i^\alpha, \omega_\alpha^i$ главные, то $\pi_i^\alpha = 0, \pi_\alpha^i = 0$. Известно, что системы уравнений (10'), (11') вполне интегрируемы.

Следовательно, система величин $\{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [1]. При этом компоненты $\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Тензор Λ_{ij}^α в общем случае не симметричен по индексам i, j . Величины

$$H_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^\alpha, -\Lambda_{ji}^\alpha)$$

образуют тензор. Этот тензор называют тензором неголономности распределения Δ_p . Распределение, тензор неголономности которого равен нулю тождественно, называется голономным. При этом система (3) вполне интегрируемая, через каждую точку x пространства проходит одно p -мерное интегральное многообразие, в каждой точке которого касательным элементом является соответствующий элемент распределения.

Векторы

$$\bar{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{(ij)}^\alpha \bar{e}_\alpha \quad (12)$$

$$\bar{\bar{M}}_3 = \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^i \bar{e}_i \quad (13)$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\bar{\Delta}_3$ соответственно. Если вектор средней кривизны распределения равен нулю, то распределение называется минимальным.

Система величин $\left\{ \sum_i \Lambda_{p+1,i}^i, \sum_i \Lambda_{p+2,i}^i, \sum_i \Lambda_{p+3,i}^i \right\}$ образует геометрический объект типа ковектора. Ковектор $K_\alpha = \sum_i \Lambda_{\alpha i}^i$ в пространстве $\bar{\Delta}_3(x)$ определяет плоскость $\bar{\Delta}_2(x) \subset \bar{\Delta}_3(x)$, проходящую через точку x_i

$$K_\alpha y^\alpha = 0.$$

Ее вектором нормали в $\bar{\Delta}_3(x)$ будем вектор

$$\bar{K} = g^{\alpha\beta} K_\beta \bar{e}_\alpha.$$

Из формулы (9) имеем:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ik}^\alpha &= -g^{\alpha\beta} g_{ij} \Lambda_{\beta k}^j, \\ \Lambda_{i\gamma}^\alpha &= -g^{\alpha\beta} g_{ij} \Lambda_{\beta\lambda}^j. \end{aligned} \quad (14)$$

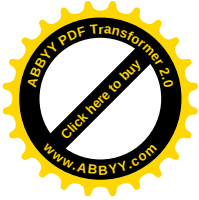
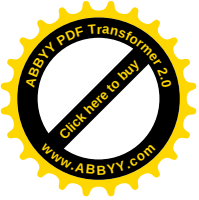
В силу (14) получим:

$$g^{ik} \Lambda_{(ik)}^\alpha = g^{ik} \Lambda_{ik}^\alpha = -g^{\alpha\beta} g_{ij} \Lambda_{\beta k}^j \Lambda_{ik}^\alpha = -g^{\alpha\beta} \sum_k \Lambda_{\beta k}^k.$$

Тогда

$$\bar{M}_p = \frac{1}{p} g^{ik} \Lambda_{(ik)}^\alpha \bar{e}_\alpha = -\frac{1}{p} g^{\alpha\beta} \sum_k \Lambda_{\beta k}^k \bar{e}_\alpha = -\frac{1}{p} g^{\alpha\beta} K_\beta \bar{e}_\alpha,$$

т.е.



$$\vec{M}_p = -\frac{1}{p} \vec{K}.$$

Вектор $\vec{e}_{p+3}$ направим по вектору $\vec{M}_p$, а векторы $\vec{e}_{p+1}$, $\vec{e}_{p+2}$ расположим в плоскости $\bar{\Delta}_2(x)$. Тогда имеем

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{(ij)}^{p+3} \vec{e}_{p+3}, \quad (15)$$

$$g^{ij} \Lambda_{(ij)}^{p+1} = 0, \quad g^{ij} \Lambda_{(ij)}^{p+2} = 0, \quad \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_{p+3} = 0.$$

В выбранном репере дифференциальные уравнения распределения $\bar{\Delta}_3(x)$ будут

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\alpha}}^i &= \Lambda_{\hat{\alpha}j}^i \omega^j + \Lambda_{\hat{\alpha}\beta}^i \omega^\beta, \\ \omega_{\hat{\alpha}}^{p+3} &= \Lambda_{\hat{\alpha}j}^{p+3} \omega^j + \Lambda_{\hat{\alpha}\beta}^{p+3} \omega^\beta. \end{aligned}$$

Система величин $\{\Lambda_{\hat{\alpha}j}^i, \Lambda_{\hat{\alpha}j}^{p+3}, \Lambda_{\hat{\alpha}\beta}^i, \Lambda_{\hat{\alpha}\beta}^{p+3}\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения $\bar{\Delta}_2(x)$.

Вектор средней кривизны этого распределения определяется следующим образом:

$$\vec{\bar{M}}_2 = \frac{I}{2} \left(g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^i \vec{e}_i + g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^{p+3} \vec{e}_{p+3} \right).$$

Введем обозначения:

$$\vec{\bar{M}}_2^N = \frac{I}{2} g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^i \vec{e}_i, \quad (16)$$

$$\vec{\bar{M}}_2^T = \frac{I}{2} g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^{p+3} \vec{e}_{p+3}. \quad (17)$$

Вектор $\vec{\bar{M}}_2^N$ называется вектором вынужденной средней кривизны распределения $\bar{\Delta}_2(x)$, а вектор $\vec{\bar{M}}_2^T$ – вектором относительной средней кривизны этого распределения [*].

Из (14), (16) следует, что векторы $\vec{M}_p$ и $\vec{\bar{M}}_2^T$ – коллинеарны. Таким образом, справедлива

Лемма. Вектор средней кривизны $\vec{M}_p$ распределения Δ_p и вектор относительной средней кривизны распределения $\bar{\Delta}_2$ коллинеарны.

Пусть распределение $\bar{\Delta}_3$ минимально, т.е. $\vec{\bar{M}}_3 = \vec{0}$. Отсюда имеем:

$$g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^i = 0$$

или

$$g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^i + g^{\hat{\alpha}n} \Lambda_{(\hat{\alpha}n)}^i + g^{p+3,p+3} \Lambda_{p+3,p+3}^i = 0.$$

Так как $g^{\hat{\alpha},p+3} = 0$, то из последнего равенства получим:

$$g^{p+3,p+3} \Lambda_{p+3,p+3}^i = -g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^i.$$

Умножим обе части этого равенства на вектор $\vec{e}_i$ и просуммируем по i .

Тогда получим:

$$g^{p+3,p+3} \Lambda_{p+3,p+3}^i \vec{e}_i = -g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \Lambda_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^i \vec{e}_i, \quad (18)$$

где $\bar{\Lambda}_{p+3,p+3}^i = \Lambda_{p+3,p+3}^i \vec{e}_i$ – вектор вынужденной кривизны [**] поля вектора средней кривизны $\vec{M}_p$ распределения Δ_p .

Из (16), (18) имеем:



$$\vec{\vec{M}}_2^N = -\frac{g^{p+3,p+3}}{2} \vec{\vec{L}}_{p+3,p+3}. \quad (19)$$

Таким образом, если распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ минимально, то вектор вынужденной средней кривизны распределения $\vec{\vec{\Delta}}_2$ и вектор средней кривизны распределения Δ_p удовлетворяют условию (19), верно и обратное, т.е. если векторы $\vec{\vec{M}}_2^N$ и $\vec{\vec{L}}_{p+3,p+3}$ удовлетворяют условию (19), то аспределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ - минимально. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ будет минимальным тогда и только тогда, когда вектор вынужденной средней кривизны $\vec{\vec{M}}_2^N$ распределения $\vec{\vec{\Delta}}_2$ и вектор средней кривизны $\vec{\vec{M}}_p$ распределения Δ_p удовлетворяют условию (19).

Выше мы предполагаем, что распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ не является N -минимальным, т.е. $\vec{\vec{M}}_2^N \neq \vec{0}$. Теперь ответим на вопрос: когда распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ является N -минимальным.

Пусть распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ – N -минимально, т.е. $\vec{\vec{M}}_2^N = \vec{0}$. Отсюда имеем:

$$g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \Lambda_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})}^i = 0.$$

Тогда вектор средней кривизны распределения $\vec{\vec{M}}_3$ распределения $\vec{\vec{\Delta}}_3(x)$ имеет вид (будем считать, что распределения $\vec{\vec{\Delta}}_3(x)$ – не минимально):

$$\vec{\vec{M}}_3 = \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^i \vec{e}_i = \frac{1}{3} g^{p+3,p+3} \Lambda_{(p+3,p+3)}^i \vec{e}_i,$$

$$\text{или} \quad \vec{\vec{M}}_3 = \frac{1}{3} g^{p+3,p+3} \vec{\vec{L}}_{p+3,p+3}, \quad (20)$$

Обратно, пусть имеет место равенство (20). Подставляя в (20) разложения векторов $\vec{\vec{M}}_3$, $\vec{\vec{L}}_{p+3,p+3}$ по базисным векторам, получим:

$$g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \Lambda_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})}^i = 0.$$

Следовательно, распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ – N -минимально. Таким образом справедлива

Теорема 2. Пусть распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ – не минимально, тогда распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ является N -минимальным тогда и только тогда, когда имеет место равенство (20).

Следствие 1. Если распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ – N -минимально, то распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\vec{\vec{L}}_{p+3,p+3} = \vec{0}$, т.е. интегральные линии поля вектора средней кривизны распределения Δ_p являются асимптотическими на распределении $\vec{\vec{\Delta}}_3$.

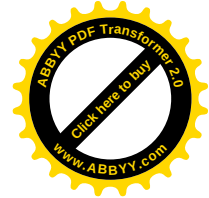
Следствие 1. Если распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ – минимально, то распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ будет N -минимальным тогда и только тогда, когда $\vec{\vec{L}}_{p+3,p+3} = \vec{0}$.

Выводы. Получены следующие результаты:

1. Распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ будет минимальным тогда и только тогда, когда вектор вынужденной средней кривизны $\vec{\vec{M}}_2^N$ распределения $\vec{\vec{\Delta}}_2$ и вектор средней кривизны $\vec{\vec{M}}_p$ распределения Δ_p удовлетворяют условию

$$\vec{\vec{M}}_2^N = -\frac{g^{p+3,p+3}}{2} \vec{\vec{L}}_{p+3,p+3}.$$

2. Пусть распределение $\vec{\vec{\Delta}}_3$ – не минимально, тогда распределение $\vec{\vec{\Delta}}_2$ является N -минимальным тогда и только тогда, когда имеет место равенство



$$\bar{\bar{M}}_3 = \frac{1}{3} g^{p+3,p+3} \bar{A}_{p+3,p+3},$$

3. Если распределение $\bar{A}_2$ – N -минимально, то распределение $\bar{A}_3$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\bar{A}_{p+3,p+3} = \bar{0}$, т.е. интегральные линии поля вектора средней кривизны распределения Δ_p являются асимптотическими на распределении $\bar{A}_3$.

4. Если распределение $\bar{A}_3$ – минимально, то распределение $\bar{A}_2$ будет N -минимальным тогда и только тогда, когда $\bar{A}_{p+3,p+3} = \bar{0}$.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов. [Текст]/ Г.Ф. Лаптев. – Труды Геом. сем-ра, т.3. – М., 1971. – С. 29-48.
2. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n и их обобщения. [Текст]/ М.К. Кузьмин. – В кн. Проблемы геометрии / Всесоюз. ин-т науч. и техн. информ., т. 7. – М., 1975. – С. 215-229.
3. Матиева Г. Геометрия p -распределения в евклидовом n -пространстве [Текст] / Г. Матиева. – Канд.дисс., М., 1985. – 105 с.
4. Кузьмин М.К. О канонических сетях распределений на поверхностях евклидова пространства [Текст] / М.К. Кузьмин В кн. Проблемы геометрии / Всесоюз. ин-т науч. и техн. информ., т. 7. – М., 1975. – С. 231-248.
5. Какишев Ж.К. Асимптотические методы решения начальной задачи для сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [Текст] / Ж.К.Какишев, Б.А.Садыкова, Ж.У.Казакова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: №1(63) 2019. - с.168-177.