УДК: 53.072

МЕХАНИЧЕСКИЕ СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

МЕХАНИКАЛЫК ТАҢ КАЛЫШТУУ ТАРТЫП ЖАКЫНДАТКЫЧТАР ЖАНА АЛАРДЫ МАТЕМАТИКАЛЫКЧАГЫЛДЫРУУ

MECHANICAL STRANGE ATTRACTORS AND THEIR MATHEMATICAL PRESENTATION

П.С.Панков, Ж.К. Жээнтаева, С.Б. Тагаева
Институт математики НАН КР, КУУ, КГТУ им. И. Раззакова

Аннотация. *Ранее методы реализации механических странных аттракторов были слишком сложными. В данной статье такое явление продемонстрировано через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести. Движение шарика оказывается непредсказуемым. В данной статье предложены другие системы дифференциальных и разностных уравнений для этой же цели. Такая поверхность была изготовлена из железа и испытана. Также в статье предложен новый вид асимптотической эквивалентности.*

Аннотация. *Мурунку механикалык таңкалыштуу тартып жакындаткычты жүзөгө ашыруунун ыкмалары өтө татаал болду. Бул макалада ал кубулуш үчүр куюп турган жери болгон жылмакай бет боюнча тартуу күчүнүн таасиринентоп жумаланганы аркылуу көрсөтүлөт. Топ кыймылдаганы алдын ала айтылбас экен. Дал келген дифференциалдык теңдемелер системасы түзүлдү жана компьютерде болжол менен чыгарылды. Мындай бет темирден жасалды жана сыналды. Дагы, макалада асимптотикалык эквиваленттиктин жаңы түрү сунушталды.*

Annotation. *Earlier methods to implement mechanical strange attractors were too complicated. In the paper this phenomenon is demonstrated as rolling of a ball along a smooth surface with three juts by gravity effect. The motion of the ball proves to be unpredictable. Other systems of differential equations are difference equations are proposed in this paper for same purpose. Suchsurfaceismadeofironandtested.Also, a new type of asymptotical equivalence is proposed in the paper.*

Ключевые слова: *аттрактор, гладкая поверхность, явление, дифференциальное уравнение, разностное уравнение, система уравнений, реализация, асимптотическая эквивалентность.*

Урунттуу сөздөр: *тартып жакындаткыч, жылмакай бет, кубулуш, дифференциалдык теңдеме, айырмалык теңдеме, теңдемелер системасы, жүзөгө ашыруу, асимптотикалык эквиваленттик*

Key words: *attractor, smooth surface, phenomenon, differential equation, difference equation, system of equations, implementation, asymptotical equivalence*

Введение

Первым примером явления, названного «странным аттрактором», был аттрактор Лоренца, описываемый системой трех дифференциальных уравнений третьего порядка

$x'(t)=10(y(t)-x(t)); y'(t)=x(t)(28-z(t))-y(t);\ z'(t)=x(t)y(t)-8/3\cdot z(t).$

Для его реализации требуется смесь трех химических компонент.

Соответственно появилось определение: странный аттрактор - притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы.

Другой объект - соленоид Смейла -Вильямса —динамическая система, аналогичной по поведению траекторий отображению удвоения на окружности, то есть с дискретным временем. Эта динамическая система определена на торе, и за одну её итерацию угловая координата удваивается; откуда автоматически возникает экспоненциальное разбегание траекторий и хаотичность динамики.

Отметим, что само это понятие странного аттрактора является не чем-то заданным заранее, а возникающим в различных условиях. Соответственно этому, и возникают различные определения, после обнаружения новых явлений.

Ранее в опубликованных работах (см. например [1], [2], [3]) предлагались сложные электротехнические устройства для его реализации. В [4] предложено устройство: бесконечная двигающаяся лента и стержень, закрепленный одним концом в точке над серединой ленты, другой конец которого двигается по ленте под влиянием силы трения.

На основе методики [5-6], с использованием опыта составления систем дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы, мы продемонстрировалитакое явление через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести [7]. Движение шарика оказывается непредсказуемым. Соответствующая система дифференциальных уравнений была составлена и приближенно решена на компьютере. Также, такая поверхность изготовлена из железа и испытана.

В данной статье предлагаются другие системы дифференциальных и разностных уравнений, дающие аналогичные явления.

Также в статье предложен новый вид асимптотической эквивалентности для представления странных аттракторов.

1. Составление системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим движение точки по гладкой поверхности, высота которой выражается формулой $z=Z(x,y)$, над горизонтальной плоскостью. Тогда получаем: вектор антиградиента

$$A(x,y)=-\{Z_x'(x,y),\ Z_y'(x,y),(Z_x'(x,y))^2+(Z_y'(x,y))^2\}.$$

Разлагаем постоянный вектор гравитации $g=\{0,0,\ -1\}$ на касательный T и нормальный Q к поверхности.

$$T(x,y)=\frac{\langle A,g\rangle}{\langle A,A\rangle}A=\frac{(Z_x'(x,y))^2+(Z_y'(x,y))^2}{(Z_x'(x,y))^2+(Z_y'(x,y))^2+\left((Z_x'(x,y))^2+(Z_y'(x,y))^2\right)^2}A(x,y)= \quad (1)$$

$$=-\frac{1}{(Z_x'(x,y))^2+(Z_y'(x,y))^2+1}\left(-Z_x'(x,y),-Z_y'(x,y),\ (Z_x'(x,y))^2+(Z_x'(x,y))^2\right).$$

Сила, действующая на точку, пропорциональна вектору $T(x,y)$.

Достаточно рассматривать ее компоненты, действующие по осям *Ox* и *Oy*, потому что из новых значений $X(t)$ и$Y(t)$ значение высоты получается из формулы $z=Z(x,y)$.

Используя второй закон Ньютона для движения точки в виде векторного уравнения$\boldsymbol{w}''(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}))$, с начальными условиями $w(0)=w_0$, $w'(0)=v_0$, получаем систему уравнений

$$x''(t) = Z_x'\left(x(t),y(t)\right) / \left(\left(Z_x'\left(x(t),y(t)\right)\right)^2 + \left(Z_x'(x(t),y(t))\right)^2 + 1\right), \quad (2)$$

$$y''(t) = Z_y'\left(x(t),y(t)\right) / \left(\left(Z_x'\left(x(t),y(t)\right)\right)^2 + \left(Z_x'(x(t),y(t))\right)^2 + 1\right).$$

Можно выбрать некоторое нечетное натуральное число $k>3$и взять поверхность, задаваемую формулой

$$Z(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{k}\left(\left(x-\cos(2\pi j/k)\right)^2 + \left(y-\sin(2\pi j/k)\right)^2 + 0.01\right)^{-1}\right) + x^2 + y^2. \quad (3)$$

За начальное условие по координатам можно взять точку около

$(-a;0),\ 0 < a < 1.$(4)

Производные в начальный момент будем предполагать равными нулю.

Тогда точка сначала двигается близко к линии $(-a<x< 0;y =0)$, потомблизко к линии $(0 <x<\varepsilon;\ y =0)$, $\varepsilon<a$, далее движение становится уже непредсказуемым.

2. Построение системы разностных уравнений

Для приближенного решения системы (2)-(3) с начальным условием (4) можно составлять различные системы разностных уравнений. Отсюда следует, что алгоритмвычисления (с учетом дискретности набора машинных чисел) - представляет собой самостоятельный объект. Предлагается

Определение 1. Если алгоритм вычисления с рациональными числами, дающий по исходным данным достаточно длинную последовательность чисел $\{x_n:\ n=1,2,3,\ \ldots\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют такие числа $0<p<q$, что для всех $n\in N$будет $|x_n| <q;$

2) для любого $m\in N$существует такое $n>m$, что $|x_n| >p;$

3) последовательность $\{x_n:\ n=1,2,3,\ \ldots\}$ не близка к периодической;

4) при малых изменениях исходных данных (переходе к соседним машинным числам) последовательность $\{x_n:\ n=1,2,3,\ \ldots\}$ значительно изменяется (то есть имеет место вычислительная неустойчивость),

то такой алгоритм будем называть дискретным странным аттрактором.

3. Описание реальной модели

По заданному нечетному числу k $(k = 5,7,9)$

1) Вырезать из тонкого железного листа правильный $2k$-угольник диаметром 60-100 см. Занумеруем его вершины от 1 до 2k, а центр - 0.

2) Расположить многоугольник горизонтально и согнуть его так, чтобы отрезки 1-0, 3-0, 5-0, …, (2k−1)-0 имели большой наклон вниз к точке 0, а
отрезки 2-0, 4-0, 6-0,…,(2k)-0 имели небольшой наклон вниз к точке 0.

3) Пустить стальной шарик из точки 2. Он должен покатиться к точке 0, потом подняться немного по направлению к точке (2+k), потом скатиться (неопределенно) на отрезок (2+k+1)-0 или на отрезок (2+k−1)-0, по этому отрезку скатиться к точке 0, подняться и т.д.

4. Хаусдорфова асимптотическая эквивалентность

Пространство решений некоторой динамической системы с непрерывным временем с начальным условием φ можно представить в виде непрерывного оператора $W(t,\varphi)$: $\mathbf{R}_+\times\Phi\to Z$, Φ- метрическое пространство начальных условий, Z - метрическое пространство значений решений.

В дополнение к предложенному нами ранее понятию «асимптотическая эквивалентность» [8], мы предлагаем асимптотическую эквивалентность по траекториям.

Определение 2. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φбудем называть отношением хаус дорфовой асимптотической эквивалентности:

$(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого (малого)$\varepsilon \in \boldsymbol{R}_{++}$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_{+}$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta:[s,\infty) \to \boldsymbol{R}_{+}$, что $(\forall t \in [s,\infty))(\rho_Z(W(t,\varphi_1),\ W(\vartheta(t),\varphi_2)) < \varepsilon)$.

Хаус дорфово асимптотическое фактор-пространство будем обозначать $\Phi^{*=}$.

Пример 1. Пусть $\Phi = Z = \boldsymbol{R}^3$. Странный аттрактор Лоренца, притягивающее множество которого состоит из двух касающихся циклов.

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из трех элементов:

- (поскольку многократный обход в окрестности одного цикла можно заменить однократным обходом) класс эквивалентности, представляемый чередованием обхода циклов;
- класс эквивалентности, представляемый приближением к первому циклу;
- класс эквивалентности, представляемый приближением ко второму циклу.

Пример 2. Пусть $\Phi = Z = \boldsymbol{R}^2$. Рассмотрим систему (2)-(3)-(4) при $k=3$. Она имеет три устойчивых и три неустойчивых направления.

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из следующих элементов:

- три класса эквивалентности, представляемыепериодическими движениями по устойчивому и противоположному неустойчивому направлению;
- (бесконечное количество) классов эквивалентности, представляемыхчередованием по трем устойчивымнаправлениям.

Список использованных источников:

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - Москва: Наука, 1984. - 432 с.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - пер. с англ. - Москва: Мир, 1985. - 529 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение, пер. с англ. - Москва: Мир, 1988. - 240 с.
4. Липцев А.В. Странный аттрактор в простейшей механической системе // Компьютерные инструменты в образовании, 2010, № 6. - С. 57-66.
5. Кененбаева Г.М. Явление вычислительного расщепления в теории сингулярно-возмущенных систем // Научный журнал Министерства образования и науки «Поиск», Алматы, Казахстан. - № 4. - 2010. – С. 233-237.
6. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.
7. Панков П.С., Тагаева С.Б. Компьютерное и реальное моделирование явления странного аттрактора системой дифференциальных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 17-23.

8. Панков П.С., Жээнтаева Ж.К. Асимптотическая эквивалентность решений эволюционных уравнений на полуоси // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, № 12, 2019. - С. 69-72.