УДК: 517.928

СЕКИРИК ОКУЯСЫ ҮЧҮН РЕЙСТИН МОДЕЛДИК ТЕҢДЕМЕСИ ЖАНА АНЫН ЖАЛПЫЛАНЫШЫ. АЛАРДЫН ЧЕЧИМИН ПАРАМЕТРЛЕШТИРҮҮ ЖАНА АСИМПТОТИКАСЫ

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЙСА ДЛЯ ЯВЛЕНИЯ СКАЧКА И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИХ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКА

MODEL EQUATION FOR THE OF THE JUMP ANPHENOMENONAND ITS GENERALIZATION. PARAMTRIZATION AND ASYMPTOTICS

Алымкулов К. ОшМУнун профессору
e.mail: keldibay@mail.ru
Кожобеков К.Г. ОшМУнун профессору
e.mail: kudayberdi.kojobekov@oshsu.kg
Азимов Б.А. ОШМУнун доцент
e.mail: azimov@oshsu.kg

Аннотация: Мында Рейс теңемесинин асимптотикасын тургузуу үчүн Жаңы параметлештирүү теңдемеси сунушталды жана анын жардамы менен ал теңдеменин чечиминин ас имптотикасы эсептелди.

Аннотация: Здесь для уравнения Рейсса предложена новое уравнение дляпараметрического представления его решения. И на основе этого представления, получена новое асимптотическое представление решения. Также предложено новое обобщенное уравнение Рейссап для явления прыжка .

Annotation: Here, for the Reiss equation, a new equation is proposed for the parametric representation of its solution. And on the basis of this representation, a new asymptotic representation of the solution is obtained. A new generalized Reiss equation for the jump phenomenon is also proposed

Ачкыч сөздөр: Моделдик теңдеме, параметрлештиүү, асимптотик *а.*

Ключевые слова: Модельное уравнение, а, параметризация, асимптотик.

Key words: Model equation, parametrization, asymptotic.

1. Введение.

В [1] американский математик Reiss предложил модельное уравнения для явления скачка

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2(t)(1-y(t)),\ y(0) = \varepsilon \qquad (1)$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр. Построению асимптотики решения этой задачи посвящены работы $[1-2]$, [8].

Здесь предлагается новое параметризация решения этой задачи. В [8] предложена другая параметризация и получена двух зонная асимптотика.

2. Исторический обзор метода параметризации

Известно, что неявное уравнение окружности, $x^2 + y^2 = 1$ _, если их решать явным образом, то получается негладкое решение, если же его уравнения параметризовать, то получаем аналитическое выражения.

Для возмущенных дифференциальных уравнений, по видимому, впервые параметризация периодического решения, получил А.Пуанкаре для уравнения Дуффинга

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon y^3 + y(x) = 0 \qquad (2)$$

Для этого уравнения ищется $2\pi -$ периодическое решение. Его параметрическое решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \cdots \\ t &= \xi + \varepsilon t_1(\xi) + \varepsilon^2 t_2(\xi) + \cdots \end{aligned} \qquad (3)$$

где $y_j\ \xi\ \ j=1,2,\dots\ ,\ \ t_j\ \xi\ -2\pi$
периодические функции. Если же искать 2π — периодическое решение в виде

$$y\ t\ =y_0\ t\ +\varepsilon y_1\ t\ +\varepsilon^2 y_2\ t\ +\cdots$$

то в виде функции

$$y_j\ t\quad (j=1,2,\dots)$$

появляются секулярные члены и это ряд не является равномерно асимптотическим рядом.

Затем 1948 году в [3] английский механик, и математик Д.Ж.Лайтхилл, внес большой вклад в развитие метода Пуанкаре. Он рассматривал, в частности, сингулярно возмущенное уравнение

$$x+\varepsilon u\ x\ \ \frac{dy\ x}{dx}+p\ x\ y\ x\ =r\ x \qquad (4)$$

$$u\ 1\ =y^0$$

где y^0 —заданная постоянная $p\ x\ ,r\ x$ аналитические функции на отрезке $0,1$. Он предложил искать параметрическое решение задачи (4) в виде

$y\ x\ =y_0\ \xi\ +\varepsilon y_1\ \xi\ +\varepsilon^2 y_2\ \xi\ +\cdots$(5)

$$y\ \xi\ =\xi+\varepsilon\varepsilon x_1\ \xi\ +\varepsilon^2 x_2\ \xi\ +\cdots$$

и чтобы это решение давало равномерно пригодное представление решение задачи (4), на отрезке $\xi\epsilon\ \xi_0\ \varepsilon\ ,1$, где $\xi_0\ 0\ =0$.

Дальнейшее обобщение метода Лайтхилла был сделан в , где параметрическое решение уравнения получено из явного уравнение

$$\xi\frac{dy}{d\xi}=-q\ x\ \xi\ \ y\ \xi\ +r\ x\ \xi\ \ ,\ y\ 1\ =y^0,$$

$$\xi\frac{dx}{d\xi}=x\ \xi\ +\varepsilon y\ \xi\ ,x\ 1\ =1 \qquad (6)$$

Это уравнения названа по предложению
Темпла униформизованным уравнением для задачи (4).
Простой пример

$$x+\varepsilon y\ x\ \ \frac{dy}{dx}+y\ x\ =0,\quad y\ 0\ =b \qquad (7)$$

b —заданная постаянная, дает прекрасный пример методу параметризации.
Уравнение (7) решается точно

$$y=\frac{1}{\varepsilon}\ \ \overline{x^2+\varepsilon(2+\varepsilon b)} \qquad (8)$$

Ясно, что это решение существует на отрезке $0,1$. Асимптотику разложения можно получить методом Лайтхилла или методом параметризации

$$\xi\frac{dy}{d\xi}=-y\ \xi\ ,\ y\ 1\ =b$$

$$\xi\frac{dx}{d\xi}=x+\varepsilon y\ \xi\ ,\quad x\ 1\ =1 \qquad (9)$$

Решая задачи (9) получим

$y\ \xi\ =\frac{b}{\xi}$(10)

$$x\ \xi\ =\xi\ 1+b\varepsilon 2^{-1}\ -\varepsilon(2\xi)^{-1}$$

Исключая из (10) переменную ξ получим точное решение (8) задачи (7).

ТЕПЕРЬ вернемся к задаче Рейса (1). За параметризованное уравнение для (1) берем уравнение

$$\frac{dy(\xi)}{d\xi}=y\ \xi\ \ 1-y\ \xi\ \ ,\ y\ 0\ =\varepsilon \qquad (11.1)$$

$$\frac{dt(\xi)}{d\xi}=\ y\ \xi\ ^{-1},\ t\ 0\ =0 \qquad (11.2)$$

Решая (11.1) имеем

$$\frac{dy}{y(1-y)}=\ \frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\ dy=d\xi\quad =>$$

$$ln\frac{y}{1-y}*\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}=\xi \qquad =>$$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-y)}=e^{\xi}$$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}y=e^{\xi}-e^{\xi}y \qquad =>$$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}+e^{\xi}\ y=e^{\xi} \qquad =>$$

$$y\ \xi\ =\frac{e^{\xi}}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+e^{\xi}}=\frac{\varepsilon e^{\xi}}{1-\varepsilon+\varepsilon e^{\xi}} \qquad (12)$$

Подставляя (12)в (11.2) и решая его

$$\frac{dt(\xi)}{d\xi}=\frac{1-\varepsilon+\varepsilon e^{\xi}}{\varepsilon e^{\xi}}=1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{-\xi} \qquad =>$$

$$t\ \xi\ =\xi+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ 1-e^{-\varepsilon}$$

таким образом параметрическое представления задачи $1\ -\ 2$ представляется в виде

$$y\ \xi\ =\frac{\varepsilon e^{\xi}}{1-\varepsilon+\varepsilon e^{\xi}}=\frac{1}{1+\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)e^{-\xi}} \qquad (13.1)$$

$$t\ \xi\ =\xi+\ 1-\varepsilon\ \varepsilon^{-1}\ 1-e^{-\xi} \qquad (13.2)$$

из (13)вытекает, что при $\xi\epsilon\ 0,\infty$, t –также изменятся на отрезке $0,\infty$. Функция $y(\xi)$ изменяется от ε до единицы. Поэтому задача (1) эквивалентно к задаче 11 .

Так как

$$t'\ \xi\ =1+(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}e^{-\xi}>0$$

из (13.2) вытекает что на отрезке $0,\infty$, переменная tменяется на промежутке $0,t_0$, где $t_0=1+\frac{(1-e^{-1})(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$, а затем экспонтенциально быстро перейдет в точку равновесия $y=1$.

4. Обобщение модельного уравнения Рейса .

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{d\xi}=y^n\ t\ \ 1-y\ t\ , \qquad y\ 0\ =\varepsilon, \qquad (14)$$

$n\epsilon N, n>2$. Решение задачи (14)параметризуем слудующим уравнением

$$\frac{dy}{d\xi}=y\ \xi\ \ 1-y\ \xi\ , \quad y\ 0\ =\varepsilon \quad (15)$$

$$\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{y^{n-1(\xi)}}, \quad t\ 0\ =0$$

Решая эти задачи имеем

$$y\ \xi\ = \frac{\varepsilon e^{\xi}}{1-\varepsilon+\varepsilon e^{\xi}} \qquad (16)$$

$$\frac{dt}{d\xi} = (1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} e^{-\xi})^{n-1}$$

Использованные источники:

1. Reiss. S.L. New asymptotic methods for jump phenomena SIAM J. Appl. Math.,1980, v.39, №3, P.440-455
2. R Kassoy A note on asymptotic methods for jump phenomena. SIAM J. Apll. Math., 1982,v. 42 № 3, P. 926-932.
3. Light hill M.J., “A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid,” Philos. Mag. (7) 40, 1179–1201 (1949).
4. Алымкулов К. The method of uniformization and justification of Light hill method (in Russian). Izvestia AN KyrgSSR, 1981, № 1. pp. 35-38.
5. Alymkulov K and Tursunov T.D Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “ Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, , Publisher InTech, 2017.
6. Алымкулов, К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач – Бишкек: Илим, 1992. – 108 с.
7. Алымкулов, К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла // Известия АН Кирг ССР, 1981. № 1. – С. 35-38.
8. Алымкулов К. Кожобеков К.Г, об асимптотике решения задачи Рейсса для явления прыжка [Текст] // Вестник ЖАГУ, 2019, №2(41). – С. 3-6.
9. Кожобеков К.Г Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, Дисс. на соискание степени доктора наук, 2020, Бишкек.