УДК 539.379:519.632.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОПОР

Дуйшеналиев Т.Б., *Кыргызский Государственный Технический Университет им. И.Раззакова,* e-mail: *duishenaliev@mail.ru*
Аскарбеков Р.Н. *Кыргызский Государственный Технический Университет им. И.Раззакова, askarbekovu@gmail.com*

Аннотация. Предлагается математическая модель упругого деформирования резинового слоя. Модель основана на новом (неклассическом) решении второй краевой задачи механики деформируемого тела и позволяет описать поведение резинометаллических опор (РМО) при воздействии распределенной или сосредоточенной нагрузки. Приводятся численные значения расчетов напряжено-деформированного состояния резины в составе однослойных и многослойных РМО.

Ключевые слова: краевая задача, тензор деформаций, тензор напряжений, перемещение, нагрузка, резина, резинометаллическая опора.

MODELING OF DEFORMATIONS OF RUBBER-METALLIC SUPPORTS

Duishenaliev T.B., *Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov,* e-mail: *duishenaliev@mail.ru*
Askarbekov R.N. *Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov,* e-mail: *askarbekovu@gmail.com*

Abstract. In this paper proposed mathematical model of the elastic deformation of the rubber layers. The model is based on the new (non-classical) solution of the second boundary value problem of deformable body mechanics and allows us to describe the behavior of the rubber-metal supports (RMS) under the influence of a distributed or concentrated load. The numerical value calculation stress-strain condition of the rubber in the composition of single-layer and multilayer RMS.

Keywords: boundary value problem, strain tensor, stress tensor, displacement, load, rubber, rubber-metal support.

Введение. В работе [4] реализован неклассический подход к решению статической краевой задачи механики деформируемого твердого тела. Он позволяет решать статическую краевую задачу в строгом соответствии с ее общепризнанной постановкой. Обстоятельство, что тело с заданными силами в объеме и на поверхности находится в равновесии, является исходным. Областью определения дифференциальных уравнений равновесия и совместности деформаций, а также граничных условий служит конечное состояние равновесия. В предложенном подходе это состояние должно считаться заданным, а не искомым. Иначе невозможно указать положения сил, распределенных в объеме и на поверхности тела. Этот крайне простой и естественный подход вносит в механику деформируемого тела основополагающие дополнения. В частности, выясняется, что линейный тензор Коши может описывать конечные (большие) деформации упругого тела.

Приведем постановку второй краевой задачи:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V, \tag{2}$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i,\ x_i \in S, \tag{3}$$

где ν - коэффициент Пуассона, σ_{ij} - компоненты напряжения, f_i и p_i - соответственно внешние силы, заданные в объеме $\boldsymbol{V}$ и на границе $\boldsymbol{S}$ материального тела.

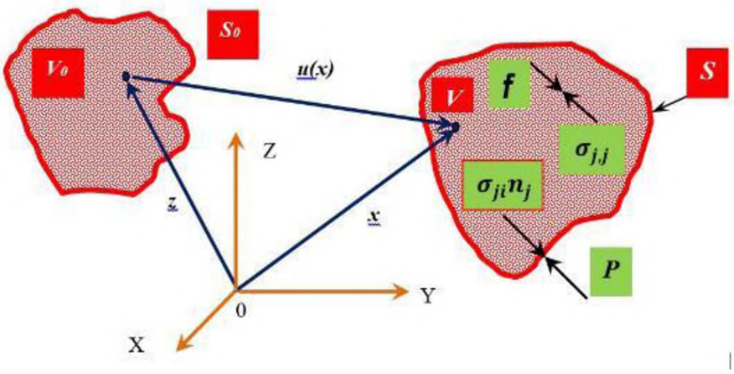


Рис. 1. Слева: состояние равновесия тела без внешних сил, справа: состояния равновесия тела с приложенными силами.

Данная постановка проиллюстрирована на рис.1. В каждой точке материального тела объемом $\boldsymbol{V}$ и границей $\boldsymbol{S}$ имеют приложенные внешние силы, которые уравновешиваются внутренними напряжениями.

Решением это краевой задачи в пространственных координатах (координатах конечного состояния) подразумеваются функции $\sigma_{ij}(x)$, удовлетворяющие уравнениям (1-3) [4]. Из него легко определяются деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left(-\nu\cdot\delta_{ij}\cdot\sigma_{kk} + (1+\nu)\sigma_{ij}\right), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{E}$ - модуль упругости.

Перемещения $u_i(x)$ определяем по формулам Чезаро [4]:

$$u_i(x) = u_i\left(x^0\right) + \omega_{ij}\left(x^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + \frac{1}{E}\int_l\left(\varepsilon_{ik}(y) + \left(x_j - y_j\right)\left(\varepsilon_{k,ij}(y) - \varepsilon_{k,ji}(y)\right)\right)dy_k,$$

где $\boldsymbol{l}$ - линия в области $\boldsymbol{V}$, x^0 – начальная точка этой линии, $u_i\left(x^0\right), \omega_{ij}\left(x^0\right)$ - постоянные интегрирования.

1. Моделирование напряженно-деформированного состояния однослойной резинометаллической опоры (РМО)

Зададимся областью определения уравнений статической краевой задачи в виде указанной на рис. 2 резинометаллического элемента с одним резиновым слоем. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в самом центре, что соответствует положению (X,Y,Z) = (0,0,0).

Итак, под обозначением $\boldsymbol{V}$ будем подразумевать следующую область

$$-0.05 \le x_1 \le 0.05,\ -0.05 \le x_2 \le 0.05,\ 0 \le x_3 \le 0.1 \tag{5}$$

Рассмотрим вторую краевую задачу без массовых сил

$$\sigma_{ji,j} = 0,\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V, \tag{6}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0,\ x_i \in V, \tag{7}$$

$$\sigma_{ji}n_j = \delta_{i2}cx_3,\ x_i \in S, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{V}$ определяется выражениями (5).

Резинометаллическая опора с усилиями (8) на своей поверхности находится в равновесии. Из (8) следует, что равномерно распределенная нагрузка приложена на верхнюю металлическую пластину и значение ее возрастает постепенно.

Решение задачи по способу [4]:

$$\sigma_{ij} = \delta_{i2}\delta_{j2}cx_3,\ x_i \in V \tag{9}$$

Функции перемещений можно определить также из выражения

$$u_i = \frac{1}{E}\int_l c\left(-\nu\delta_{ik}x_3 + (1+\nu)\delta_{i2}\delta_{k2}x_3 + \right.$$

$$\left.\left(x_j - y_j\right)\left(-\nu\left(\delta_{ki}\delta_{3j} - \delta_{kj}\delta_{3i}\right) + (1+\nu)\delta_{k2}\left(\delta_{i2}\delta_{3j} - \delta_{j2}\delta_{3i}\right)\right)\right)dy_k,\ x_i \in V$$

Интегрируя это выражение, находим

$$u_i(x) = -c\left(\delta_{i1}\nu x_3\left(x_1 - x_1^0\right) - \delta_{i2}x_3\left(x_2 - x_2^0\right) + \delta_{i3}\left(x_2^2 + \nu\left(x_3^2 - x_1^2\right) - x_2^0\left(2x_2 - x_2^0\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\nu\left(\left(x_3^0\right)^2 - x_1^0\left(2x_1 - x_1^0\right)\right)\right)/2\right)/E, \quad x_i \in V, \tag{10}$$

где x_i^0 - любая фиксированная точка области V. Приведем развернутый вид функций (10):

$$u_1(x) = -\frac{c\,\nu x_3\left(x_1 - x_1^0\right)}{E},\; u_2(x) = \frac{c\; x_3\left(x_2 - x_2^0\right)}{E},\;\; x_i \in V,$$

$$u_3(x) = -c\left(\left(x_2^2 + \nu\left(x_3^2 - x_1^2\right) - x_2^0\left(2x_2 - x_2^0\right) - \nu\left(\left(x_3^0\right)^2 - x_1^0\left(2x_1 - x_1^0\right)\right)\right)/2E\right),\;\; x_i \in V.$$

Рассмотрим три случая нагружения: $c = 0,\ c = 0.3,\ c = 0.6$. На поверхности S внешних сил нет, тело занимает область V (5) и находится в равновесии. На рисунке 2 приводятся: слева без приложенной нагрузки и справа с приложенной нагрузкой. В качестве x^0 можно брать координаты любой точки области (5). В дальнейшем примем для начальной координаты $x_1^0 = 0.05,\ x_2^0 = 0.05,\ x_3^0 = 0$.

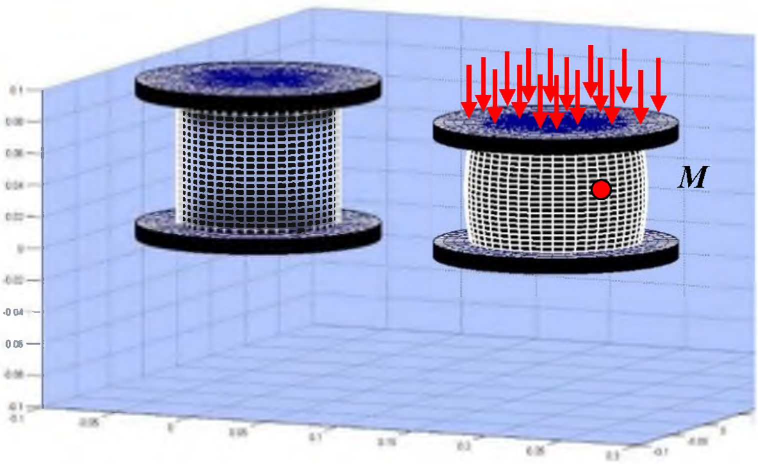


Рис. 2. Слева: состояние равновесия тела, справа: состояния равновесия резинометаллической опоры при нагрузке c=0.3.

Рассмотрим точку M, находящуюся внутри резинового слоя, которая под действием сжимающих усилий перемещается. Определим перемещение точки M при действии на верхнюю металлическую пластину распределенной нагрузки. Эта точка находится в середине резинового слоя по высоте и имеет наибольшие значения перемещения при выпучивании резинового слоя. Модуль упругости для резины марки СНК 3826 принят Е=12МПа, коэффициент Пуассона ν=0.4995.

Для предлагаемой математической модели, когда c=0.3 (внешняя нагрузка равна 3.82 МПа) в программном комплексе Matlab был написан специальный программный код. В данной системе был произведен расчет компонент перемещения точки M в метрах

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0084 \end{pmatrix}.$$

Тензор деформации рассчитывается в Matlab определяется по формулам $\varepsilon_{ij} = 0.5\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$. Или в развернутом виде:

$$\varepsilon_{ij} := c\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_1}u_1(x_1,x_2,x_3)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}u_1(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_1}u_2(x_1,x_2,x_3)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}u_1(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_1}u_3(x_1,x_2,x_3)\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_2(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_2}u_1(x_1,x_2,x_3)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}u_2(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_2}u_2(x_1,x_2,x_3)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}u_2(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_2}u_3(x_1,x_2,x_3)\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_3(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}u_1(x_1,x_2,x_3)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}u_3(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}u_2(x_1,x_2,x_3)\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}u_3(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}u_3(x_1,x_2,x_3)\right) \end{bmatrix}$$

Компоненты тензора деформаций для точки *M*:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0.064 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

Для расчета тензора напряжений в точке *M* воспользуемся обобщенным законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Для цилиндра принимаем, $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, $\sigma_x = \sigma_y$, $\nu = 0.4995$. В итоге получим компоненты напряжения, в МПа:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.495 & 0 & 0 \\ 0 & 1.495 & 0 \\ 0 & 0 & 1.504 \end{pmatrix}.$$

Увеличим значение нагрузки и рассмотрим случай, когда c=0.6 (нагрузка равна 7.64 МПа). Под действием приложенных сил тело занимает ту же область в пространстве.

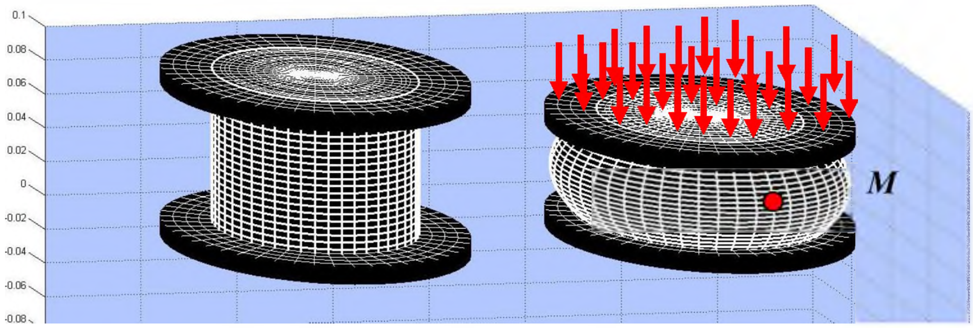


Рис. 3. РМО №2 под воздействием сжимающих усилий c=0.6.

Поле перемещений для точки *M*, в метрах:

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0168 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора деформаций для точки *M*:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0.255 & 0 & 0 \\ 0 & 0.255 & 0 \\ 0 & 0 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

Тензор напряжений для точки M, в МПа:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5.981 & 0 & 0 \\ 0 & 5.981 & 0 \\ 0 & 0 & 6.018 \end{pmatrix}.$$

Данную задачу (1), (2), (3) можно также представить уравнениями Навье:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0,\ x_i \in V. \tag{11}$$

Граничные условия для этих уравнений можно записать в трех видах:

- Заданы перемещения на поверхности $\boldsymbol{S}$, которые определяются функцией (10).
- Заданы внешние силы на поверхности $\boldsymbol{S}$, определяемые выражением (8).
- Заданы на гранях перемещения, определяемые выражением (10),

в которую поочередно надо подставить следующие значения координат $x_1 = -0.05,\ x_1 = 0.05,\ x_2 = -0.05,\ x_2 = 0.05$, а на остальной поверхности

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, 0) = -\delta_{i2} c x_3,\ \sigma_{ij}(x_1, x_2, 0.1) = \delta_{i2} c x_3. \tag{13}$$

2. Моделирование напряженно-деформированного состояния многослойных резинометаллических опор (РМО)

По описанному алгоритму вычислялись параметры напряженно-деформированного состояния резинового слоя в составе многослойных резинометаллических опор. РМО №3 – два слоя резинового тела и три металлические пластины, РМО №4 – три слоя резинового тела и четыре металлических пластин, РМО №5 – четыре слоя резинового тела и пять металлических пластин. Высота всех РМО равнялась 0.1 м, а их диаметр – 0.105 м.

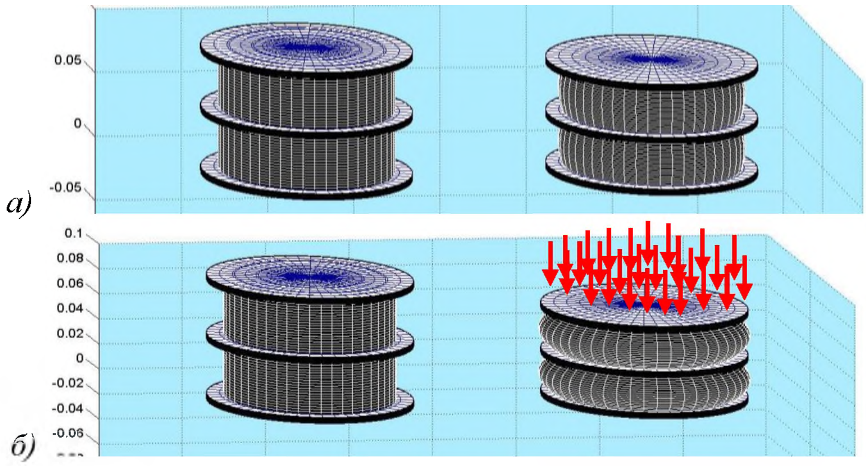
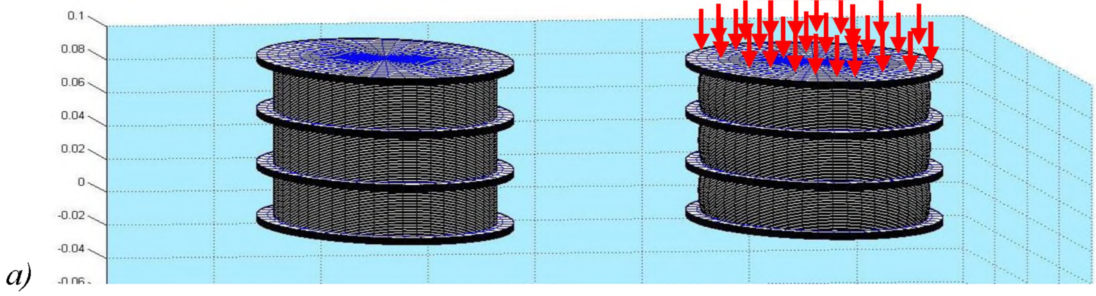
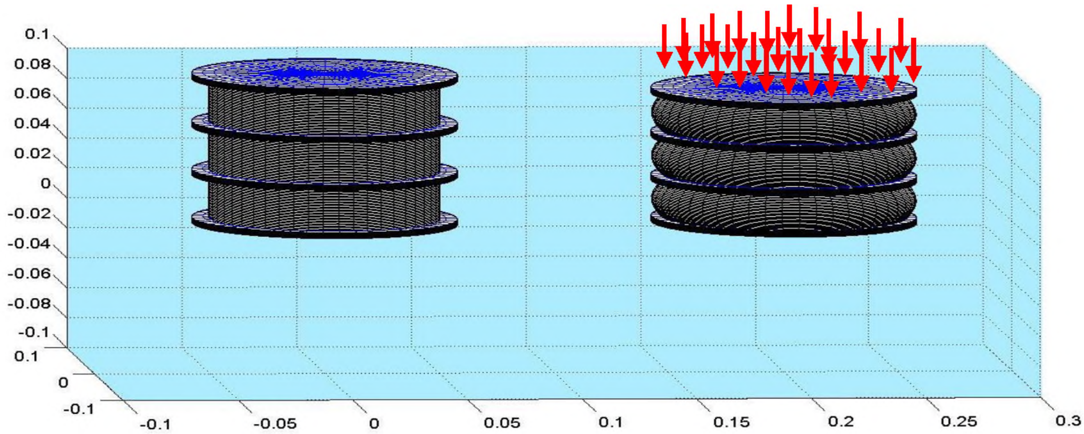


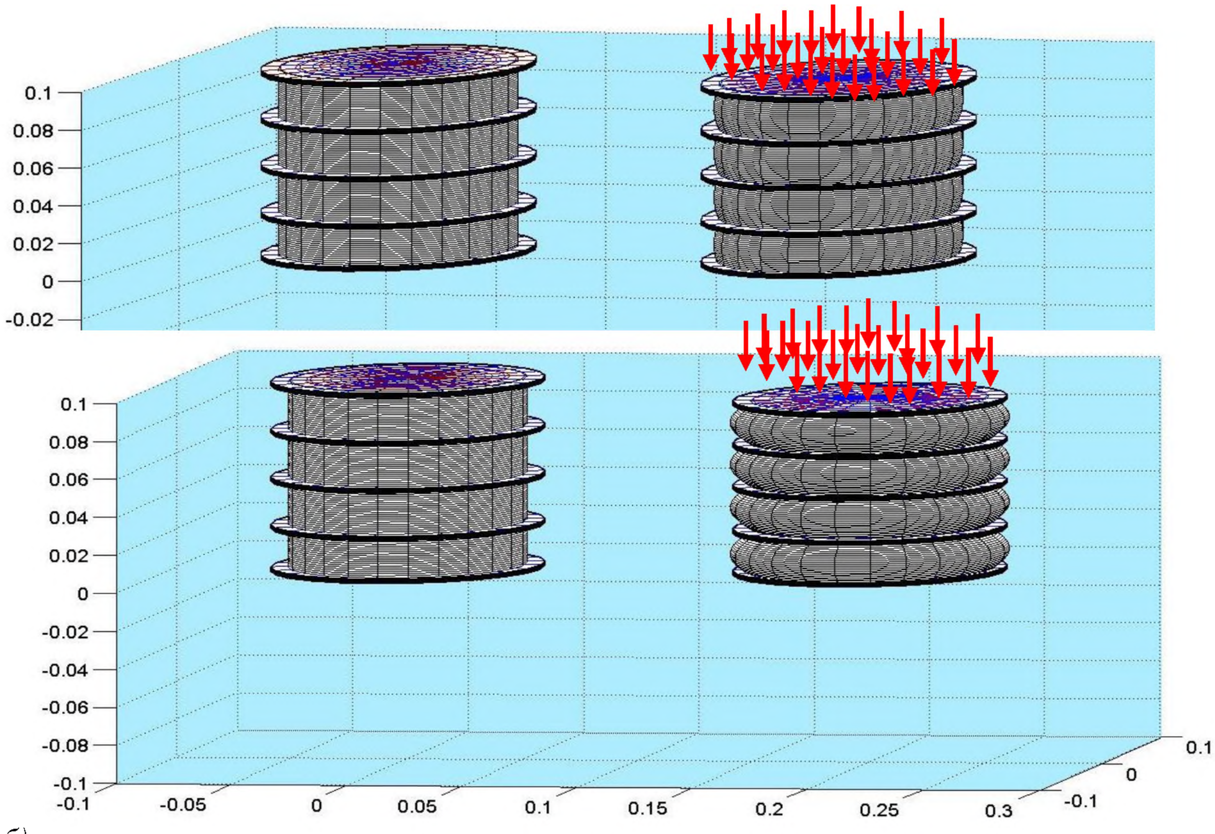
Рис. 4. Сжатие РМО №3 под действием равномерно распределенной нагрузки. Для случаев: ***а)*** нагрузка равна с=0.3, ***б)*** – с=0.6.





б)

Рис. 5. Сжатие РМО №4 под действием равномерно распределенной нагрузки. Для случаев: ***а)*** нагрузка равна с=0.3, ***б)*** – с=0.6.



а)

б)

Рис. 6. Сжатие РМО №5 под действием равномерно распределенной нагрузки. Для случаев: ***а)*** нагрузка равна с=0.3, ***б)*** – с=0.6.

Заключение. В работе приводятся результаты применения математической модели на основе аналитического метода, которая позволяет описывать деформированное и напряженное состояния резинометаллических элементов при воздействии сжимающих усилий. Это направление относится к актуальным проблемам механики и тесно связано с решением разнообразных инженерно-технических задач. Модель определяет напряженное состояние РМО и может успешно применяться при расчете малых, конечных и больших деформаций резинометаллических опор. Предлагаемая математическая модель развивается применительно к резиноподобным материалам, аналитический метод решения статических краевых задач теории упругости, предложенный Т.Б.Дуйшеналиевым, является весьма удобной при использовании современных компьютерных программ [1,4,13]. Новые результаты получены на основе применения фундаментальных положений и законов механики сплошных сред.

Список литературных источников

1. **Аскарбеков, Р.Н.** Моделирование напряженно-деформированного состояния вибро- и сейсмоизолирующих резинометаллических элементов [Текст] дис. … канд. физ.-мат. наук / Р.Н. Аскарбеков. Бишкек, 2016. – 126 с.
2. **Васидзу, К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст]: пер. с англ. / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. **Васильев, В.В.** К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях [Текст] / В.В. Васильев, Л.В. Федоров // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 2. – С. 82-92.
4. **Дуйшеналиев, Т.Б**. Неклассические решения механики деформируемого тела. – Москва: Издательство МЭИ, 2017. – 400 с.
5. **Ле Тхи Тху Хуэн.** Исследование сейсмоизолируемого здания с применением заменяемых резинометаллических сейсмоизоляторов [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / Ле Тхи Тху Хуэн. – Москва, 2010. – 135с.
6. **Мондрус, В.Л.** Проблема определения собственных частот резинометаллического виброизоляторов современных программных комплексах, реализующих метод конечного элемента [Текст] / В.Л. Мондрус, Д.К. Сизов // Сборник докладов Междунар. науч.-техн. конф. проф.-препод. состава. – М., 2008. – С. 58-62.
7. **Новацкий, В.** Теория упругости [Текст] / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872с.
8. **Ормонбеков, Т.О.** Применение тонкослойных резинометаллических опор для сейсмозащиты зданий в условиях территории Кыргызской Республики [Текст] / Т.О. Ормонбеков, У.Т. Бегалиев, А.В. Деров и др. – Бишкек: Учкун, 2005. – 212 с.
9. **Ормонбеков, Т.О.** Применение тонкослойных резинометаллических элементов (ТРМЭ) в сейсмозащите зданий, сооружений и инженерного оборудования [Текст] / Т.О. Ормонбеков. – Бишкек: Илим, 1996. – 25 с.
10. **Потураев, В.Н.** Резиновые и резинометаллические детали машин [Текст] / В.Н. Потураев. – М.: Машиностроение, 1966. – 298 с.
11. **Сергаева, М.Ю.** Обоснование работоспособности резинометаллических виброизоляторов систем виброзащиты авиационного оборудования [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / М.Ю.Сергаева. – Омск, 2005. – 163 с.
12. **Сизов, Д.К.** Статика и динамика резинометаллического виброизолятора [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / Д.К. Сизов. – Москва, 2008. – 149 с.
13. **Duishenaliev T.B.** Calculation of deformation of rubber layer in rubber metal elements [Text] / T.B. Duishenaliev, R.N. Askarbekov // Proceedings of 15th International Scientific Conference Engineering for Rural Development. – Jelgava, Latvia, 2016. – 25-27.05. – P. 1402-1410.
14. **Gent, A.N.** Load-deflection relations and surface strain distributions for flat rubber pads [Text] / A.N. Gent // Rubber Chem. Techn. – 1958. – Vol. 31, № 2. – P. 395-414.
15. **Kikuchi, F.** A new variational functional for the finite element method and its application to plate and shell problems [Text] / F. Kikuchi, Y. Ando // Nuclear Engin. and Design. – 1972. – No. 21. – P. 95-113.