УДК 517.968.72

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. Искандаров, Е.А. Комарцова

Изучается влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность на полуоси и стремление к нулю при неограниченном росте аргумента решений однородного дифференциального уравнения второго порядка. Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: линейное однородное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка типа Вольтерра; влияние интегральных возмущений типа Вольтерра; ограниченность решений; стремление к нулю решений.

СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНА ИНТЕГРАЛДЫК КЕЛИШПЕСТИКТЕРДИН ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИН ИЗИЛДӨӨ ЫКМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

С. Искандаров, Е.А. Комарцова

Бул макалада экинчи тартиптеги бир тектүү дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын аргументинин чексиз өсүүсүндө Вольтерра тибиндеги интегралдык келишпестиктердин жарым окто чектелгендигине жана нөлгө ыктоосуна тийгизген таасири изилденген. Вольтерра тибиндеги экинчи тартиптеги бир тектүү сызыктуу интегралдык-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын аргументинин чексиз өсүүсүндө жарым окто чектелишине жана нөлгө умтулуусуна жетиштүү шарттар белгиленет. Көрсөтмөлүү мисал келтирилген.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги экинчи тартиптеги бир тектүү сызыктуу интегралдык-дифференциалдык теңдеме; Вольтерра тибиндеги интегралдык келишпестиктердин таасири; чыгарылыштардын чектелиши; чыгарылыштардын нөлгө умтулуусу.

ABOUT METHOD OF INTEGRAL PERTURBATIONS INVESTIGATION INFLUENCE ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE SECOND ORDER LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION

S. Iskandarov, E.A. Komartsova

The influence of the Volterra type integral perturbations on the boundedness on the semiaxis and tending to zero at unbounded growth of the argument of homogeneous second-order differential equation solutions is studied. Sufficient conditions for boundedness on the semiaxis and tending to zero at unbounded growth of the argument of all solutions of Volterra type second order linear homogeneous integro-differential equation are established. An illustrative example is given.

Key words: linear homogeneous integro-differential equation of Volterra type second order; the influence of Volterra type integral perturbations; boundedness of solutions; tending to zero of solutions.

Все фигурирующие ниже функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$.

Ставится следующая

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале J и стремления к нулю при $t \to \infty$ всех решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) второго порядка типа Вольтерра:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = 0, \ \ t \ge t_0 \tag{1}$$

в случае, когда соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение (ДУ):

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0, \ \ t \ge t_0 \tag{1_0}$$

может иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами, т. е. изучить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность на J и стремление к нулю при $t \to \infty$ решений ДУ (1_0).

В такой общей постановке эта задача решается впервые. Суть предлагаемого нами метода такова. Сначала в ИДУ (1) делается следующая нестандартная замена [1–3]:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \tag{2}$$

где λ – некоторый вспомогательный параметр (в [1, 2] $\lambda = 0$, в [3] $\lambda \ne 0$); $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция; $y = y(t)$ – новая неизвестная функция. Тогда ИДУ (1) сводится к следующей эквивалентной системе [3]:

$$\begin{aligned} &x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \\ &y'(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [P(t,\tau)x(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)]d\tau = 0, \quad t \ge t_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $b_1(t) \equiv a_1(t) - \lambda^2 + W'(t)(W(t))^{-1}$, $b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4](W(t))^{-1}$,

$P(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - \lambda^2 Q_1(t,\tau)]$, $K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1} Q_1(t,\tau)W(\tau)$.

Далее следуя [4], введем условие:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

предположим, что $\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ – некоторые срезывающие функции, обозначим $R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$ $(i = 1..n)$.

Затем аналогично [5, с. 194–217] для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3) ее первое уравнение умножаем на $x(t)$, а второе – на $y(t)$, сложим полученные соотношения, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условие *(K)*, функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$ $(i = 1..n)$, используем лемму 1.4 [6]. В результате получаем следующее тождество:

$$u(t) \equiv \big(x(t)\big)^2 + 2\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \big(x(s)\big)^2 ds + \big(y(t)\big)^2 + \sum_{i=1}^{n} \Big[R_i(t,t_0)\big(Y_i(t,t_0)\big)^2 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)\big(Y_i(t,\tau)\big)^2 d\tau \Big] \equiv c_* + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \Big[R'_{is}(s,t_0)\big(Y_i(s,t_0)\big)^2 +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} R''_{is\tau}(s,\tau)\big(Y_i(s,\tau)\big)^2 d\tau \Big] ds + 2\int_{t_0}^{t} y(s)\Big\{\big[W(s) - b_0(s)\big]x(s) - b_1(s)y(s) -$$

$$- \int_{t_0}^{s} \big[P(s,\tau)x(\tau) + K_0(s,\tau)y(\tau)\big] d\tau \Big\} ds, \qquad (4)$$

где $Y_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi_i(\eta) y(\eta) d\eta \ \ (i = 1..n)$, $c_* = \big(x(t_0)\big)^2 + \big(y(t_0)\big)^2$.

Переходом от тождества (4) к интегральному неравенству для $u(t)$ и применением леммы 1 [7] доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть 1) $\lambda = 0$;

2) $R_i(t,t_0) \ge 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau) \ge 0$, существуют функции $R_i^*(t) \ge 0$, $R_i^{**}(t) \ge 0$ такие, что $R'_{it}(t,t_0) \le R_i^*(t) R_i(t,t_0)$, $R''_{it\tau}(t,\tau) \le R_i^{**}(t) R'_{i\tau}(t,\tau)$ $\big(i = 1..n\big)$. Тогда для любого решения $\big(x(t), y(t)\big)$ системы (3) справедлива оценка:

$$\big(x(t)\big)^2 + 2\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \big(x(s)\big)^2 ds + \big(y(t)\big)^2 + \sum_{i=1}^{n} R_i(t,t_0)\big(Y_i(t,t_0)\big)^2 \le c_* M_1(t), \qquad (5)$$

где

$$M_1(t) \equiv \exp\Bigg(\int_{t_0}^{t} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n} \Big[R_i^*(s) + R_i^{**}(s) \Big] + \Big| a_1(s) + W'(s)\big(W(s)\big)^{-1} \Big| +$$

$$+ |a_0(s)| \big(W(s)\big)^{-1} + \int_{t_0}^{s} \Big[\big(W(s)\big)^{-1} |Q_0(s,\tau)| + |K_0(s,\tau)| \Big] d\tau \Bigg\} ds \Bigg).$$

Пусть, кроме того,

3) $R_j(t,t_0) > 0$, $\psi_j(t) > 0$, $\psi'_j(t) \ge 0$, $q_j(t,c_*) \ge 0$, $q'_j(t,c_*) \ge 0$, $q'_j(t,c_*)\big(\psi_j(t)\big)^{-1} \in L^1(J,R_+)$ $(1 \le j \le n)$; 4) $W'(t) \in L^1(J,R)$, где $q_j(t,c_*) \equiv \sqrt{c_*}\big(R_j(t,t_0)\big)^{-\frac{1}{2}}\big(M_1(t)\big)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\int_{t_0}^{t} y(s) ds = O(1)$ и любое решение ИДУ (1) $x(t) = O(1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть 1) $\lambda \ne 0$;

2) выполняется условие 2) теоремы 1. Тогда для любого решения $\big(x(t), y(t)\big)$ системы (3) справедлива оценка (5), где в правой части вместо функции $M_1(t)$ стоит

$M_2(t) \equiv \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[R_i^*(s)+R_i^{**}(s)\right]+|b_1(s)|+|b_0(s)|+\int_{t_0}^{s}\left[|P(s,\tau)|+|K_0(s,\tau)|\right]d\tau\right\}ds\right)$. Пусть, кроме того,

3) выполняется условие 3) теоремы 1, где в функции $q_j(t,c_*)$ вместо $M_1(t)$ стоит $M_2(t)$; 4) $W^{(k)}(t)\to 0$ при $t\to\infty$ ($k=0,1$). Тогда $\int_{t_0}^{t} y(s)ds = O(1)$ и любое решение ИДУ (1) $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

В обеих теоремах из соответствующей оценки (5) следует оценка:

$$R_j(t,t_0)\left(\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)y(\eta)d\eta\right)^2 \le c_* M_r(t) \quad (1\le j\le n;\ r=1,2),$$

из которой имеем:

$$\left|\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)y(\eta)d\eta\right| \le \sqrt{c_*}\left(R_j(t,t_0)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(M_r(t)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

К интегральному неравенству первого рода (6) применяем следующую лемму.

ЛЕММА [4, с. 111; 8]. Пусть $\psi(t)>0$, $\psi'(t)\ge 0$, $q(t,c)\ge 0$, $q'(t,c)\ge 0$, $0\le c = const$, $t\ge t_0$. Тогда из интегрального неравенства первого рода $\left|\int_{t_0}^{t}\psi(s)z'(s)ds\right|\le q(t,c)$ вытекает оценка:

$$|z(t)|\le|z(t_0)|+\left(\psi(t_0)\right)^{-1}q\left(t_0,c\right)+\int_{t_0}^{t}q'(s,c)\left(\psi(s)\right)^{-1}ds.$$

В результате из (6) получаем: $\int_{t_0}^{t}y(s)ds=O(1)$. Наконец, от замены (2) при $\lambda=0$ для теоремы 1 и $\lambda\ne 0$ для теоремы 2 переходим к формуле Коши для любого начального значения $x(t_0)$ и, интегрируя по частям, будем иметь окончательные утверждения теорем 1, 2. При доказательстве последнего утверждения теоремы 2 используется правило Лопиталя в форме Штольца [9, с. 115].

Приведем простейший пример, удовлетворяющий условиям обеих теорем.

ПРИМЕР. Для ИДУ второго порядка

$$x''(t)-7(t+1)^{-1}x'(t)+12(t+1)^{-2}x(t)+\int_{0}^{t}\frac{e^{-t+\tau+25(t^2+\tau^2)}(t+\tau+1)}{t+\tau+2}\left[x(\tau)+x'(\tau)\right]d\tau=0,$$

$t\ge 0$ выполняются все условия теорем 1, 2 при $\lambda=0$ и $\lambda=1$, $W(t)\equiv e^{-t}$ здесь $t_0=0$, $P(t,\tau)\equiv 0$, $n=1$, $\psi_1(t)\equiv e^{25t^2}$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}$, $R_1^*(t)\equiv\frac{1}{(t+1)(t+2)}$, $R_1^{**}(t)\equiv 0$ и поэтому для любого решения этого ИДУ верны утверждения теорем 1, 2. Однако для соответствующего ДУ Эйлера:

$$x''(t) - 7(t+1)^{-1} x'(t) + 12(t+1)^{-2} x(t) = 0, \quad t \geq 0$$

утверждения теорем 1, 2 не справедливы для любых их ненулевых решений, что подтверждается общим решением этого ДУ: $x(t) = \left[c_1 + (t+1)^4 c_2\right](t+1)^2$ (c_1, c_2 – произвольные постоянные).

Таким образом, нам удалось найти класс ИДУ (1), для которого поставленная выше задача решаема.

Литература

1. *Искандаров С.* Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра / С. Искандаров, А.Т. Халилов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2003. Вып. 32. С. 57–62.
2. *Искандаров С.* Об оценках и асимптотических свойствах решений и первых и вторых производных линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра / С. Искандаров, А.Т. Халилов // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. матем., мех., информатика. Алматы, 2004. № 1 (40). С. 67–75.
3. *Искандаров С.* О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 31–35.
4. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / пер. с фр. / В. Вольтерра. М.: Наука, 1976. 288 с.
6. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис.. д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
7. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып 9. С. 68–103.
8. *Искандаров С.* О влиянии интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения второго порядка / С. Искандаров // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. № 5. С. 110–115.
9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1967. 472 с.