УДК 517.928

Кожобеков К.Г., к.ф.-м.н., доцент
Ошский государственный университет

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

ИРРЕГУЛЯРДУУ ӨЗГӨЧӨЛҮККӨ ЭЭ БОЛГОН ЭКИНЧИ ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

ASYMPTOTICS OF THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTION WITH AN IRREGULAR SINGULARITY

Аннотация: *В статье исследована вторая краевая задача для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение рассматриваемой задачи. С помощью принципа максимума получена оценка остаточного члена равномерного асимптотического разложения.*

Ключевые слова: *асимптотика, малый параметр, равномерная асимптотика, принцип максимума, вторая краевая задача.*

Аннотация: *Макалада сингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык тендеме үчүн экинчи түрдөгү чек аралык маселе изилденген. Каралып жаткан маселенин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы чек аралык функциялар методу менен тургузулган. Максимум принцибинин жардамында бир калыптагы асимптотикалык ажыралманын калдык мүчөсү бааланган.*

Түйүндүү сөздөр*: асимптотика, кичине параметр, бир калыптагы асимптотика, максимум принциби, экинчи чек аралык маселе.*

Abstract: *The second boundary value problem for a singularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order is investigated. Using the boundary function method, a uniform asymptotic expansion of the problem under consideration is constructed. Using the maximum principle, an estimate of the residual term of the uniform asymptotic expansion is obtained.*

Key words*: Asymptotics, small parameter, uniform asymptotics, maximum principle, second boundary value problem.*

Постановка задачи. Рассмотрим вторую краевую задачу

$$\varepsilon y''_{\varepsilon}(x) - x^3 p(x) y'_{\varepsilon}(x) - q(x) y_{\varepsilon}(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y'_{\varepsilon}(0)=a, \quad y'_{\varepsilon}(1)=b, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $p(x)$, $q(x) > 0$, $x\in[0,1]$; $p, q, f \in C^{\infty}[0,1]$, a, b – const.

Задача (1)-(2) имеет единственное решение [1], требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y_{\varepsilon}(x)$ на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Отметим, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon= 0$):

$$x^3 p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x),$$

имеет нерегулярную особую точку x=0.

В работе [2] исследована первая краевая задача для уравнения

$$\varepsilon y''_{\varepsilon}(x) \pm x^2 p(x) y'_{\varepsilon}(x) - q(x) y_{\varepsilon}(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1.$$

Основной результат

Решение соответствующего невозмущенного уравнения (ε=0) в точке x=0 имеет особенность. Поэтому, интегрируем так чтобы $y_0(x) \in C^{\infty}[0,1]$, т.е. используем идею [2]-[4]. В таком случае, решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде:

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)} \right)' e^{Q(s)} ds,$$

где $Q(x) = \int_1^x \frac{q(t)}{t^3 p(t)} dt.$

Заметим, что это решение $y_0(x)$ не удовлетворяет краевым условиям (2).

Чтобы решить эту проблему асимптотическое решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y_{\varepsilon}(x) = V_{\varepsilon}(x) + \Pi_{\mu}(t) + Z_{\varepsilon}(\tau) \tag{3}$$

где $V_{\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x),\ \Pi_{\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t),\ t = x/\mu,\ Z_{\varepsilon}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau),$

$\tau = (1-x)/\varepsilon,\ \mu = \sqrt{\varepsilon}.$

Тогда

$$y'_{\varepsilon}(x) = V'_{\varepsilon}(x) + \frac{1}{\mu} \Pi'_{\mu}(t) - \frac{1}{\varepsilon} Z'_{\varepsilon}(\tau), \tag{4}$$

$$y''_{\varepsilon}(x) = V''_{\varepsilon}(x) + \frac{1}{\mu^2} \Pi''_{\mu}(t) + \frac{1}{\varepsilon^2} Z''_{\varepsilon}(\tau), \tag{5}$$

Подставляя соотношения (3)-(5) в равенство (1) получаем:

$$\varepsilon V''_{\varepsilon} - x^3 p(x) V'_{\varepsilon}(x) - q(x) V_{\varepsilon}(x) = f(x), \tag{6}$$

потребуем чтобы $v_k(x) \in C^{\infty}[0,1]$.

Для $\Pi_{\mu}(t)$ получаем уравнение:

$$\Pi''_{\mu}(t) - \mu^2 t^3 p(\mu t) \Pi'_{\mu}(t) - q(\mu t) \Pi_{\mu}(t) = 0, \tag{7}$$

потребуем, чтобы функции $\pi_k(t)$ удовлетворяли краевым условиям:

$\pi'_{2k}(0) = 0,\ \pi'_1(0) = a - v'_0(0),\quad \pi'_{2k+3}(0) = -v'_{k+1}(0),\ \lim_{t \to \infty} \pi'_k(t) = 0,\ k \in N_0.$

А для уравнения

$$Z''_\varepsilon(\tau)+(1-\varepsilon\tau)^3 p(1-\varepsilon\tau)Z'_\varepsilon(\tau)-\varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z_\varepsilon(\tau)=0, \tag{8}$$

вставим краевые условия в виде

$$z'_0(0)=0,\ z'_1(0)=v'_0(1)-b,\ z'_{k+2}(0)=v'_{k+1}(1),\ \lim_{\tau\to\infty} z'_k(\tau)=0,\ k\in N_0.$$

Из (6) имеем:

$$x^3 p(x)v'_0(x)+q(x)v_0(x)=-f(x),$$

$$x^3 p(x)v'_k(x)+q(x)v_k(x)=v''_{k-1}(x),\ k\in N.$$

Отсюда получаем:

$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds, \quad v_0\in C^\infty[0,1];$$

$$v_k(x)=\frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds, \quad v_k\in C^\infty[0,1], k\in N;$$

где $Q(x)=\int_1^x \frac{q(t)}{t^3 p(t)}dt.$

Перейдем теперь к исследованию задачи (7). Имеем:

$$\pi''_0(t)-q(0)\pi_0(t)=0, t\in(0,\infty), \tag{9}$$

$$\pi'_0(0)=0, \lim_{t\to\infty}\pi'_0(t)=0; \tag{10}$$

$$\pi''_1(t)-q(0)\pi_1(t)=0, t\in(0,\infty), \tag{11}$$

$$\pi'_1(0)=a-v'_0(0), \lim_{t\to\infty}\pi'_1(t)=0; \tag{12}$$

$$\pi''_k(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,\dots,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}), t\in(0,\infty), \tag{13}$$

$$\pi'_{2k}(0)=0, \quad \pi'_{2k+1}(0)=-v'_k(0), \lim_{t\to\infty}\pi'_{k+1}(t)=0, k\in N. \tag{14}$$

где правые части $G_k(t,\pi_0,\pi'_0,\dots,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})$ линейно зависят от предыдущих $\pi_0,\pi'_0,\dots,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}$, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от *t*.

Задачи (9)-(10), (11)-(12), (13)-(14) имеют единственные решения, представимые в виде

$$\pi_0(t)\equiv 0,\ \pi_1(t)=-\frac{a-v'_0(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t}, \pi_{2k}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t),$$

$$\pi_{2k+1}(t)=\frac{v'_k(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t),\, k\in N.$$

где $H_k(t)$ – полиномы.

Заметим, что $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in\boldsymbol{N}_0$.

Из (8), получаем

$$z''_0(\tau)+p(1)z'_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \tag{15}$$

$$z'_0(0)=0,\ \lim_{\tau\to\infty}z'_0(\tau)=0\ ; \tag{16}$$

$$z''_1(\tau)+p(1)z'_1(\tau)=q(1)z_0(\tau)+(3-p'(1))\tau z'_0(\tau),\ \tau\in(0,\infty), \tag{17}$$

$$z'_1(0)=v'_0(1)-b,\ \lim_{\tau\to\infty}z'_1(\tau)=0\ ; \tag{18}$$

$$z''_k(\tau)+p(1)z'_k(\tau)=\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty), \tag{19}$$

$$z'_{k+1}(0)=v'_k(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z'_{k+1}(\tau)=0, k\in N. \tag{20}$$

где правые части $\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1})$ линейно зависят от предыдущих $z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1}$, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от τ.

Задачи (15)-(16), (17)-(18) и (19)-(20) имеют единственные решения, представимые в виде

$$z_0(\tau)\equiv 0,\ z_1(\tau)=-\frac{v'_0(1)-b}{p(1)}e^{-p(1)\tau},$$

$$z_{k+1}(\tau)=-\frac{v'_k(1)}{p(1)}e^{-p(1)\tau}+\tau e^{-p(1)\tau}\tilde{H}_k(\tau), k\in N,$$

где $\tilde{H}_k(\tau)$ – полиномы, $z_k(\tau)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in\boldsymbol{N}_0$.

Обоснование асимптотического разложения. Оценим остаточный член, пусть $y_\varepsilon(x)=V_{\varepsilon,n}(x)+\Pi_{\mu,2n}(t)+Z_{\varepsilon,n}(\tau)+R_{\varepsilon,n}(x)$,

где $V_{\varepsilon,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x), \Pi_{\mu,2n}(t)=\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t),\quad Z_{\varepsilon,n}(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$R_{\varepsilon,n}(x)$ – остаточная функция.

Тогда для остаточной функции получим следующую задачу:

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,n}(x)-x^3p(x)R'_{\varepsilon,n}(x)-q(x)R_{\varepsilon,n}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}),\varepsilon\to 0,\ 0\le x\le 1, \tag{21}$$

$$R'_{\varepsilon,n}(0)=O\left(e^{-1/\varepsilon}\right), R'_{\varepsilon,n}(1)=O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right), \varepsilon\to 0. \qquad (22)$$

Из принципа максимума следует, что для решения задачи (21)-(22) справедлива асимптотическая оценка: $R_{\varepsilon,n}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2})$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$.

Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

где $t=x/\mu, \tau=(1-x)/\varepsilon, \mu=\sqrt{\varepsilon}.$

Литература:

1. Ильин А.М., Данилин А.Р. (2009). Асимптотические методы в анализе. М.: ФИЗМАТЛИТ. С.248.
2. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. (2019). Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Т. 29, Вып 3, С.1-9, https://doi.org/10.20537/vm190304
3. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. (2016). Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе. Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. Т. 1. № 39, С. 42–52.
4. Турсунов, Д.А. (2017). Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге.Тр. ИММ УрО РАН. Т. 23, № 2, С. 239–249.