



**БОЛОТБЕК Т., ТЕМИРКАНОВА Ж.Т., НУРЛАН УУЛУ А., ТОЙЧУ КЫЗЫ Ж.,
АСКАРОВА А.**

¹Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры им.
Н.Исанова (КГУСТА) Бишкек, Кыргызская Республика

**BOLOTBEK T., TEMIRKANOVA J.T., NURLAN UULU A., TOYCHU KYZY J., A.
ASKAROVA A.**

¹Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture n.a. N.Isanov
Bishkek, Kyrgyz Republic
(temir.b.amir@gmail.com)

**ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕТОДА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ К
РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**APPLICATION OF THE RESULTS OF THE FOCUSED DEFORMATION
METHOD TO THE RESULTS OF NUMERICAL EXPERIMENTS BASED ON THE
FINITE ELEMENT METHOD**

Макалада туташ пайдубал плиталарын имараттын негизинде колдонуу жана концентрацияланган деформациялар методун чекит элементтер ыкмасына негизделген сандык эксперименттердин жыйынтыктарына жакындаштырууну теориялык негиздөө маселелери каралган.

Өзөк сөздөр: *туташ фундамент, концентрацияланган деформациялар методу, серпилгич негиз, дифференциалдык теңдеме, устун, серпилгич негиздеги устун, чекит элементтер методу.*

В статье рассматриваются вопросы применения сплошных фундаментных плит в основании и теоретическое обоснование аппроксимации метода сосредоточенных деформаций к результатам численных экспериментов на основе метода конечных элементов.

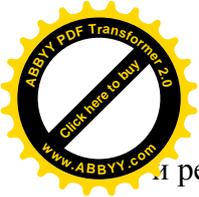
Ключевые слова: *сплошной фундамент, метод сосредоточенных деформаций, упругое основание, дифференциальное уравнение, балка, балка на упругом основании, метод конечных элементов.*

The article discusses the application of solid foundation slabs in the base and the theoretical justification for the approximation of the method of concentrated deformations to the results of numerical experiments based on the finite element method.

Key words: *solid foundation, method of concentrated deformations, elastic foundation, differential equation, beam, beam on elastic foundation, finite element method.*

Метод сосредоточенных деформаций в аппликации к балкам в упругом основании на достаточно высоком уровне получил решение в [1]. Реакции инерционных масс в упругом основании рассмотрены в [2].

Рассмотрим призматическую балку конечной длины на упругом винклеровом основании. Чтобы проиллюстрировать метод сосредоточенных деформаций (МСД), рассмотрим случай балки с шарнирно закрепленными концами от действия равномерно распределённой нагрузки. Разбиваем балку на m равных элементов МСД, внешняя нагрузка



и реакция упругого основания сосредоточены в узлах фиктивных связей и из рассмотрения i -го элемента и по аналогии, получаем

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & -N_{i-1,i} + N_{i,i+1} &= 0 \\ \sum m_i &= 0, & Q_{i-1,i} * a_i + Q_{i,i+1} * b_i + M_{i,i-1} - M_{i,i+1} &= 0, \\ \sum Z &= 0, & -Q_{i-1,i} + Q_{i,i+1} &= -P_{zi} * r_{0i} w_i \quad (i=1,2,3,\dots,m), \end{aligned} \quad (1)$$

где $r_{0i} = kd_i = bcd_i$ – вертикальная реакция в упругой опоре (сила упругого основания от единицы смещения), $d_i = l/m$, $P_{zi} = qd_i$ – сосредоточенная сила, заданная в узле i .

Приведем решение задачи о шарнирно опертой балки постоянного сечения - (EI, GF_z) на упругом основании с коэффициентом жесткости r_0 , при ее разбивке на три элемента. Используя симметрию, мы получаем систему уравнений

$$\begin{bmatrix} (3GF_z d^2 + 4EL)/4d & -GF_z/2 & -GF_z/2 \\ -GF_z/2 & (3GF_z/d + r_0) & -GF_z/d \\ -GF_z & -2GF_z/d & (2GF_z/d + r_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_3 \\ P_6 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

В результате решения системы находим прогиб в середине балки

$$w_2 = P \frac{4d(4\alpha+5) + r_0 d^2(3\alpha+4)/GF_z}{16GF_z + r_0 d(20+13\alpha) + r_0^2 d(3\alpha+4)/GF_z}, \quad (3)$$

где $\alpha = GF_z d^2 / EL$, $d = l/3$, откуда следует, что при $r_0 \rightarrow 0$ прогиб стремится к прогибу балки без упругого основания вида

$$w_2 = P(l^3/27EL + 5l/12GF_z), \quad (4)$$

а при $r_0 \rightarrow \infty$, прогиб стремится к нулю.

Из этого примера можно сделать вывод, что матрица жесткости балки на упругом основании получаем из Матрицы жёсткости обыкновенной балки путём сложения параметра - $r_0 \rightarrow \infty$ на диагональных элементах, соответствующих вертикальным перемещениям.

$$k_w(i,i) = k(i,i) + r_{0i}, \quad i = 3, 6, \dots, 3m \quad (5)$$

С целью построения общего алгоритма расчета призматических балок на упругом основании, мы используем расширенную область, в которой производится расщепление компонентов. Затем, устремляя a_1 и b_1 к нулю, получаем расчетную модель балки на упругом основании для произвольных граничных условий на концах (рис 1). В данной модели в $n+1$ сечениях, в том числе опорных, сосредотачиваются деформации, в том числе опорных, а в n узлах, в том числе опорных, сосредотачивается распределенная масса балки:

$$\begin{aligned} m_1 &= \bar{m}b_1, & m_2 &= \bar{m}bs_2, & \dots & m_{n-1} = \bar{m}s_{n-1}, & m_n &= \bar{m}a_n, \\ s_i &= a_i + b_i, & (i = 2, 3, \dots, n-1), & s_1 &= b_1, & s_n &= a_n, \\ & & & & & d_{ii+1} &= b_i + a_{i+1}, & (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (6)$$

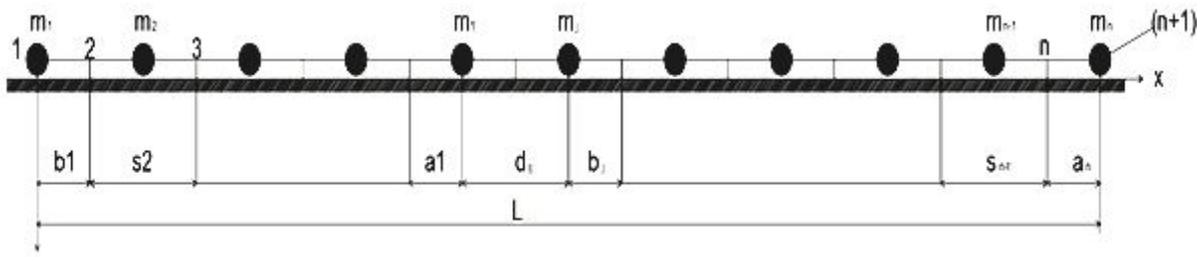


Рис. 1. Динамическая модель балки на упругом основании

При равномерном разбиении балки

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = L / 2(n-1), \quad a_2 = a_3 = \dots = a_n = L / 2(n-1). \quad (7)$$

Распределенная нагрузка сосредоточена в тех узлах, в которых сосредоточены массы.

Диагональная матрица масс состоит из диагональных подматриц, каждая из которых состоит из трех элементов

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_n), \quad M_i = \text{diag}(m_{xi}, m_{yi}, m_{zi})$$

Здесь

$$m_{xi} = m_0 s_i, \quad m_{yi} = m_0 s_i^3 / 12, \quad m_{zi} = m_0 s_i, \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$m_{x1} = m_0 b_1, \quad m_{y1} = m_0 b_1^3 / 3, \quad m_{z1} = m_0 b_1,$$

$$m_{xn} = m_0 a_n, \quad m_{yn} = m_0 a_n^3 / 3, \quad m_{zn} = m_0 a_n, \quad (8)$$

где $m_0 = bh\gamma_0 / 9.81$ - распределенная масса балки, m_{yi} - момент инерции i -го элемента относительно оси y , проходящей через центр масс, m_{xi}, m_{zi} - сосредоточенные массы элемента, соответствующие осям координат x и z .

Матрица коэффициентов формируется также, как и в балке без упругого основания, исходя из принятой расчетной модели, где учитывается особенность крайних элементов. Это особенность заключается в том, что здесь узлы фиктивных связей и сосредоточенных деформаций совпадают. Поэтому система уравнений равновесия для первого и последнего элементов записывается в виде

$$\begin{aligned} -N_1 + N_2 = 0, \quad Q_1 * 0 + Q_2 * b_1 + M_1 - M_2 = 0, \quad -Q_1 + Q_2 = -P_{z1} + r_{01} w_1, \\ -N_n + N_{n+1} = 0, \quad Q_n * a_n + Q_{n+1} * 0 + M_n - M_{n+1} = 0, \quad -Q_n + Q_{n+1} = -P_{zn} + r_{0n} w_n, \end{aligned}$$

(9)

Следовательно, первый и последний блоки матрицы коэффициентов A представляются так:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & a_n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Остальные блоки этой матрицы остаются такими же, как в обычной балке.

Матрица внутренней жесткости C формируется по аналогии без упругого основания

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{n+1}),$$

$$C_1 = \text{diag}(\xi_1, \omega_1, \eta_1), \quad \xi_i = EF_{xi} / d_{i-1,i}, \quad \omega_i = EF_{yi} / d_{i-1,i},$$

$$\eta_i = GF_{zi} / d_{i-1,i}, \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$C_1 = C_A = \text{diag}(\xi_A, \omega_A, \eta_A), \quad C_{n+1} = C_B = \text{diag}(\xi_B, \omega_B, \eta_B),$$

$$\xi_A = k_{xA}, \quad \omega_A = k_{\varphi A}, \quad \eta_A = k_{zA}, \quad \xi_B = k_{xB}, \quad \omega_B = k_{\varphi B}, \quad \eta_B = k_{zB}, \quad (11)$$

где коэффициенты k_{iA}, k_{iB} задаются в зависимости от граничных условий, например, при свободном опирании балки на упругом основании принимаются равным нулю.

Матрица внешней жесткости балки на упругом основании формируется по формуле

$$K_w = K + R,$$

$$K = ACA^T, \quad R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_n) \quad R_i = \text{diag}(0, 0, r_{0i}).$$

Решение статической задачи сводится к рассмотрению системы уравнений с искомым вектором перемещений

$$K_w V = P,$$



с определением векторов деформаций и внутренних усилий

$$\lambda_n = -A^T V_n, \quad S_n = C \lambda_n.$$

Таким образом, алгоритм расчета балки на упругом основании методом сосредоточенных деформаций отличается от расчета обычной балки только на стадии формирования матрицы жесткости от упругого основания.

Исследуется статический изгиб балки конечной длины на упругом основании при различных граничных условиях. В этом примере результаты численного решения методом сосредоточенных деформаций сопоставлялись с результатами аналитического решения.

Алгоритм реализован на примере со следующими данными: $k=0,01$ тс/м² – коэффициент упругости основания; $E=2 \cdot 10^6$ – модуль упругости $l = 6$ м - пролет; сечение балки $b \cdot h = 1 \cdot 0,4$ м, где b - ширина балки, h - высота сечения; $\nu = 0,25$ - коэффициент Пуассона на рис 1 представлены безразмерные прогибы и изгибающие моменты для трех схем балки на упругом основании, полученные при $n=10$. В первой и второй схеме (рис.2) прогиб и момент соответствуют середине пролета; в третьей схеме прогиб в точке A , а момент в центре; действительные их значения определяются так:

- 1) $\omega = \bar{\omega} q / k, \quad M = \bar{M} q / \beta^2;$
- 2) $\omega = \bar{\omega} P \beta / k, \quad M = \bar{M} P / \beta;$
- 3) $\omega = \bar{\omega} M_0 \beta^2 / k, \quad M = \bar{M} M_0; \quad \beta = \sqrt[4]{k / 4 E I_y} \quad (\text{м}^{-1}).$

Сравнение показывает, что результаты МСД практически совпадают с аналитическим решением.

Схема балки	Аналитическое решение		МСД	
		M	w	M
	0.1582×10^{-4}	0.2179×10^{-2}	0.1590×10^{-4}	0.2151×10^{-2}
	0.1917×10^{-3}	0.3300×10^{-1}	0.1916×10^{-3}	0.3300×10^{-1}
	-0.5809×10^{-2}	1.000	-0.5977×10^{-2}	1.000

Рис. 2. Сопоставление результатов ($b=1$ м, $h=0,4$, $n=10$)

В рамках текущего исследования разработана информационная модель 30-ти этажного с высотой 112 м офисного здания – скайскрепера. Здание смоделировано в среде Autodesk Revit и экспериментально проверено в среде Autodesk Robot Structural Analysis, что соответствует принципу проектирования зданий и сооружений на основе концепции BIM.

Технические характеристики расчетного офисного здания:

1. Высота здания – 112,5 м
2. Этажность – 30 уровней
3. Площадь здания – 25 714 м²
4. Площадь этажа – 735 м²
5. Подземные уровни – 3 уровня
6. Парковка – 2 уровня ниже 0,00
7. Инженерный уровень – 1 уровень на отметке -10500 мм
8. Технический этаж – на уровне 105 м
9. Кровельный этаж – на уровне 108,5 м
10. Высота этажа на всех уровнях – 3,5 м
11. Конструктивная схема – каркасно-ствольная с центральным железобетонным ядром жесткости
12. Ядро жесткости – гексагон, правильный шестиугольник, внутренним диаметром-6000 мм, толщиной-1000 мм



13. Вспомогательное ядро жесткости – гексагон, правильный шестиугольник, по периметру от центрального ядра жесткости на расстоянии 2000 мм, толщиной 500 мм
14. Опорные части по периметру – железобетонные колонны круглого сечения диаметром 500 мм
15. Ригели на отметке выше 0,00 – прокатные стальные балки двутаврового сечения
16. Перекрытия на отметке выше 0,00 – стальной ребристый настил толщиной 50 мм и слой легкого бетона 160 мм
17. Ригели на отметке ниже 0,00 – жб балки прямоугольного сечения 500x500 мм
18. Перекрытия на отметке ниже 0,00 – жб перекрытие из промышленного железобетона толщиной 362 мм
19. Фундаменты – совмещенные – сплошная жб плита толщиной 1500 мм и сплошная жб подошва плиты толщиной 1000 мм; от отметки этажа -3 до отметки 1 этажа – подпорная стена толщиной 500 мм
20. Кровля – балка фермовая стальная 505 мм
21. Стены наружные – стеклянные витражные панели
22. Стены внутренние – гипсокартонные листы на стальном каркасе
23. Окна – нет
24. Двери входные – автоматические дверные стеклянные панели, 3 экземпляра
25. Двери внутренние – 2 группы из двойных и одинарных деревянных панелей
26. Лестницы – одномаршевые 4500x1000 мм
27. Лифты – пассажирских 4 лифта локализованных в ядре жесткости
28. Отопление – автономное
29. Вентиляция – внутренняя организованная
30. Слив атмосферной воды – внутренняя организованная

Визуализация результатов расчетов показана на приведенных ниже рисунках.

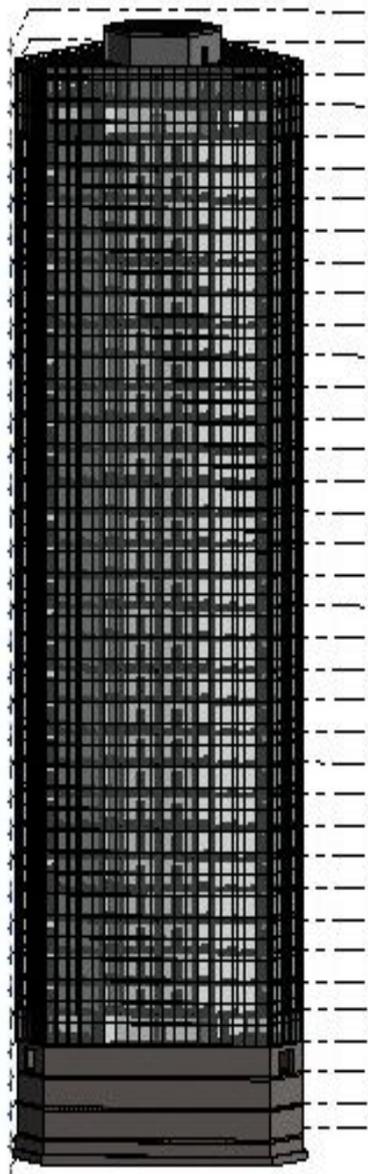


Рис. 3. Информационная модель здания

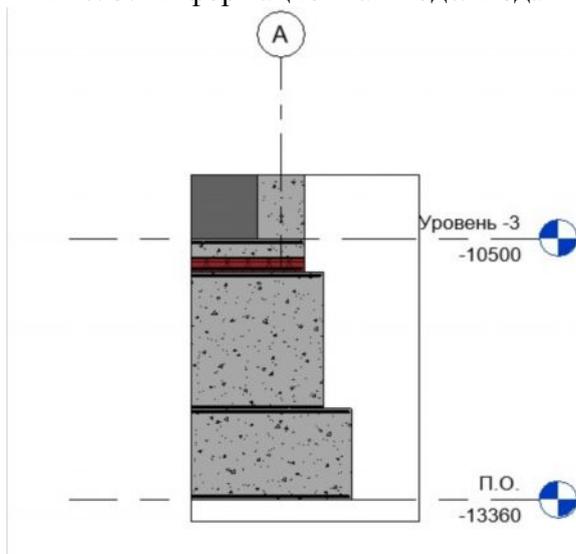


Рис. 4. Конструктивный узел, фундамент

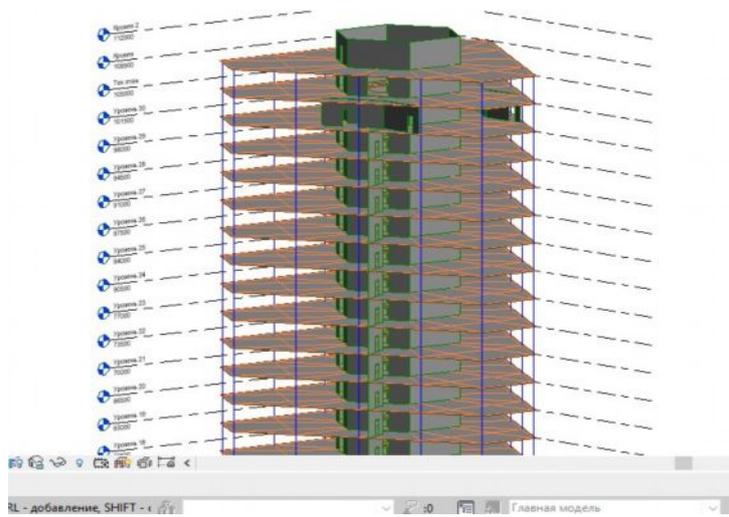


Рис. 5. Аналитическая модель здания

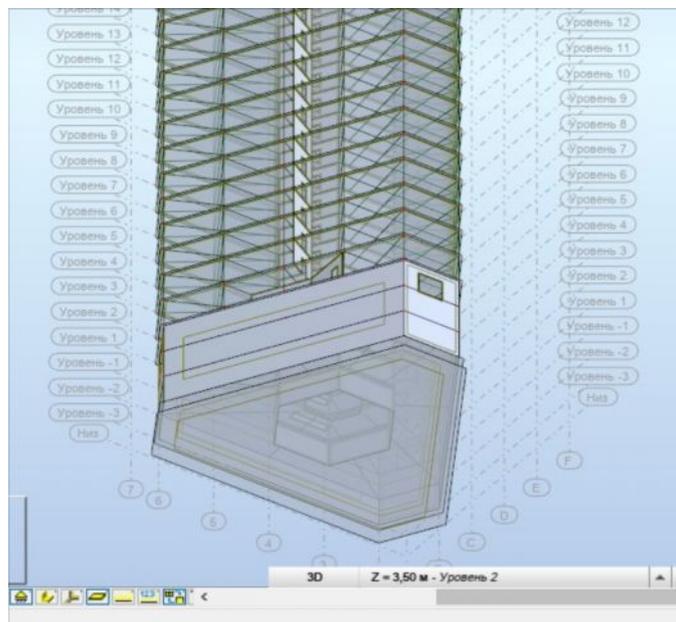


Рис. 6. КЭ модель

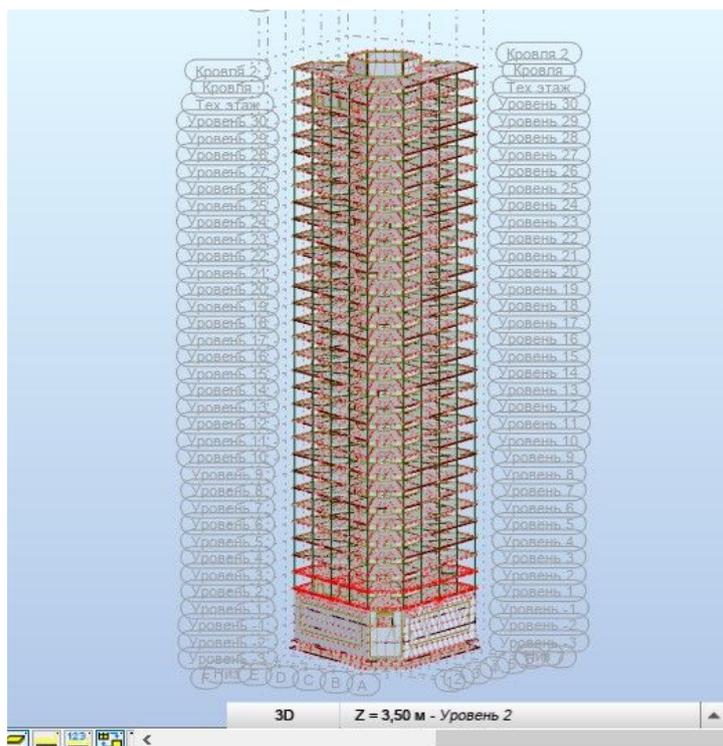


Рис. 7. КЭ модель, результат

Выводы. Таким образом, на основе анализа и сравнения результатов решенных задач, можно сделать вывод о том, что метод сосредоточенных деформаций при расчетах для случаев применения на практике сплошного фундамента на упругом основании дает хорошую сходимость результатов с методом конечных элементов. Структурный анализ информационной модели здания в среде программного обеспечения Autodesk Robot Structural Analysis показал, что деформации и напряжения от базовых 8 нагрузок находятся в пределах нормальных показателей. Опасные напряжения и деформации в структуре здания не развиваются.

Список литературы

1. Низомов Д.Н. Метод сосредоточенных деформаций [Текст] / Д.Н. Низомов, И. Каландарбеков. – Душанбе: Изд-во “Дониш”, 2015. – 436 с.
2. Болотбек Т. Инерционное демпфирование сейсмических сил зданий и сооружений со скользящим поясом [Текст] / Т. Болотбек, К.У. Насырынбекова // Вестник КГУСТА. Вып.1 (63). – Бишкек: КГУСТА, 2019. – С. 127-131.