УДК. 519.632.4:539.37

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Дуйшеналиев Т.Б., *д.ф.-м.н., профессор,* ***Хроматов В.Е.***, *к.т.н., профессор,*

Цой В.Э. *– к.ф.-м.н., доцент,* ***Щугорев В.Н.*** *– к.ф.-м.н., доцент,*
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Российская Федерация, 111250, г. Москва, Красноказарменная улица, дом 14,
e-mail: duishenaliev@mail.ru, khromatovvy@mpei.ru

Аннотация. При решении статической краевой задачи прибегают к двум допущениям: 1). конечное состояние тела мало отличается от начального; 2). силы прикладываются настолько медленно, что любая их величина соответствует состоянию равновесия. Эти допущения необходимы, ибо без них задача в классическом подходе математически не определена и противоречит основам механики. Однако они непосредственно не входят в решаемые уравнения. Выводы, сделанные на основе этих допущений, внесли значительные осложнения. В работе предлагается новый подход – решать краевую задачу статики в строгом соответствии с ее общепризнанной постановкой.

Ключевые слова: деформация, напряжения, краевая задача, перемещения, граничные условия.

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF STATICS IN A NON-CLASSICAL FORMULATION

T.B. Duishenaliev, V.E. Khromatov, V.E. Tsoi, V.N. Shchugorev,
National Research University "MEI", Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st, 14
e-mail: duishenaliev@mail.ru, khromatovvy@mpei.ru

Annotation. In solving a static boundary value problem, two assumptions are resorted to: 1). the final state of the body differs little from the initial state; 2). forces are applied so slowly that any of their size corresponds to a state of equilibrium. These assumptions are necessary, because without them the task in the classical approach is not mathematically defined and contradicts the fundamentals of mechanics. However, they are not directly included in the solved equations. The conclusions drawn from these assumptions have made significant complications. The paper proposes a new approach - to solve the boundary value problem of statics in strict accordance with its generally accepted formulation.

Keywords: deformation, stresses, boundary value problem, displacements, boundary conditions.

1. Общепризнанная постановка краевой задачи

Тело с заданными силами внутри своего объема V и на его поверхности S находится в равновесии. Необходимо найти напряжения и деформации внутри тела.

Пусть f_i и p_i соответственно внешние силы, заданные в V и на S. Обозначая через σ_{ij} компоненты напряжения, представим постановку математически:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ x_i \in V, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\, f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V, \tag{2}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = p_i,\ x_i \in S\ , \tag{3}$$

где ν - коэффициент Пуассона.

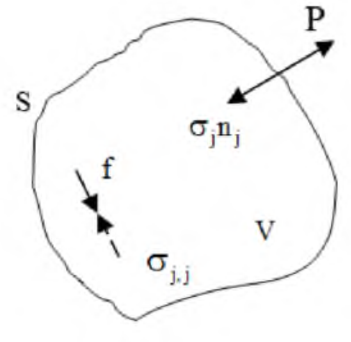

Рис.1. Иллюстрация уравнений статической краевой задачи. В любой точке внутри V и на S внешние силы уравновешены внутренними напряжениями. σ_j –вектор напряжения на площадке с нормалью x_j

2. Классический подход к решению краевой задачи

Известно начальное состояние тела (объем V_0, поверхность S_0). К нему прикладываются внешние силы и оно, двигаясь и деформируясь, переходит в другое состояние (V,S), в котором обретает равновесие. Необходимо найти конечное состояние равновесия и, появившиеся в нем, напряжения, деформации.

Уравнения краевой задачи имеют силу только в состоянии равновесия. В постановке задачи классического подхода — это состояние неизвестно, оно ищется. Уравнения этой задачи можно написать только в неопределенном виде:

$$\sigma_{ji,j}+f_i=0,\ \ \sigma_{ij}=\sigma_{ji},\ x_i\in V, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij,kk}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij}+\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\ f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0,\ x_i \in V, \tag{5}$$

$$\sigma_{ji}\ n_j = p_i,\ x_i \in S\ . \tag{6}$$

Здесь область определения уравнений (V,S) неизвестна. Для тела неизвестной конфигурации невозможно указать координаты точек приложения массовых сил, а так же сил на поверхности, следовательно, в уравнениях (4)-(6) неизвестны и **f, p**.

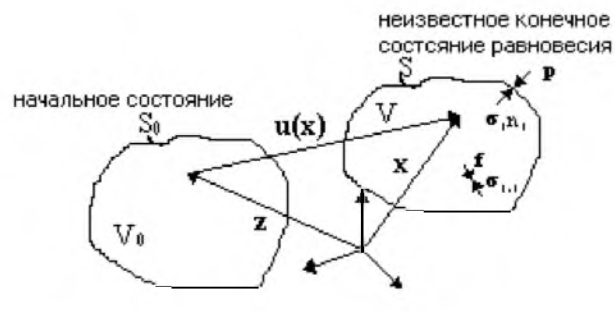

Рис. 2. Иллюстрация задачи классического подхода – к начальному состоянию (V_0, S_0) прикладываются внешние силы и тело, двигаясь и деформируясь, переходит в конечное состояние (V,S), где обретает равновесие.

В задаче (4)-(6) неизвестны не только ***V***, ***S***, но и внешние силы **f, p**. Тут задача эта приобретает следующее содержание - найти решение дифференциальных уравнений равновесия (4) и совместности деформаций (5) с неизвестными силами (6) в неизвестной области ***V***, удовлетворяющее неизвестным условиям на неизвестной поверхности S.

Здесь начальное состояние нагружается внешними силами и оно, двигаясь и деформируясь, переходит в некое состояние равновесия, которое надо найти.

2. Неклассическое решение краевой задачи

Вернемся к общепризнанной постановке статической краевой задачи. Решением, которое строго соответствует этой постановке подразумеваются функции $\sigma_{ij}(x)$, удовлетворяющие уравнениям (1)-(3).

2.1. Определение деформаций и перемещений

Допустим, найдены эти функции $\sigma_{ij}(x)$. Из него легко определяются деформации:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}(-\nu\,\delta_{ij}\sigma_{kk}+(1+\nu)\,\sigma_{ij}), \tag{7}$$

где E - модуль Юнга.

Далее определяем перемещения $u_i(x)$ по формулам Чезаро [1]:

$$u_i(x)=u_i(x^0)+\omega_{ij}(x^0)(x_j-x_j^0)+\frac{1}{E}\int_\ell(\varepsilon_{ik}(y)+(x_j-y_j)(\varepsilon_{ki,j}(y)-\varepsilon_{kj,i})))dy_k,$$

где ℓ - линия в области V, x^0 – начальная точка этой линии, $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ - постоянные интегрирования. Вообще говоря, более удобно пользоваться не этой формулой, а ее преобразованным видом [1]:

$$u_i(x)=u_i(x^0)+\omega_{ij}(x^0)(x_j-x_j^{\,0})+$$
$$\frac{1}{E}\int_\ell(-\nu\delta_{ik}\sigma_{tt}+(1+\nu)(\sigma_{ik}+(x_j-y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{tt,j}-\delta_{kj}\sigma_{tt,i})+(1+\nu)(\sigma_{ki,j}-\sigma_{kj,i})))dy_k.$$

В этом выражениях $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ - произвольные постоянные. Они соответствуют не вызывающим деформации перемещениям (параллельному переносу и жесткому повороту тела). В дальнейшем исключим из рассмотрения такие перемещения. В этом случае:

$$u_i(x)=\frac{1}{E}\int_\ell(-\nu\delta_{ik}\sigma_{tt}+(1+\nu)(\sigma_{ik}+(x_j-y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{tt,j}-\delta_{kj}\sigma_{tt,i})+(1+\nu)(\sigma_{ki,j}-\sigma_{kj,i})))dy_k. \tag{8}$$

2.2. Начальное состояние равновесия

Как показано на рис. 3, векторы

$$z_i=x_i-u_i(x),\ x_i\in V,\quad z_i=x_i-u_i(x),\ x_i\in S \tag{9}$$

определяют некоторую область V_0 и ее поверхность S_0. (V_0, S_0), очевидно, начальное состояние равновесия без внешних сил. Далее, для краткости, (V_0,S_0) назовем сравниваемым

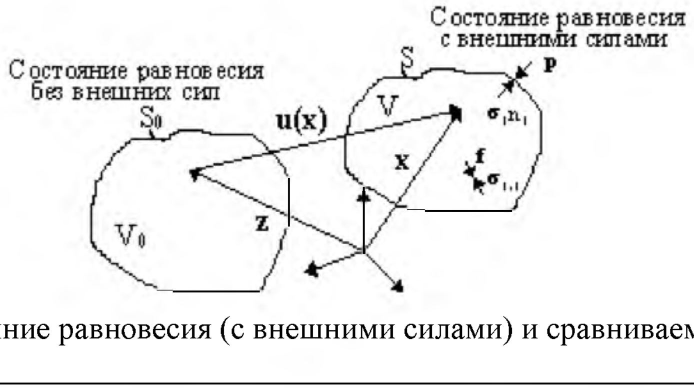

Рис. 3. Состояние равновесия (с внешними силами) и сравниваемое состояние.

состоянием статической краевой задачи. Положение тела, заданное в уравнениях (1)-(3), незыблемо. Оно занимало областьV, ограниченную поверхностью S, до решения и остается там же и после решения. Определяемое координатами z_i (9) сравниваемое состояние есть некое математическое преобразование области (V,S). Поле u_i (x) определяет относительные изменения координат, компонент деформации, вращения и напряжения этих состояний. Эту относительность можно представить в виде

$$\begin{gathered} x_i - z_i = u_i(x), \\ \varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_{ij}(z) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \\ \omega_{ij}(x) - \omega_{ij}(z) = (u_{i,j} - u_{j,i})/2, \\ \sigma_{ij}(x) = \lambda\delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \end{gathered} \tag{10}$$

Тут x_i ,$\varepsilon_{ij}(x)$, $\omega_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ относятся к положению равновесия с внешними силами, а z_i, $\varepsilon_{ij}(z)$, $\omega_{ij}(z)$ - к положению равновесия без внешних сил.

Поле $u_i(x)$ только преобразует (V,S) в (V_0,S_0), следовательно, оно определяет только относительные изменения координат, деформаций и напряжений этих сравниваемых состояний.

3. Задача о равновесии прямоугольной плиты

3.1. *Неклассическое решение*

Продемонстрируем корректность выдвинутых в этой работе новых положений на строго решенном примере.

Зададимся областью определения уравнений статической краевой задачи в виде указанной на рис.9 прямоугольной плиты. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в центре левой торцевой грани.

Итак, под V будем подразумевать следующую область:

$$-b/2 \le x_1 \le b/2\,,\ 0 \le x_2 \le \ell\,,\ -h/2 \le x_3 \le h/2 \tag{11}$$

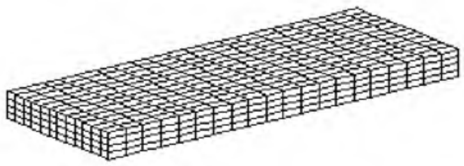

Рис. 4. Прямолинейная плита с усилиями (11)
на своей поверхности находится в равновесии.

Рассмотрим вторую краевую задачу без массовых сил:

$$\sigma_{ji,j} = 0,\ \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji},\quad x_i \in V, \tag{12}$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0,\quad x_i \in V\,, \tag{13}$$

$$\sigma_{ji}\, n_j = \delta_{i2}\, c\, x_3,\quad x_i \in S, \tag{14}$$

где V определяется выражениями (11). Из (14) следует, что на четырех гранях плиты нет внешних сил, они приложены на левую и правую торцевые грани, создают изгибающие моменты, равные соответственно:

$$m_1 = -\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c\,x_1^2 dx_1\,dx_2 = -cbh^3/12,\ \ m_2 = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c\,x_1^2 dx_1\,dx_2 = cbh^3/12$$

Задача (12)-(14) математически полностью определена. Она имеет простой механический смысл - прямоугольная плита с усилиями (14) на своей поверхности находится в равновесии. *Требуется найти во внутренних точках этой плиты напряжения, деформации и создавшие их перемещения.* Как видим, здесь нет никакого отступления от общепринятой постановки статической краевой задачи.

Неклассическое решение задачи:

$$\sigma_{ij} = \delta_{i2}\delta_{j2}cx_3 .\ x_i \in V \tag{15}$$

Функции перемещений можно определить, внося (15) в (8):

$$u_i = \frac{1}{E}\int_{\ell} c(-\nu\delta_{ik}x_3 + (1+\nu)\delta_{i2}\delta_{k2}x_3 + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\delta_{3j} - \delta_{kj}\delta_{3i}) + (1+\nu)\delta_{k2}(\delta_{i2}\delta_{3j} - \delta_{j2}\delta_{3i})))dy_k,\ x_i \in V$$

Интегрируя это выражение, находим:

$$\begin{gathered} u_i(x)=-c\,(\delta_{i1}\nu\,x_3\,(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}x_3\,(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}\,(x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)\ - \\ -x_2^0\,(2x_2-x_2^0)-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0\,(2x_1-x_1^0)))\,/\,2)/\,E\ ,\ x_i \in V, \end{gathered} \tag{16}$$

где x_i^0 - любая фиксированная точка области V. Приведем развернутый вид функций (16):

$$\begin{gathered} u_1(x)= -c\ \ \nu\,x_3(x_1-x_1^0)\,/E,\ x_i \in V \\ u_2(x)= c\,x_3\,(x_2-x_2^0)\,/E,\ x_i \in V \\ u_3(x)= -c\,((x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)\,-x_2^0(2x_2-x_2^0)-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))\,/\,(2E),\ x_i \in V \end{gathered}$$

Функции (16) удовлетворяют уравнениям равновесия в форме Навье.
Наконец, из поля перемещений (16) определим компоненты деформации и вращения:

$$\varepsilon_{ij} = c\,x_3\,(-\nu\,(\,\delta_{i1}\,\delta_{j1} + \delta_{i3}\,\delta_{j3}\,)+\delta_{i2}\,\ \delta_{j2}\,)\,/\,E,\ x_i \in V, \tag{17}$$

$$\omega_{ij} =-c\,(\,\nu\,(x_1-x_1^0)\,(\delta_{1i}\delta_{3j}-\delta_{3i}\,\delta_{1j}\,)\,-(x_2-x_2^0)(\delta_{2i}\,\delta_{3j}\,-\delta_{3i}\,\delta_{2j}))\,/\,E\ ,\ x_i \in V. \tag{18}$$

По полученным здесь выражениям в любой точке находящегося в равновесии в области V тела можно определить компоненты напряжения, деформации и вращения. Особо отметим то, что во всех выражениях (15)–(18) координаты только области V (11). Здесь нет обычного координатного разночтения. В $u_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ одни и те же координаты.

Различие между координатами, деформациями, напряжениями сравниваемого и заданного состояний, определяемыми уравнениями (21), имеет вид:

$$\begin{gathered} x_i\text{-}z_i =-c(\delta_{i1}\,\nu\,x_3(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}\,x_3\,(x_2-x_2^0)+ \\ +\delta_{i3}(x_2^2+\nu(x_3^2-x_1^2)\,-x_2^0(2x_2-x_2^0)-\nu((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))/2)/E\ , \\ \varepsilon_{ij}(x)\text{-}\varepsilon_{ij}\,(z) = cx_3\,(-\nu(\,\delta_{i1}\,\delta_{j1} + \delta_{i3}\,\delta_{j3}\,)+\delta_{i2}\,\ \delta_{j2}\,)/E, \\ \omega_{ij}(x)\text{-}\omega_{ij}\,(z) =\ -c(\nu(x_1-x_1^0)\,(\delta_{1i}\delta_{3j}-\delta_{3i}\,\delta_{1j}\,)\,-(x_2-x_2^0)(\delta_{2i}\,\delta_{3j}\,-\delta_{3i}\,\delta_{2j}))/E\ , \\ \sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,cx_3\ . \end{gathered} \tag{19}$$

3.2. Сравниваемое состояние

Координаты сравниваемого состояния z_i связаны с координатами рассматриваемого состояния равновесия выражениями:

$$\begin{gathered} z_i= x_i-c\,(\delta_{i1}\,\nu\,x_3(x_1-x_1^0)\,-\delta_{i2}\,x_3\,(x_2-x_2^0)+\,\delta_{i3}(x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)\,- \\ -x_2^0(2x_2-x_2^0)\,-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))\,/\,2)\,/\,E\ ,\ \ x_i \in V. \end{gathered} \tag{20}$$

В качестве x^0 можно брать координаты любой точки области (11). В дальнейшем положим: $x_1^0=0,\ x_2^0=\frac{\ell}{2},\ x_3^0=0$.

Рассмотрим три случая c = 0, c =30 и c = 60.

Случай 1. Пусть в c=0. На поверхности S внешних сил нет. Тело занимает область ***V*** (41) (11) и находится в равновесии (рис. 4). Выражения (20) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&x_i-z_i=0,\\
&\varepsilon_{ij}(x)-\varepsilon_{ij}(z)=0,\\
&\omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(z)=0,\\
&\sigma_{ij}(x)=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Сравниваемое состояние совпадает с заданным. Заданное состояние может, иметь любые остаточные деформации или не иметь их. Подставляя первое из уравнений (21) в остальные, приходим к неопределенности:

$$\varepsilon_{ij}(x)-\varepsilon_{ij}(x)=0,\quad \omega_{ij}(x)-\omega_{ij}(x)=0,\quad \sigma_{ij}(x)=0.$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(x)$, $\omega_{ij}(x)$ остаются неопределенными. Такая неопределенность не противоречит сути краевой задачи, а наоборот, более полно отражает то, что может быть в действительности. Ведь в равновесии может находиться не только тело, которое не имеет никаких остаточных деформаций, но и тело, которое их имеет. Рассматриваемая здесь плита, может быть, ранее имела криволинейную форму, а затем выпрямлена и выточена. Если это так, то в ней есть остаточные деформации.

Случай 2. Пусть c=30. Тело занимает ту же область V (11). Подставим это значение c в (21) и определим сравниваемое состояние (рис. 5).

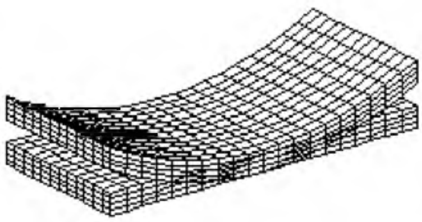

Рис. 5. Сравниваемые состояния при c=30.

Случай 3. Теперь пусть c = 60. В этом состоянии равновесия тело занимает то же положение, что и раньше, т.е. имеет форму прямоугольной плиты. Подставим это значение c в (21) и определим сравниваемое состояние (рис. 6):

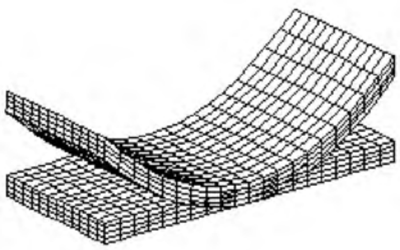

Рис. 6. Сравниваемые состояния при c=60.

Во всех трех случаях тело имеет одну и ту же конфигурацию и занимает одно и то же положение в пространстве. Это положение тела недвижимо и геометрически неизменяемо при любых величинах внешней нагрузки.

Решения:

$$\sigma_{ij}(x) = 0,\ \ \sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,30x_3,\ \ \sigma_{ij}(x) = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,60x_3,\ x_i \in V,$$

соответствующие трем рассмотренным случаям, удовлетворяют уравнениям задачи (12)-(14) в одном и том же положении тела, а именно, в его прямолинейном очертании. О том, что граничное условие (14) удовлетворяется на поверхности соответствующих этим решениям сравниваемых состояний (рис. 5 и 6), говорить не приходиться.

Внешние силы являются атрибутами декларируемого уравнениями (12)–(14) равновесия и, в связи с этим, они уже никак не могут рассматриваться в роли нарушителей этого равновесия. Условие (14) ничто иное, как условие равновесия точек поверхности тела. Усилия, действующие снаружи поверхности равны усилиям $\sigma_{ji}\,n_j$, действующим изнутри.

Данную задачу представим уравнениями Навье:

$$\mu\, u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} = 0\ ,\ x_i \in V\ . \tag{22}$$

Граничные условия для этих уравнений напишем в трех видах:

1. Заданы перемещения на поверхности S, которые определяются функцией:

$$u_i(x)=-c\,(\delta_{i1}\nu x_3\,(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}x_3\,(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}\,(x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)-$$
$$-x_2^0\,(2x_2-x_2^0)-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0\,(2x_1-x_1^0)))\,/\,2)/\,E\ ,\ x_i \in V$$

при поочередной подстановке в нее значений координат:

$$x_1 = -b/2,\ \ x_1 = b/2,\ \ x_2 = 0,\ x_2\ = \ell,\ \ x_3 = -h/2,\ \ x_3 = h/2\ . \tag{23}$$

2. Заданы внешние силы на поверхности S:

$$\sigma_{ji}\, n_j = \delta_{i2}\ c\ x_3,\quad x_i \in S\ . \tag{24}$$

3. Заданы на четырех гранях перемещения, которые определяются функцией:

$$u_i(x)=-c\,(\delta_{i1}\nu\ x_3\,(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}\,x_3\,(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}\,(x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)-$$
$$-x_2^0(2x_2-x_2^0)-\nu((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))\,/\,2)\,/\,E,$$

в которую поочередно надо подставить следующие значения координат x_1=-b/2, x_1=b/2, x_2=-h/2, x_1=h/2, а на остальных двух гранях:

$$\sigma_{ij}(x_1,0,x_3)\ = -\ \delta_{i2}\ c\ x_3,\ \ \sigma_{ij}(x_1,\ \ell,x_3)\ = \delta_{i2}\ c\ x_3. \tag{25}$$

Статическая краевая задача имеет единственное решение. Решение задач (22), (23); (22), (24); (22), (25):

$$u_i(x)=-c\,(\delta_{i1}\nu x_3\,(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}x_3\,(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}\,(x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)-$$
$$-x_2^0\,(2x_2-x_2^0)-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0\,(2x_1-x_1^0)))\,/\,2)/\,E\ ,\ x_i \in V \tag{26}$$

то же самое, что и задачи (12)-(14). Это легко показать. Из (26) находим:

$$u_{k,k} = c(1\text{-}2\nu)x3/E;$$

$$u_{i,j}+u_{j,i}=2cx3(\delta_{i2}\delta_{j2}-\nu(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i3}\delta_{j3}))/E.$$

Подставим эти величины в выражение для $\sigma_{ij}(x)$:

$$\sigma_{ij}(x)=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})=cx_3(\delta_{i2}\delta_{j2}+\nu(\delta_{ij}-\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i3}\delta_{j3}))/(1+\nu).$$

Далее, учитывая равенство $\delta_{i2}\delta_{j2}=\delta_{ij}-\delta_{i1}\delta_{j1}-\delta_{i3}\delta_{j3}$, находим:

$$\sigma_{ij}(x)=\delta_{i2}\delta_{j2}cx_3.$$

Механический смысл задач (12)-(14); (22)-(23); (22)-(24); (22)-(25) один и тот же – плита в области V (11) находится в состоянии равновесия. Это состояние равновесия, разумеется, не зависит от того, решена задача или нет. Существующее представление о том, что тело перемещается на величину перемещений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (22) и граничным условиям, некорректно. Во всех этих уравнениях координаты не начального, а конечного состояния. Единственно верное математическое толкование таково: найти функции $u_i(x)$, $x_i\in V$, удовлетворяющие уравнениям (22) и любому из трех видов граничных условий. Перемещения, которые заданы в первом и третьем виде граничных условий, уже имеющиеся в теле перемещения (а не те, которые будут происходить!). Решение $u_i(x)$, также представляет те перемещения, которые уже произошли и создали то напряженное состояние, которое уравновешивает внешние силы.

В заключение возвратимся к уравнениям (12)–(14). В них декларируется, что прямолинейная плита (11) с усилиями (14) на своей поверхности находится в равновесии, и определяются не нарушающие это равновесие деформации, напряжения и создавшие их перемещения. Эта задача проста и ясна. Она не стоит перед неразрешимой проблемой поиска решений в неизвестной области с неизвестной границей как задача классического подхода. В ней нет некорректных приемов линейной постановки. Ненужным оказалось ей и понятие о статическом приложении действий. В ее решении не использовано предположение о близости начального и конечного положений тела и, в виду этого, решение свободно от ограничений, накладываемых на величины перемещений.

Наконец, эта задача допускает численное решение, основанное на общем решении в виде формул Сомильяны:

$$u_i(x)=\int_S(u^i_j(y,x)p_j(y)-p^i_j(y,x)u_j(y))ds(y),\quad x_i\in V,\ y_i\in S, \tag{27}$$

где $u_j^i(y,x)$ – поле перемещений в неограниченном пространстве от единичной массовой силы, приложенной в точке x и имеющей направление оси x_i, $p_j^i(y,x)$ – усилия на поверхности S, определяемые полем $u_j^i(y,x)$.

В этом неограниченном пространстве известны напряжения, деформации, перемещения в любой точке. Они определяются полем $u_j^i(y,x)$. Из этого пространства можно вырезать любой объем, который находится в равновесии, и в котором известны напряжения, деформации, перемещения в каждой точке, а так же внешние силы внутри и на поверхности. В данном случае вырезается прямоугольная плита (11) и она служит вторым состоянием для задачи (12)-(14) в соотношении Бетти. Из этого соотношения следует решение (27).

В (27) известны V,S. Известно также поле $u^i_j(y,x)$ [1], которое определяет и $p^i_j(y,x)$, $x_i\in V$, $y_i\in S$. Неизвестными в (27) являются :

$p_i(y)$ - если заданы на S перемещения (первая краевая задача),

$u_j(y)$ - если на S заданы усилия $p_i(y)$ (вторая краевая задача),

$p_i(y)$ на части поверхности S_u и $u_j(y)$ на части поверхности S_σ (третья краевая задача).

Эти неизвестные граничные условия определяются методом граничных элементов.

Отметим, если в правую часть уравнения (26) подставим граничные условия (23) и (24) и выполним интегрирование, то придем к решению (16).

Список литературы:

1. Дуйшеналиев Т.Б. Неклассические решения механики деформируемого тела. – М.: Изд-во МЭИ, 2017. – 400 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.