УДК: 515.12

КАНЕТОВ Б.Э., КАНЕТОВА Д.Э.
КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек
KANETOV B.E., KANETOVA D.E.
J. Balasagyn KNU, Bishkek
bekbolot_kanetov@mail.ru

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ТИХОНОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Тихоновдук мейкиндиктердин айрым касиеттерин мүнөздөө

Characterization of some properties of tychonoff spaces

В данной статье исследуются компактные, локально компактные и паракомпактные, сильно локально компактные и паракомпактные свойства тихоновских пространств, при помощи равномерных структур. Как известно [1], тихоновское пространство X является локально компактным и паракомпактным тогда и только тогда, когда универсальная равномерность U_X пространства X содержит покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Дается новая характеристика локально компактных и паракомпактных пространств через дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых σ-компактных подмножеств.

Вводятся и изучаются сильно локально компактные пространства. В частности доказывается, что тихоновское пространство X является сильно локально компактным и паракомпактным только тогда, когда универсальная равномерность U_X пространства X

содержит локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Также, изучаются сильно равномерно локально компактные пространства. В частности, устанавливаются сильно равномерно локальная компактность и полнота сильно локально компактных топологических групп относительно их левых и правых равномерностей.

При помощи равномерных структур характеризуется компактность тихоновского пространства. Доказывается, что тихоновское пространство является компактным только тогда, когда оно является секвенциально полным и сильно равномерно паракомпактным.

Всюду в статье все топологические пространства предполагаются тихоновскими, а равномерные пространства хаусдорфовыми.

Ключевые слова: *локально компактное пространство, паракомпактное пространство, а -компактное пространство, сильно равномерно локально компактное пространство, сильно равномерно паракомпактное пространство, линделёфово пространство, универсальная равномерность.*

Илимий макалада тихоновдук мейкиндиктердин компактуу, локалдуу компактуу жана паракомпактуу, күчтүү локалдуу компактуу жана паракомпактуу касиеттери бир калыптуу структуралардын жардамы аркылуу изилденет. X тихоновдук мейкиндиктин локалдуу компактуу жана паракомпактуу болушунун зарыл жана жетиштүү шарты болуп X мейкиндиктеги U_x универсалдуу бир калыптуулук компактуу көптүктөрдөн турган жабдууну кармоосу эсептелинет дегени белгилүү [1]. Бул илимий макалада болсо локалдуу компактуу жана паракомпактуу мейкиндиктердин ачык а-компактуу көптүктөрдөн турган дизъюнктуу жабдуу аркылуу берилген жаңы мүнөздөмөсу берилет.

Күчтүү локалдуу компактуу мейкиндиктер түшүнүгү киргизилет жана изилденет. X тихоновдук мейкиндиктин күчтүү локалдуу компактуу жана паракомпактуу болушунун зарыл жана жетиштүү шарты болуп X мейкиндиктеги U_x универсалдуу бир калыптуулук компактуу көптүктөрдөн турган локалдуу чектүү жабдууну кармоосу эсептелинет деген натыйжа далилденет. Ошондой эле күчтүү бир калыптуу локалдуу компактуу мейкиндиктер изилденет. Ар бир күчтүү локалдуу компактуу топологиялык группа сол жана оң бир калыптуулуктарга салыштырмалуу кучтүү бир калыптуу локалдуу компактуулугу жана толуктугу тургузулат.

Тихоновдук мейкиндиктин компактуулугу бир калыптуу структуралардын жардамы аркылуу мунвздвлвт. Тихоновдук мейкиндик компактуу болот качан гана ал секвенциалдуу толук жана кучтуу бир калыптуу паракомпактуу болгондо гана деген натыйжа далилденет.

Бул макалада бардык топологиялык мейкиндиктер тихоновдук, ал эми бир калыптуу мейкиндиктер хаусдорфтук болушат.

Урунттуу свздвр: *локалдуу компактуу мейкиндик, паракомпактуу мейкиндик, о-компактуу мейкиндик, кучтуу бир калыптуу локалдуу компактуу мейкиндик, кучтуу бир калыптуу паракомпактуу мейкиндик, линделёфтук мейкиндик, универсалдуу бир калыптуу лук.*

In this paper we study the compact, locally compact and paracompact, strongly locally compact and paracompact properties of Tychonoff spaces using uniform structures. As is well known [1], the Tychonoff space X is locally compact and paracompact if and only if the universal uniformity U_X of

the space X contains a covering consisting of compact subsets. A new characteristic of locally compact and paracompact spaces is given through a disjoint covering consisting of open о -compact subsets.

Strongly locally compact spaces are introduced and studied. In particular, it is proved that the Tychonoff space X is strongly locally compact and paracompact if and only if the universal uniformity U_X of the space X contains a locally finite covering consisting of compact subsets.

Also, we study strongly uniformly locally compact spaces. In particular, strongly uniformly local compactness and completeness of strongly locally compact topological groups with respect to its left and right uniformities are established.

With the help of uniform structures, compactness of Tychonoff space is characterized. It is proved that Tychonoff space is compact if and only if it is sequentially complete and strongly uniformly paracompact.

Throughout this paper, all topological spaces are assumed to be Tychonoff, uniform spaces are Hausdorff.

Keywords: *Locally compact space, paracompact space, о -compact space, strongly uniformly locally compact space, strongly uniformly paracompact space, Lindelöf space, universal uniformity.*

Пусть *X* - топологическое пространство.

Теорема 1. Тихоновское пространство *X* является локально компактным и паракомпактным тогда и только тогда, когда универсальная равномерность U_X

пространства *X* содержит дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых *а*-компактных подмножеств.

Доказательство. Пусть пространство *X* является локально компактным и паракомпактным, то по известному факту (см. [3], стр. 280, 6.Ф.г.) равномерное пространство (X,U_X), где U_X универсальная равномерность, является дискретной суммой открытых *о* -компактных подпространств A_s, *s* е *S*. Положим *а* = $\{A_s : s$ е $S\}$.

Тогда семейство *ее* является дизъюнктным открытым покрытием, состоящим из открытых *а* -компактных пространств. Так как множество всех открытых покрытий пространства *X* образует базу универсальной равномерности, *то as*U_X.

Легко видеть, что пространство *X* является локально компактным и паракомпактным.

Теорема 2. Тихоновское пространство *X* является локально компактным и линделёфовым тогда и только тогда, когда универсальная равномерность U_X

пространства *X* содержит счетное дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых *а* -компактных подмножеств.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказательство теоремы

Следствие 1. Для тихоновского пространства *X* следующие утверждения равносильны:

1. Тихоновское пространство X является локально компактным и паракомпактным;

2. Универсальная равномерность U_x пространства X содержит дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых a -компактных подмножеств;

3. Существует равномерность U пространства X, которая содержит дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых a -компактных подмножеств.

Следствие 2. Для тихоновского пространства X следующие утверждения равносильны:

1. Тихоновское пространство X является локально компактным и линделёфовым;

2. Универсальная равномерность U_x пространства X содержит счетное дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых a -компактных подмножеств;

3. Существует равномерность U пространства X, которая содержит счетное дизъюнктное покрытие, состоящее из открытых a -компактных подмножеств.

Как известно [2], равномерное пространство (X,U) называется сильно равномерно локально компактным, если существует локально конечное равномерное покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Всякое сильно равномерно локально компактное пространство является равномерно локально компактным, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Тихоновское пространство X будем называть сильно локально компактным, если существует локально конечное открытое покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

Ясно, что всякое сильно локально компактное пространство является локально компактным.

Отметим некоторые свойства сильно равномерно локально компактных и сильно локально компактных пространств.

Каждая сильно локально компактная топологическая группа сильно равномерно локально компактна относительно ее левой и правой равномерностей.

Каждая сильно локально компактная топологическая группа полна.

Каждое связное сильно равномерно локально компактное пространство (X,U) a -компактно.

Каждое сильно равномерно локально компактное пространство (X,U) является объединением дизъюнктных a -компактных подпространств.

Каждое сильно равномерно локально компактное пространство паракомпактно.

Пусть (X,m) - топологическое пространство. Порождающая топологию г равномерность U, для которой пространство (X,U) сильно равномерно локально компактно, существует в том и только в том случае, если пространство (X,m) сильно локально компактно и паракомпактно.

Теорема 3. Тихоновское пространство X является сильно локально компактным и паракомпактным тогда и только тогда, когда универсальная равномерность U_x пространства X содержит локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство X является сильно локально компактным и паракомпактным. Тогда существует локально конечное открытое покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Поскольку, всякое открытое покрытие a пространства (X,U_X)является равномерным, то $(XGU_X$.

Достаточность. Пусть универсальная равномерность U_x пространства X содержит локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Тогда равномерное пространство (X,U_X) является сильно равномерно локально компактным, т.е. равномерно локально компактным. Из факта (см.[1], стр. 202) следует, что пространство X является сильно локально компактным и паракомпактным.

Теорема 4. Тихоновское пространство X является сильно локально компактным и линделёфовым тогда и только тогда, когда универсальная равномерность U_x пространства X содержит счетное локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказательство теоремы 3.

Следствие 3. Для тихоновского пространства X следующие утверждения равносильны:

1. Тихоновское пространство X является сильно локально компактным и паракомпактным;
2. Универсальная равномерность U_x пространства X содержит локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств;
3. Существует равномерность U пространства X, которая содержит локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

Следствие 4. Для тихоновского пространства X следующие утверждения равносильны:

1. Тихоновское пространство X является сильно локально компактным и линделёфовым;
2. Универсальная равномерность U_x пространства X содержит счетное локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств;
3. Существует равномерность U пространства X, которая содержит счетное локально конечное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

Напомним [4], что равномерное пространство *(X,U)* называется сильно равномерно паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать равномерно ***a*** -звездно конечное открытое покрытие.

Лемма 1. Если для равномерного пространства *(X,U)* его топологическое пространство (X,m_u) является линделёфовым, то равномерное пространство *(X,U)* является сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство. Так как (X,m_u) является линделёфовым, то оно является сильно паракомпактным. Тогда по лемме 2.10 ([5]) равномерное пространство *(X,U)* является равномерно паракомпактным. Следовательно, *(X,U)* является сильно равномерно паракомпактным.

Лемма 2. Если равномерное пространство *(X,U)* является сильно равномерно паракомпактно и $\mathbf{K}_0$-ограничено, то топологическое пространство (X,m_u) является линделёфовым.

Доказательство. Пусть ***Л*** - открытое покрытие пространства (X,m_u). Тогда существует равномерно ***a*** -звездно конечное открытое покрытие $a = \{a_i : / \mathbf{e} N\}$ вписанное в ***A*** . Так как $a = \{a_i : / \mathbf{e} N\}$ является звездно конечным и равномерно ***a*** -локально конечным покрытием, то для каждого / **е** N существует такое **Д** **е** U что каждый элемент которого пересекается лишь с конечным числом элементов семейства a_t. Для каждого номера / **е** N семейство $a_{\{}$ имеет не пустое пересечение с некоторым элементом покрытия **Д**. Следовательно, $a = \{\mathbf{a}, : i\, e\, N\}$ является счетным. Значит, (X,m_u) является линделёфовым.

Теорема 5. Для тихоновского пространства следующие свойства эквивалентны:

1. Топологическое пространство *(X,m)* является линделёфовым;
2. Для каждой равномерности U такой, что $m_u = m$ равномерное пространство *(X,U)* является сильно равномерно паракомпактным.

Доказательство следует из леммы 1 и 2.

Равномерное пространство *(X,U)* называется //-полным, если каждый фильтр Коши имеющий базу мощности <// сходится в нем.

Лемма 3. Тихоновское пространство X является //-компактным тогда и только тогда, когда если для каждой равномерности U на X, равномерное пространство *(X, U)* является // -полным.

Доказательство. Пусть F - фильтр Коши равномерного пространства *(X, U)* имеющий мощности <//. Тогда F имеет предельную точку в равномерном пространстве *(X,U)*. Следовательно, *(X,U)* является //-полным.

Обратно, пусть F - ультрафильтр, имеющий мощности <//. Пусть *(X,U)* такое равномерное пространство, что $\boldsymbol{m_u} = \boldsymbol{m}$. Тогда существует такая предкомпактная равномерность U_P что $\boldsymbol{T}_{U\,\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{T}$. Ясно, что ультрафильтр F является фильтром

Коши в предкомпактном равномерном пространстве *(X,U_P)*. Следовательно, ультрафильтр F сходится к некоторой точке в *(X,U_P)*, т.е. *(X,m)* является //-компактным.

Теорема 6. Для тихоновского пространства *(X,m)* следующие свойства эквивалентны:

1. *(X,* **г**) является компактным;
2. Равномерное пространство *(X,U)* является $\mathbf{K}_0$-полным (секвенциально

полным) и сильно равномерно паракомпактным. Доказательство следует из леммы 3 и теоремы 5.

Список цитируемых источников

1. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек: Илим, 2013.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.
3. Келли Дж. Л. Общая топология. Москва: Наука, 1981.
4. Kanetov B., Kanetova D., Baigazieva N. On strongly uniformly paracompact spaces // International Conference on Topology and its Applications, Nafpactos, Greece. 2018. - p. 117-118.
5. B.A. Pasynkov, D. Buhagiar, On uniform paracompactness // Czech. Math J. - 1996. - V.46 (121). p. 577-586.

Рецензенты: Борубаев А.А. - *доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН КР*

Асанов А. - *доктор физико-математических наук, профессор КТУ “Манас”*