



УДК 624.073.02



МАРУФИЙ А.Т., ОшТУ, Ош, Кыргызская Республика e-mail: oshtu-marufi@rambler.ru
MARUFI A.T., OshTU, Osh, Kyrgyz Republic.

ЭГЕНБЕРДИЕВА А.А., ОшТУ, Ош, Кыргызская Республика, e-mail: lady.mary.10@mail.ru
EGENBERDIEVA A.A., OshTU, Osh, Kyrgyz Republic.

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С НЕПОЛНЫМ КОНТАКТОМ С ОСНОВАНИЕМ НА КРАЮ БАЛКИ

BENDING OF A SEMI-GRIND BEAM ON A TWO-PARAMETRIC ELASTIC BASE WITH AN INCOMPLETE CONTACT WITH THE BASE ON THE EDGE OF THE BEAM

Бул илимий макалада Фурьенин интегралдык өзгөртмөлөрүнүн жалпы чечилүү усулун колдонуу менен серпилгич негизде жайгашкан эки параметрлүү жарым чексиз устундун четинин негиз менен толук эмес контакта болгондогу ийилүүсүнүн аналитикалык чечилиши алынган. Ошондой эле сандык эсептөөнү ишке ашыруу маселелери аткарылган жана жыйынтыктарга толук талдоо жүргүзүлгөн.

Өзөк сөздөр: *устун, негиз, эсеп, Фурьенин өзгөртмөсү.*

В статье получено аналитическое решение задачи об изгибе полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки методом обобщённых решений с использованием интегральных преобразований Фурье. Также произведена численная реализация задачи и анализ полученных результатов.

Ключевые слова: *балка, основание, расчет, преобразование Фурье.*

The article obtained an analytical solution of the problem of bending a semi-infinite beam on a two-parameter elastic base with incomplete contact with the base on the edge of the beam using the method of generalized solutions using Fourier integral transforms. Also, a numerical implementation of the problem and analysis of the results obtained.

Key words: *beam, base, calculation, Fourier transform.*

Введение. При проектировании ленточных фундаментов зданий и сооружений, опирающихся на грунт в виде лессовых отложений необходимо учитывать, что под плитой при замачивании этих просадочных грунтов может образоваться провал (неполный контакт основания). Расположение отверстия (неполного контакта) в основании может быть в различных местах конструкций фундаментов: в центре, вблизи края.

Цель исследования. Получение точного аналитического решения и численная реализация задачи об изгибе полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки.

Метод исследования. Для получения точного аналитического решения использован метод обобщенных решений с применением интегральных преобразований Фурье. Составление и отладка программы расчета осуществлялось в среде Delphi и вывод графиков с помощью системы AutoCAD.

Рассмотрим балку, лежащую на двухпараметрическом упругом основании, часть которой не имеет под собой основания. Если нагрузка приложена к краю балки, то она может быть рассмотрена по расчетной схеме полубесконечной балки. Здесь может представиться по крайней мере два случая. Часть балки, под которой нет основания, находится на ее краю, или часть балки под которой нет основания, находится вдали от края [1,2,3].

В первом случае (рис.1), если нагрузка, находится на части балки, под которой нет основания, то эту нагрузку можно привести к моменту и силе, приложенным на границе части балки, где начинается основание (полный контакт) рис.2, и рассмотреть полубесконечную балку, у которой на краю заданы M_0 и P_0 .

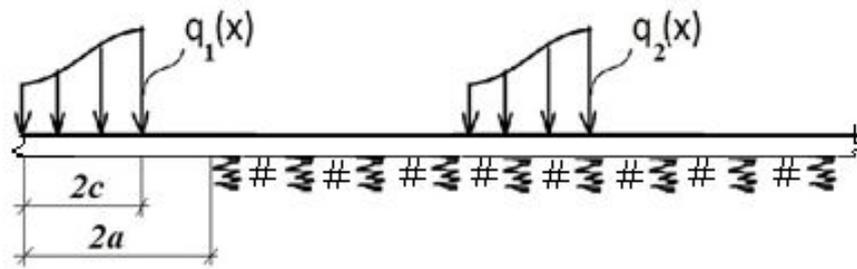


Рис.1. Полубесконечная балка на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки

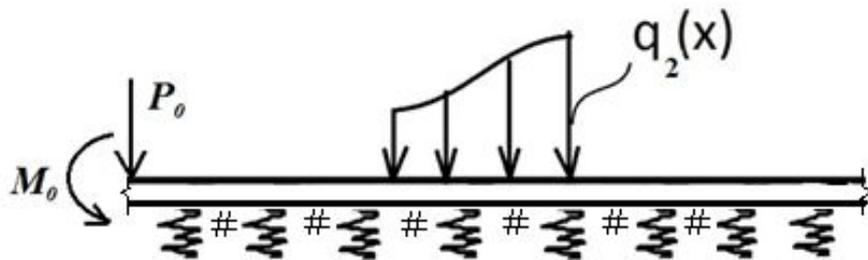


Рис.2. Полубесконечная балка на двухпараметрическом упругом основании

Запишем дифференциальное уравнение относительно прогиба балки $W(x)$ сразу в безразмерных координатах и функциях [3,4,5,6]:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - 2r^2 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + s^4 W(x) = q(x) \quad (1)$$

На свободном конце балки при $x = 0$ требуется удовлетворить следующим граничным условиям:

$$L_i W(x) = 0, \quad (i = 1, 2); \quad L_1 = -\frac{d^2}{dx^2}; \quad L_2 = -\frac{d^3}{dx^3} \quad (2)$$

Рассмотрим отдельно действие силы P_0 и момента M_0 . Для решения уравнения (1) при правой части $q_0(x)$, включающей силу P_0 , находящуюся на краю балки (рис.2) и произвольную нагрузку на остальной части балки, дополним балку до бесконечной, а в правой части (1), наряду с функцией, заданной нагрузки $q_0(x)$, введем дополнительную функцию:

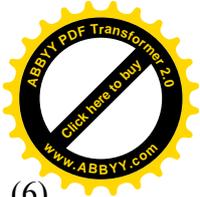
$$q_1(x) = L_1 \delta(x) = -A_1 \delta''(x) \quad (3)$$

Т.к. на дополнительной части балки всегда можно предполагать симметричную нагрузку заданной, то для решения уравнения (1) следует применить \cos -преобразование Фурье. В результате получим функцию прогиба полубесконечной балки [1,2,5]:

$$W(x) = W_\infty(x) + A_1 \frac{1}{2} e^{-x} (\cos x - \sin x) \quad (4)$$

Здесь $W_\infty(x)$ – прогиб в бесконечной балке от нагрузки $q_0(x)$ и силы P_0 ,

$$W_\infty(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q(\lambda) \cos \lambda x}{\lambda^4 + 4} d\lambda \quad (5)$$



$$Q(\lambda) = \int_0^{\infty} [q_0(x) + P_0 \delta(x)] \cos \lambda x dx \quad P_0 + Q_0(\lambda) \quad (6)$$

Неизвестный коэффициент A_1 определим из граничного условия на краю балки

$$y''(0) = 0$$

Тогда, $A_1 = y''_{\infty}(0)$

И, следовательно, значения функции прогиба, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы полубесконечной балки, нагруженной произвольной нагрузкой $q_0(x)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W(x) &= W_{\infty}(x) - \frac{1}{2} W_{\infty}''(0) e^{-x} (\cos x - \sin x) \left(\frac{y}{K} \beta \right) \\ \varphi(x) &= \varphi_{\infty}(x) + W_{\infty}''(0) e^{-x} \cos x \left(-\frac{y}{K} \beta^2 \right) \\ M(x) &= M_{\infty}(x) - W_{\infty}''(0) e^{-x} (\cos x + \sin x) \frac{1}{\beta} \\ Q(x) &= Q_{\infty}(x) + 2W_{\infty}''(0) e^{-x} \sin x \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что на части балки, контактирующей с упругим основанием, нагрузка отсутствует, т.е. $q_2(x) = 0$ (рис.1), а приложена только сила P_0 , тогда действительные значения деформаций балки и её внутренних усилий могут быть определены из следующих выражений:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{P_0}{EJ\beta^3} e^{-x} \cos x \\ \varphi(x) &= -\frac{P_0}{EJ\beta^2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \\ M(x) &= -\frac{P_0}{\beta} e^{-x} \sin x \\ Q(x) &= -P_0 e^{-x} (\cos x - \sin x) \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь рассмотрим действие момента M_0 , приложенного на краю полубесконечной балки (рис.2). В этом случае также продлим уравнение (1) на всю ось, а чтобы удовлетворить второму граничному условию $y'''(0) = 0$ введем в правую часть уравнения функцию

$$q_2(x) = -A_2 L_2(x) \quad (9)$$

Т.к. в данном случае на краю балки действует кососимметричная нагрузка в виде момента M_0 , то и на дополнительной части балки полагаем кососимметричную нагрузку. В этом случае для решения уравнения (1) применим \sin - преобразование Фурье. В результате найдем, что

$$W(x) = W_{\infty}(x) - A_2 e^{-x} \cos x \quad (10)$$

Удовлетворяя граничному условию $y'''(0) = 0$, найдем

$$A_2 = -\frac{1}{2} y'''(0)$$

Приведем значения деформаций, изгибающих моментов и поперечных сил в полубесконечной балке, нагруженной на краю моментом M_0



$$\begin{aligned}
 W(x) &= \frac{M_0}{2EJ\beta^2} e^{-x} (\cos x - \sin x) \\
 \varphi(x) &= \frac{M_0}{EJ\beta} e^{-x} \cos x \\
 M(x) &= -M_0 e^{-x} (\cos x + \sin x) \\
 Q(x) &= 2M_0 \beta e^{-x} \sin x
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Таким образом, если под частью балки, находящейся на краю, отсутствует основание на участке длиной a , то деформации балки и возникающие в ней усилия определяются формулами (7) и (11).

В качестве примера рассмотрим балку, аналогичную показанной на рис.1, к краю которой приложена сила P . В этом случае при расчете части балки, показанной на рис.2 следует принять $M_0 = P \cdot a$ и $P_0 = P$. Приведём формулы, по которым можно определить усилия и деформации в рассматриваемой балке.

Для промежутка $(0, a)$

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{Px^3}{3} + \frac{M_0}{2\beta^2} + \frac{P}{2\beta^3} + \left(\frac{P}{2\beta^2} + \frac{M_0}{\beta} \right) (a-x) \right] \\
 \varphi(x) &= \frac{1}{EJ} \left[Px^2 - \frac{P}{2\beta^2} - \frac{M_0}{\beta} \right] \\
 M(x) &= -Px \\
 Q(x) &= -P
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Для $x \geq a$ необходимо использовать формулы (8) и (11) при $P_0 = P$ и $M_0 = P \cdot a$

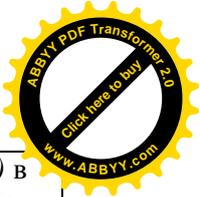
$$\begin{aligned}
 W(x) &= \frac{P}{2EJ\beta^2} e^{-x} \left[\frac{+\cos x}{\beta} + a(\cos x - \sin x) \right] \\
 \varphi(x) &= -\frac{P}{EJ\beta} e^{-x} \left[\frac{\cos x + \sin x}{2\beta} + a \cos x \right] \\
 M(x) &= -P e^{-x} \left[\frac{\sin x}{\beta} + a(\cos x + \sin x) \right] \\
 Q(x) &= -P e^{-x} [\cos x - \sin x - 2a\beta \sin x]
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

На основании алгоритма точного аналитического решения задачи изгиба полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки составлена программа в среде Delphi, а вывод графиков осуществлен в системе AutoCAD [7,8].

Результаты численной реализации приведены на рис.3 и в таблице 1.

Таблица 1 - Значения прогибов $W(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$ при $a=0,75$ полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки

Координаты	Значения прогибов $W(x)$ в случае	Значения прогибов $W(x)$ в случае модели	Значения изгибающих	Значения изгибающих



	двухпараметрической модели упругого основания	упругого основания Винклера	моментов $M(x)$ в случае двухпараметрической модели упругого основания	моментов $M(x)$ в случае модели упругого основания Винклера
1,5	+0,9700	+1,1642	-0,4000	-0,4480
2,0	+0,8343	+1,0016	-0,2248	-0,2585
2,5	+0,5045	+0,6540	-0,1312	-0,1042
3,0	+0,0011	+0,0013	-0,0868	-0,1081
3,5	-0,1312	-0,0656	-0,0005	+0,0008
4,0	-0,0656	-0,0328	+0,0525	+0,0854

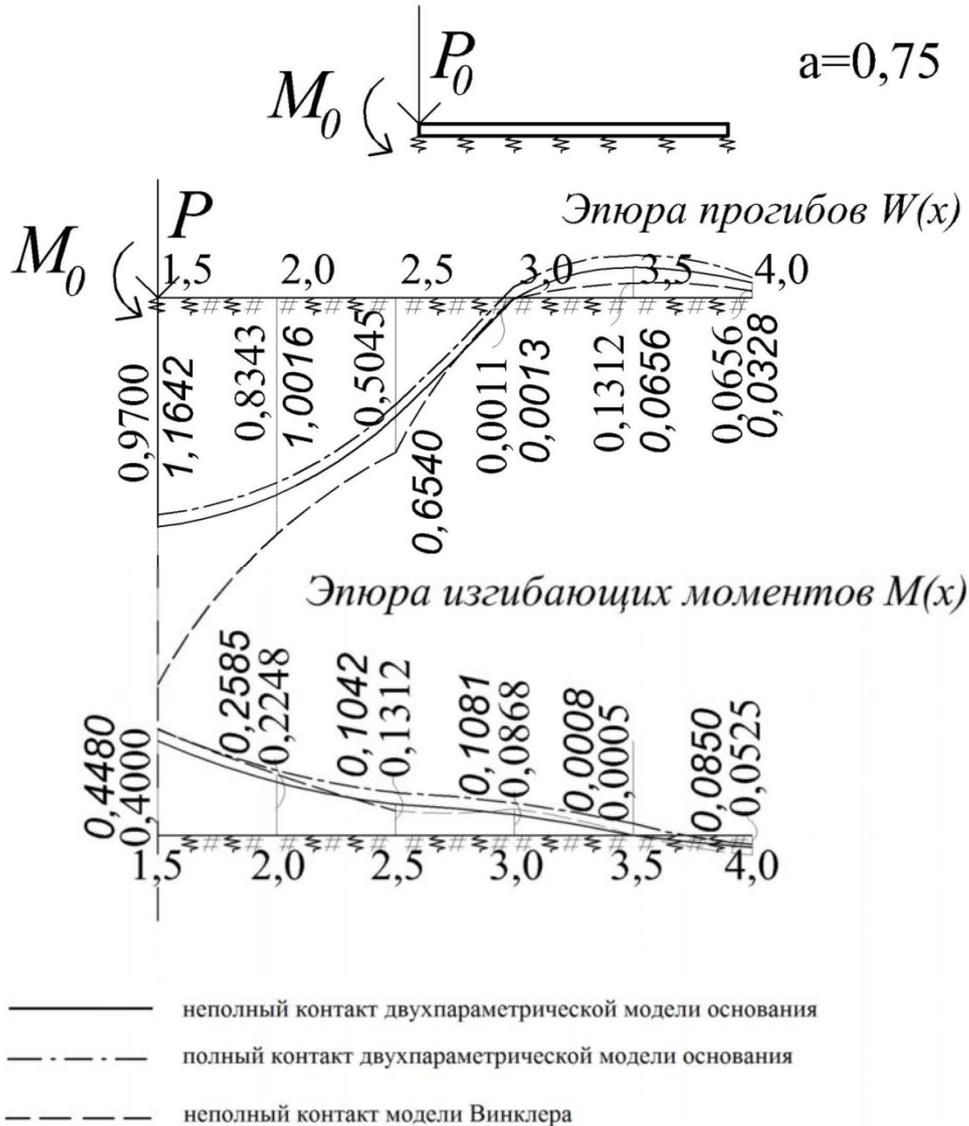


Рис.3. Эпюры прогибов $W(x)$, изгибающих моментов $M(x)$ при $a=0,75$ полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки

Выводы. Итак, получено аналитическое решение задачи об изгибе полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки. Проведена численная реализация полученного аналитического решения. Результаты численной реализации показывают, что изгибающие моменты в случае двухпараметрической модели упругого основания в 1,15 раза меньше, чем при модели упругого основания Винклера, а прогибы в 1,2 раза меньше двухпараметрической модели



упругого основания, чем при модели Винклера.

Список литературы

1. Маруфий А.Т. Математическое моделирование задач изгиба различных схем плит на деформируемом основании с особенностью в основании [Текст] /А.Т. Маруфий, К.Т. Мансуров. – Бишкек: «Илим» НАН КР,2014. – 148 с.
2. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с одним участком неполного контакта с основанием [Текст] /А.Т. Маруфий, Э.С. Рысбекова и А.А. Эгенбердиева // Вестник КГУСТА. – 2016. - №1. – 252-256 с.
3. Маруфий А.Т. Расчет средней части ленточного фундамента [Текст] / А.Т. Маруфий // АН Киргизской ССР ЮКУНЦ «Илим». – Фрунзе: 1990.–35-38 с.
4. Маруфий А.Т. Расчет прямоугольной плиты на упругом основании [Текст] /А.Т. Маруфий, Н.Н. Леонтьев // Сборник трудов МИСИ «Расчет пространственных конструкций».– М.: 1983.– 122-126 с.
5. Травуш В.И. Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании [Текст] / В.И. Травуш // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. - №1. – 24-28 с.
6. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз,1960. - 419 с.
7. Соколова Т.Ю. AutoCAD – 2008 [Текст] / Т. Ю. Соколова. – СПб: Питер, 2008. – 174с.
8. Чертик А.А. Программирование в среде Delphi [Текст] / А. А.Чертик. – СПб: Питер, 2008. –400 с.