УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, *д.ф.-м.н., профессор, КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира 66. Тел: 0312-61-03-70, e-mail:* ablabekov_63@mail.ru,

Байсеркеева Айнура Бектургановна *- преподаватель, кафедра теоретической и прикладной математики, Иссык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова, г. Каракол, Кыргызская республика*

Аннотация. В представленной работе рассматривается задача Коши для двумерного уравнения теплопроводности с обратным временем. Известно, что решение этой задачи существует, единственно, но не является устойчивой. Предложен метод регуляризации рассматриваемой задачи с помощью двумерного псевдопараболического уравнения.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, псевдопараболическое уравнение, некорректная задача, метод регуляризации, устойчивости, ретроспективная задача.

THE CAUCHY PROBLEM FOR 2-D BACKWARD HEAT CONDUCTION EQUATION

Ablabekov Baktybai Saparbekovich *- Doctor of physico-mathematical sciences, Professor, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KSTU named after I.Razzakov. Phone: 0312-54-54-35, e-mail: ablabekov_63@mail.ru Bishkek, Kyrgyz Republic.*
Baiserkeeva Ainura Bekturganovna *- Lecturer, Department of Theoretical and Applied Mathematics, Issyk-Kul State University of Kasim Tynystanov, Karakol, Kyrgyz Republic*

Abstract. In this paper we consider the Cauchy problem for the two-dimensional heat equation with inverse time. It is known that the solution of this problem exists, unique, but not stable. A method for regularizing the problem is proposed using a two-dimensional pseudo-parabolic equation.

Keywords: heat equation, pseudoparabolic equation, ill-posed problem, regularization method, stability estimate, retrospective problem.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что задача Коши для уравнения обратной теплопроводности некорректна**:**

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,\pi), t \in (0,T) \tag{0.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{0.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{0.3}$$

т.е. решение не всегда существует, а в случае существования отсутствует непрерывная зависимость от исходных данных.

Поэтому решают задачу (0.1) – (0.3) с помощью различных методов регуляризации. Одним из них является метод Лионса [4], который называется методом квазиобращения. Метод квазиобращения состоит в возмущении исходного уравнения и при применении сохраняется дифференциальный вид уравнения (0.1). Другими словами, задача (0.1) – (0.3) заменяется семейством регуляризованных задач, которое является классически корректным, и его решение при определенных условиях сходится к решению исходной задачи (0.1) – (0.3). Метод квазиобращения впервые был применен для решения уравнения теплопроводности с обратным течением времени французским ученым Р. Лионсом, далее он был развит в работах [5-7]. А в работах [6-7] метод квазиобращения с дополнительной регуляризацией был применен для решения общей некорректной задачи Коши для эволюционного уравнения.

Например, вместо задачи (0.1)-(0.3) расматривалось краевая задача для уравнения четвертого порядка:

$$\vartheta_t - \vartheta_{xx} - \alpha\,\vartheta_{xxxx} = 0, \quad x \in (0,\pi), t \in (0,T) \tag{0.4}$$

$$\vartheta(0,t) = \vartheta(\pi,t) = 0, \quad \vartheta_{xx}(0,t) = \vartheta_{xx}(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{0.5}$$

$$\vartheta(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{0.6}$$

В работе [1] методом Фурье показано, что задача (0.4)-(0.6) корректна.

2.Постановка задачи и основные результаты. Пусть $\Pi_T = \{(x,y,t) : (x,y) \in \Pi, t \in (0,T]\}$, $\Pi = \{(x,y) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$.

Задача 1. Пусть требуется найти функцию $u(x,t) \in C([0,T]; H_0^1(\Pi)) \cap C^1([0,T]; L_2(\Pi))$, удовлетворяющее в области Π_T уравнению

$$u_t(x,t) - \Delta_2 u = 0, \quad (x,y) \in \Pi_T; \tag{1}$$

и начальным

$$u(x,y,T)=\varphi(x,y),(x,y)\in\Pi; \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0,\ 0\le y\le\pi,\ 0\le t\le T,\\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\ 0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T. \end{cases} \qquad (3)$$

Необходимо найти функции $u(x,y,t)$ в Π_T, т.е. при обратном времени решить задачу (1) – (3). Здесь $\varphi(x,y)$ - заданная функция.

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi(x,y)\in C^2(\overline{\Pi})$, $\varphi'''(x,y)\in L_2(\Pi)$ и

$\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=0, \varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=0$, $\varphi(x,0)=\varphi(x,m)=0, \varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,m)=0$,

то существует единственное решение задачи (1)-(3) $u(x,y,t)\in C([0,T];H_0^1(\Pi))\cap C^1([0,T];L_2(\Pi))$ и оно представляется рядом

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(-(k^2+n^2)(t-T)\right)\sin kx\sin ny, \qquad (4)$$

здесь

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\sin kx\sin nx,\quad \varphi_{kn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,y)\sin kx\sin ny\,dxdy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3), в виде двойного ряда

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)Y_n(y)W_{kn}(t). \qquad (5)$$

Подставляя значения $u(x,y,t)$ из (5) в (1) и разделяя переменные получим,

$$W'_{kn}+\lambda_{kn}W_{kn}=0,\ \frac{X''_k(x)}{X_k(x)}+\frac{Y''_n(y)}{Y_n(y)}=\lambda_{kn}. \qquad (6)$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists$ μ_k и v_n такие, что

$$X''_k(x)+\mu_kX_k(x)=0,\ Y''_n(y)+v_nY_n(y)=0,\quad \mu_k+v_n=\lambda_{kn}.$$

Краевые условия дают для функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$ выполнение равенств:

$$X_k(0)=X_k(\pi)=0,\ Y_n(0)=Y_n(\pi)=0.$$

Таким образом, для решения задачи (1)-(3) получили две задачи Штурма-Лиувилля – для $X_k(x)$ и для $Y_n(y)$.

$$X''_k(x)+\mu_kX_k(x)=0,\ X_k(0)=X_k(\pi)=0, \qquad (7)$$

$$Y''_n(y)+v_nY_n(y)=0,\qquad Y_n(0)=Y_n(\pi)=0. \qquad (8)$$

Собственные значения и собственные функции первой задачи (7),(8) будут иметь вид:

$$\mu_k=k^2,\ X_k(x)=\sin kx,\quad k=1,2,..., \qquad (9)$$

и образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,\pi)$. А для второй задачи

$$v_n=n^2,\ Y_n(x)=\sin ny,\quad n=1,2,.... \qquad (10)$$

Для каждого $\lambda_{kn}=\mu_k+v_n=k^2+n^2$ из (6) находим

$$W_{kn}(t) = C\exp\left(-\lambda_{kn}t\right),$$

где C – произвольная постоянная. Подставив $W_{kn}(t)$ в начальное условие $W_{kn}(T) = \varphi_{kn}$, получим, что $C = \varphi_{kn}\exp\left(\lambda_{kn}T\right)$, откуда

$$W_{kn}(t) = \varphi_{kn}\exp\left(\lambda_{kn}(T-t)\right).$$

После подстановки найденных $W_{kn}(t)$ в искомый вид решения (4), получим

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left((k^2+n^2)(T-t)\right)\sin kx\sin ny. \qquad (11)$$

Нетрудно показать, что функция определенная по формуле (10) удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (3).

Покажем, что решение (11) является неограниченной.

Действительно, пусть и $\varphi(x,y) = e^{-\sqrt{k+n}}\sin kx\sin ny$. Тогда решение задачи (1)-(3) имеет вид

$$u(x,y,t) = e^{-\sqrt{k+n}}e^{(k^2+n^2)(T-t)}\sin kx\sin ny. \qquad (12)$$

При $k\to\infty, n\to\infty$ функция $e^{-\sqrt{k+n}}\sin kx\sin ny$, представляющая собой данные задачи (1) – (3) стремится к нулю с производными всех порядков. Тем не менее, решение задачи, как видно из формулы (12), при любом фиксированном $0<t<T$ является неограниченной. Следовательно, какую бы норму мы ни выбрали для оценки начальных данных, мы не сможем утверждать, что из малости этой нормы вытекает малость решения.

2.Регуляризация задачи (1)-(3).

Как и в работе [1], для введения задачи (1)-(3), в класс корректности заменим ее «близкой» задаче, а именно, заменим уравнение (1) на двумерное псевдопараболическое уравнение с условиями (2), (3), т.е. задачей

$$u_{\alpha t} - \Delta_2 u_\alpha - \alpha\,\Delta_2 u_{\alpha t} = 0, \quad (x,t)\in \Pi_T, \qquad (13)$$

$$\begin{cases} u_\alpha(0,y,t) = u_\alpha(\pi,y,t) = 0,\ 0\le y\le\pi,\ 0\le t\le T, \\ u_\alpha(x,0,t) = u_\alpha(x,\pi,t) = 0,\ 0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T. \end{cases} \qquad (14)$$

$$u_\alpha(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi. \qquad (15)$$

где $\alpha>0$ – параметр регуляризации. Используя результаты работы [2] нетрудно доказать, что если функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то решение задачи (13)-(15) существует, единственно и дается по формуле

$$u_\alpha(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\sin kx\sin ny, \qquad (16)$$

где

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\sin kx\sin nx,$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\varphi(x,y)\sin kx\sin ny\,dxdy.$$

Остановимся теперь на устойчивость.

Теорема 2. Пусть для функции выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (13)-(15) справедлива оценка

$$\left\| u_\alpha(x,y,t) \right\| \le \exp\left(\frac{2}{\alpha}(T-t)\right) \left\| \varphi(x,y) \right\|. \qquad (17)$$

Доказательство. Из того, что

$$\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)} \le \frac{1}{\alpha} \qquad (18)$$

и из (16) следует

$$\left\| u_\alpha(x,y,t) \right\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_{kn}\right|^2 \exp\left(\frac{2(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right) \le$$

$$\le \exp\left(\frac{2}{\alpha}(T-t)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_{kn}\right|^2 = \exp\left(\frac{2}{\alpha}(T-t)\right)\left\|\varphi\right\|^2.$$

Таким образом, получили оценку (17), характеризующую устойчивость решений задачи (13)-(15) по начальным данным. Следовательно, задача (13)-(15) поставлена корректно в смысле Адамара при $\alpha > 0$.

Как и в работах [1,5], покажем, что семейство операторов B_α, переводящих функцию $\varphi(x,y)$ в решение задачи (13)-(15), определяемое формулой (17),т.е. определенных по правилу $B_\alpha \varphi = u_\alpha$, будет регуляризирующим семейством по отношению к задаче (1)-(3).

Из оценки (17) для нормы оператора B_α справедлива оценка

$$\left\| B_\alpha \right\| \le e^{\frac{T-t}{\alpha}}.$$

Эта оценка следует из теоремы 2.

Предположим, что задача (1)-(3) поставлена корректно по Тихонову и множество корректности ***M*** определяется неравенством

$$\left\{ \int_0^\pi \int_0^\pi u^2(x,y,0)\,dxdy \right\}^{1/2} \le C. \qquad (19)$$

Оценим величину уклонения u_α от точного решения u задачи (1)-(3) при условии (19) или при условии

$$u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}^2 \exp 2\left((k^2+n^2)T\right) \le C.$$

Так как выражение

$$\varphi_{kn}\left[\exp\left((k^2+n^2)(T-t)\right) - \exp\left(\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\right]$$

при условии, что

$$\varphi_{kn}\exp\left((k^2+n^2)T\right) \le C,$$

не превосходит функции

$$C\exp\left(-(k^2+n^2)T\right)\left[\exp\left((k^2+n^2)(T-t)\right) - \exp\left(\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\right] =$$

$$= C\exp\left(-(k^2+n^2)t\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha(k^2+n^2)^2}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\right],$$

тогда

$$\|u_\alpha(x,y,t)-u(x,y,t)\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}^2\left[\exp\left((k^2+n^2)(T-t)\right)-\exp\left(\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\right]^2\right\}^{1/2} \leq \tag{20}$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(-2(k^2+n^2)t\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha(k^2+n^2)^2}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\right]^2\right)^{1/2}.$$

Из (20) следует сходимость решения регуляризованной задачи (13)-(15) $u_\alpha(x,y,t)$ при $\alpha \to 0$ к точному решению $u(x,y,t)$ задачи (1)-(3).

Заключение. В данной статье мы изучали некорректную задачу Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности. При исследовании поставленной задачи мы применили методы: Фурье, псевдопараболической регуляризации, квазиобращения.

Список литературы

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек. - Илим.-2001.- 181с.

2. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. О разрешимости смешанных задач для двумерного псевдопараболического уравнения //Приволжский научный вестник. 2016.№10(62).С.5-9.

3. Вабищевич П. Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности //Дифференц. уравнения, 1981, том 17, номер 7, 1193–1199.

4. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., Мир, 1970.- 336с.

5. D. Colton. The Approximation of Solutions to the Backwards Heat Equation in a Nonhomogeneous Medium //J. Math. Anal. d4ppl. 72 (1979), 418-429.

6. D.D. Trong, P.H. Quan, T.V. Khanh, N.H. Tuan, A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate, Z. Anal. Anwend. 26 (2) (2007) 231–245.

7.Showalter R.E. F1nal value problem for evolut1on equat1ons// J. Math. Anal. Appl. - 1974. - V.47. - P.563-572.