

## **ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРАЩЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MATLAB**

**Султаналиева Рая Мамакеевна**, *д.ф.-м.н., профессор. Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика,*

**Орозбаев Акжол Акбарович**, *ст. преподаватель. Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика, akjol1986\_86@mail.ru*

**Искендер Козубай**, *ст. преподаватель. Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика,*

Исследования закономерностей деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при сложном нагружении имеют принципиальное значение как с точки зрения фундаментальных основ теории упругости, так и в плане практических приложений, связанных с прочностными расчётами конструкций и аппаратов новой техники, подверженных воздействию нагрузок. Эти задачи изучены ещё недостаточно. Численное

моделирование является важной составной частью исследований, как на стадии формулировки и изучения моделей деформирования сплошных сред, так и на стадиях анализа и расчётов на прочность конкретных конструктивных элементов и конструкционных материалов.

**Ключевые слова:** тензор Коши, тензор вращения, перемещение, деформированное состояние, кручение.

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF MATHEMATICAL MODELING OF STRUCTURES IN MATLAB

*Sultanalieva Raia Mamakeevna, Dr., Professor Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakova, Bishkek*

*Orozbaev Akzhol Akbarovich, Senior Lecturer Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakova, Bishkek*

*Iskender Kozubai, Senior Lecturer Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakova, Bishkek*

Study regularities deformation of structural materials (metals and alloys) under complex loading are essential both in terms of the fundamentals of the theory of elasticity, and in terms of practical applications related to the strength calculations of structures and devices of new equipment exposed to loads. These tasks are still insufficiently studied. Numerical simulation is an important part of research at the stage of formulation and study of deformation models of continuous media, and at the stage of analysis and calculations on the strength of concrete structural elements and structural materials.

**Keywords:** Cauchy tensor, the tensor of rotation, displacement, strain state, torsion.

### Введение

В нетрадиционном подходе к решению статических краевых задач строго исследуется аксиомы равновесия. Приведем способ определения компонент перемещения по известным компонентам деформации.

Следуя Чезаро [1], допустим, что в области  $V$  заданы компоненты деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Вектор относительного перемещения

$$du_i = u_{i,j} dx_j \quad (1)$$

представим в виде

$$du_i = u_{i,j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}).$$

Отметим, что величины  $\varepsilon_{ij}$  и  $\omega_{ij}$  связаны между собой соотношением

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{kij} - \varepsilon_{kji} \quad (3)$$

Проинтегрируем (2) по какой-либо линии  $I$ , лежащей в области  $V$ . Пусть  $x^0$  начальная точка линии, а  $x$  - произвольная ее точка

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \int_I \varepsilon_{ij}(y) dy_j + \int_I \omega_{ij}(y) dy_j.$$

Интегрирование по частям последнего интеграла в правой части этого выражения дает

$$\int_1 \omega_{ij}(y) dy_j = \omega_{ij}(x^0) (x_j - x_j^0) + \int_1 (x_j - y_j) \omega_{ij,k}(y) dy_k .$$

Подставим это в предыдущее выражение и, учитывая (3), напишем полученное в виде

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) + \int_1 (\varepsilon_{ik}(y) + (x_j - y_j)(\varepsilon_{k,ij}(y) - \varepsilon_{k,ji}(y))) dy_k \quad (4)$$

где  $u_i(x^0)$ ,  $\omega_{ij}(x^0)$  – постоянные интегрирования. Им можно придать произвольные, в том числе и равные нулю, значения.

В некоторых случаях более удобно пользоваться не этой формулой, а ее преобразованным видом [1]. Для преобразования (4) к виду, в котором оно будет содержать компоненты напряжения, воспользуемся следующим представлением обобщенного закона Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} (-\nu \delta_{ij} \sigma_{kk} + (1 + \nu) \sigma_{ij}). \quad (5)$$

Отсюда легко определить

$$\varepsilon_{k,ij} - \varepsilon_{k,ji} = -\frac{1}{E} (\nu (\delta_{ki} \sigma_{tt,j} - \delta_{kj} \sigma_{tt,i}) + (1 + \nu) (\sigma_{kij} - \sigma_{kji})).$$

Подставляя это в выражение (4), имеем

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0) (x_j - x_j^0) + \frac{1}{E} \int_1 (-\nu \delta_{ik} \sigma_{tt} + (1 + \nu) \sigma_{ik} + (x_j - y_j) (-\nu (\delta_{ki} \sigma_{tt,j} - \delta_{kj} \sigma_{tt,i}) + (1 + \nu) (\sigma_{kij} - \sigma_{kji}))) dy_k . \quad (6)$$

В этом выражении  $u_i(x^0)$ ,  $\omega_{ij}(x^0)$ , также как и (4), произвольные постоянные.

Найдем во внутренних точках прямоугольной плиты напряжения, деформации и создавшие их перемещения. Как видим, в трудах постановки статической краевой задачи [1] приводится решение

$$\sigma_{ij} = \delta_{i2} \delta_{j2} c x_3, \quad x_i \in V \quad (7)$$

Функции перемещений можно определить, внося (7) в (6)

$$u_i = \frac{1}{E} \int_1 c (-\nu \delta_{ik} x_3 + (1 + \nu) \delta_{i2} \delta_{k2} x_3 + (x_i - y_j) (-\nu (\delta_{ki} \delta_{3j} - \delta_{kj} \delta_{3i}) + (1 + \nu) \delta_{k2} (\delta_{i2} \delta_{3j} - \delta_{j2} \delta_{3i}))) dy_k, \quad x_i \in V$$

Интегрируя это выражение, находим

$$u_i(x) = -c (\delta_{i1} \nu x_3 (x_1 - x_1^0) - \delta_{i2} x_3 (x_2 - x_2^0) + \delta_{i3} (x_2^2 + \nu (x_3^2 - x_1^2) - x_2^0 (2x_2 - x_2^0) - \nu ((x_3^0)^2 - x_1^0 (2x_1 - x_1^0)))) / 2 / E, \quad x_i \in V \quad (8)$$

где  $x_i^0$  – любая фиксированная точка области  $V$ . Приведем развернутый вид функций(8):

$$u_1(x) = -c \nu x_3 (x_1 - x_1^0) / E, \quad x_i \in V$$

$$u_2(x) = c x_3 (x_2 - x_2^0) / E, \quad x_i \in V$$

$$u_3(x) = -c ((x_2^2 + \nu (x_3^2 - x_1^2) - x_2^0 (2x_2 - x_2^0) - \nu ((x_3^0)^2 - x_1^0 (2x_1 - x_1^0)))) / (2E), \quad x_i \in V$$

Функции (8) удовлетворяют уравнениям равновесия в форме Навье.

Наконец, из поля перемещений (8) определим компоненты деформации и вращения

$$\varepsilon_{ij} = c x_3 (-\nu (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i3} \delta_{j3}) + \delta_{i2} \delta_{j2}) / E, \quad x_i \in V \quad (9)$$

$$\omega_{ij} = -c (\nu (x_1 - x_1^0) (\delta_{1i} \delta_{3j} - \delta_{3i} \delta_{1j}) - (x_2 - x_2^0) (\delta_{2i} \delta_{3j} - \delta_{3i} \delta_{2j})) / E, \quad x_i \in V \quad (10)$$

По полученным здесь выражениям в любой точке находящегося в равновесии в области  $V$  тела можно определить компоненты напряжения, деформации и вращения. Особо отметим то, что во всех выражениях (7) – (10) координаты только области  $V$ .

### Расчеты напряженно- деформированного состояния конструкций.

В декартовой системе координат, оси которой обозначим через  $x_1, x_2, x_3$ , деформированное тело занимает область  $V: 2 \leq x_1 \leq 4, \pi/6 \leq x_2 \leq \pi/3, 2\pi/3 \leq x_3 \leq 5\pi/6$

Используя формулы Чезаро [1], находим это поле в виде

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \omega_{12}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_2 - x_2^0) + \\
 &\quad + \omega_{13}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_3 - x_3^0) + c x_1 \sin x_2 \cos x_3 \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \omega_{21}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_1 - x_1^0) + \\
 &\quad + \omega_{23}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_3 - x_3^0) + c x_1 \sin x_2 \sin x_3 \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \omega_{31}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_1 - x_1^0) + \\
 &\quad + \omega_{32}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) (x_2 - x_2^0) + c x_1 \cos x_2,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  координаты начальной точки линии интегрирования. В качестве  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  можно использовать координаты любой точки области V,

$$u_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0), u_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0), u_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

постоянные интегрирования, соответствующие параллельному переносу тела.

На основе предложенной математической модели рассмотрим кручение стальной пластины ( $E=110\text{ГПа}$ ). На рисунке 1 область V показана слева. Справа показаны преобразования области V, соответствующей  $c = 0.28\text{ГПа}$ .

Реализуем решение для максимально перемещенной точки. Это точка с координатой  $x_1=1.5120\text{e}+001 \quad x_2=1.5708\text{e}+000 \quad x_3=3.1416\text{e}+000$

тензор деформации:

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{pmatrix} -2.1875\text{e}-001 & -8.5781\text{e}+000 & -8.5781\text{e}+000 \\ -8.5781\text{e}+000 & 0 & -1.1113\text{e}+000 \\ -8.5781\text{e}+000 & -1.1113\text{e}+000 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений для этой точки:

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} -2.8000\text{e}-001 & -1.7145\text{e}-017 & -6.0008\text{e}-017 \\ -1.7145\text{e}-017 & 8.3987\text{e}-033 & -1.1200\text{e}+000 \\ -6.0008\text{e}-017 & -1.1200\text{e}+000 & 0 \end{pmatrix}$$

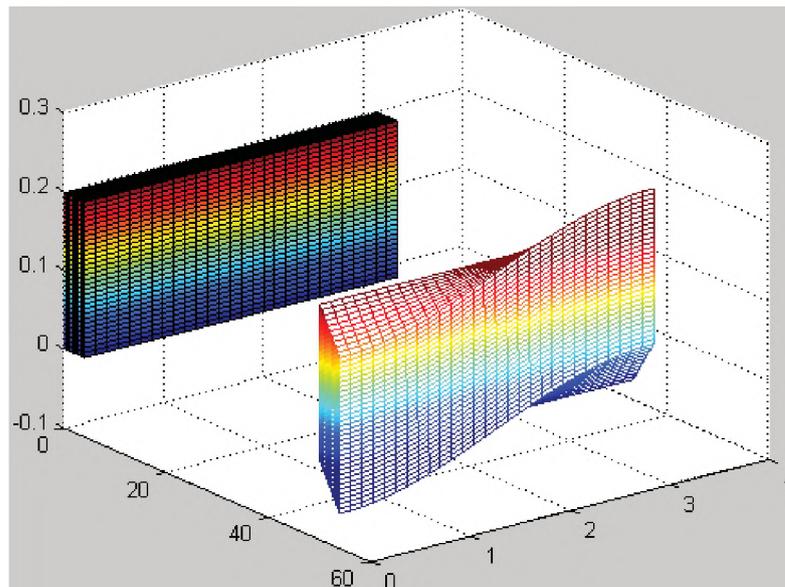


Рис. 1. Кручение при  $c=0.28\text{ГПа}$ . Слева начальное состояние

Тензор вращения:

$$\omega_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 8.5781e+000 & 8.5781e+000 \\ -8.5781e+000 & 0 & 4.0750e-003 \\ -8.5781e+000 & -4.0750e-003 & 0 \end{pmatrix}$$

Нормальные напряжения:

$$\sigma_x = -2.8000e-001$$

$$\sigma_y = 8.3987e-033$$

$$\sigma_z = 0$$

Касательные напряжения:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx},$$

$$\tau_{xy} = -1.7145e-017, \tau_{xz} = -6.0008e-017, \tau_{yz} = -1.1200e+000$$

Перемещение:

$$u_x = -1.1120e+001, u_y = 1.3716e-016, u_z = 6.8580e-017$$

Расчеты напряженно- деформированного состояния стальной пластины показаны в таблице 1.

Таблица 1. Параметры для стали.

$\sigma_x$	0	4.7619e-003	9.5238e-003	1.4286e-002	1.9048e-002	2.3810e-002	2.8571e-002	3.3333e-002
$\varepsilon_x$	0	4.7393e-003	9.4340e-003	1.4085e-002	1.8692e-002	2.3256e-002	2.7778e-002	3.2258e-002
$\nu$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07

Сравнения полученных результатов с другими упругими материалами показана на рисунке 2.

График напряженно- деформированного состояния для разных материалов  $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$

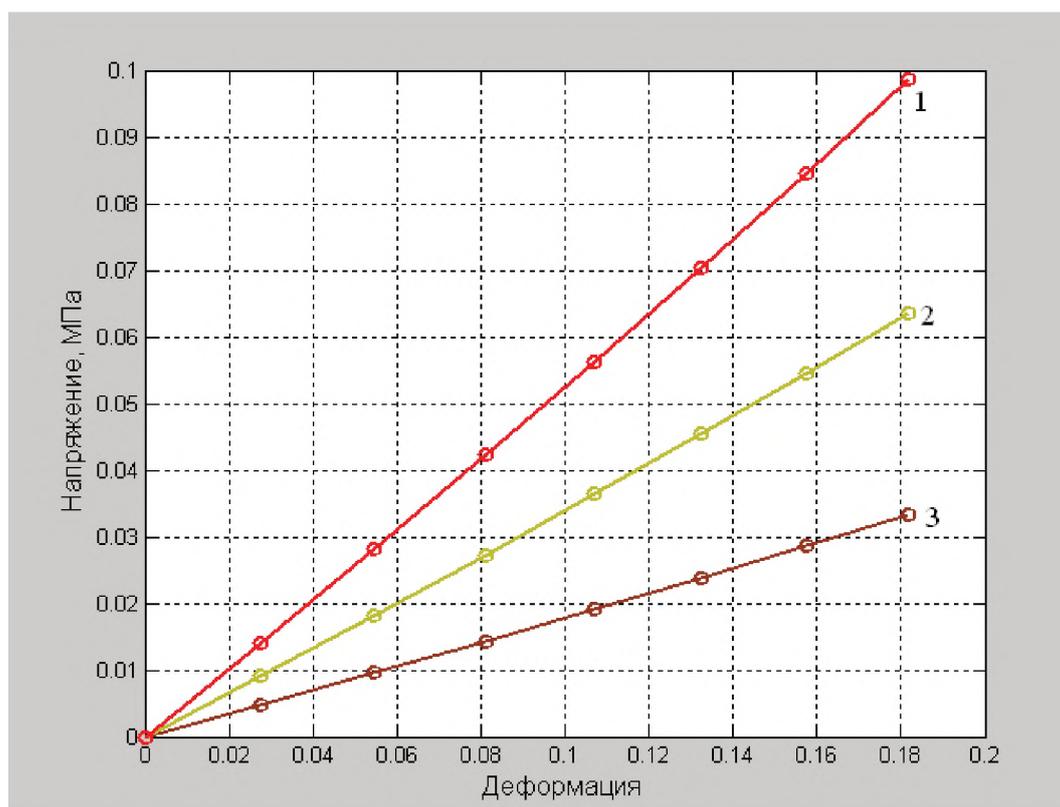


Рис.2. (1-Алюминий, 2- Медь, 3-Сталь)

**Вывод:** Таким образом, использование пакета Matlab позволяет реализовать численные значения напряженно- деформированного состояния стальных и других металлических конструкций при кручении.

#### Список литературы

1. Дуйшеналиев Т.Б. О постановке и решении статической краевой задачи// Бишкек 2001. С. 40-50.
2. Дьяконов В.П. MATLAB 6. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. С. 158-165.
3. Курбатова Е. А. MATLAB 7. Самоучитель. — М.: «Диалектика», 2005. — 256
4. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5/7.0 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Библиотека профессионала. — М.: «СОЛОН-Пресс», 2005. — 576 с.
5. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MATLAB 7. Самоучитель. — Пресс, 2005. — 464 с.