УДК 517.962, 517.956.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Кокозова Айнагул Жылкычиевна, *ст. преподаватель и аспирант кафедры «Информационные технологии и управление» ОшТУ, Кыргызстан, 714018, г.Ош, ул.Исанова 81, ОшТУ, +996554757202,* kokozova72@mail.ru

Сатыбаев Абдуганы Джунусович, *д.ф.м.н., профессор, Заведующий кафедрой «ИТиУ» ОшТУ, abdu-satybaev@mail.ru*

Аннотация. В данной статье рассмотрена двумерная прямая задача телеграфного уравнения, указанными в теме статье, источниками.

Прямая задача построена таким образом, чтобы можно было исследовать соответствующую обратную задачу.

Известно, что корректность задачи означает, что решение существует, единственно и устойчиво.

В данной статье исследовано первое условие корректности задачи, т.е. существование решения, доказано, что решение существует при определенных условиях.

Ключевые слова. Двумерная, прямая задача, телеграфное уравнение, мгновенный, шнуровой источник, существование решения.

PROOF OF EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM OF TWO-DIMENSIONAL TELEGRAPH EQUATION WITH INSTANT AND CORDED SOURCE

Kokozova Ainagul Zhylkychievna, *Art. lecturer and graduate student of "Information Technology and Management" Osh Technical University, Kyrgyzstan, 714 018, Osh, ul.Isanova 81 OshTU, +996554757202,* kokozova72@mail.ru
Satybaev Abdugany Dzhunusovich, *Head: Prof., Professor, Head of Department "ITiU" OshTU,* abdu-satybaev@mail.ru

Abstract. This article describes the two-dimensional direct problem telegraph equation indicated in the subject article, sources.

The direct problem is constructed in such a way that it was possible to investigate the corresponding inverse problem.

It is known that the problem is correct, that a solution exists, it is unique and stable.

This article investigated the first condition of correctness of the problem, ie, existence of a solution is proved that a solution exists under certain conditions.

Keywords. Two-dimensional, direct problem, telegraph equation, instant, cord source, the existence of solutions.

Для решения задач телеграфного уравнения применяют различные методы в зависимости от начальных и граничных, краевых условий, и в зависимости физических процессов и явлений и т.д. Приведем наиболее часто применяемые методы решений: метод характеристик, метод разделения переменных, метод комфортных преобразований, операционные методы, численные методы (сеток, Монте-Карло, итерационные методы, Рунге Кутта) (см. лит. [1-3,6]).

Здесь учитываем результаты [4,5], при получении прямой задачи с данными на характеристиках

Докажем, что (см. предыдущую статью авторов)

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy \le B_3,\ \text{если}\quad \max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right]^2 < B_3$$

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,t)=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_2}+$$

$$+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j}^{k+1}}{h_2};$$

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,k\tau)=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2};$$

$$\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,k\tau)\,d\alpha dy=\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}\right]^2 d\alpha dy=\left|\begin{array}{l}\eta=\dfrac{y}{h_2}-j,\ h_2d\eta=dy\\ \xi=\dfrac{\alpha}{h_1}-i,\ h_1d\xi=d\alpha\end{array}\right|=$$

$$=h_1h_2\int_0^1\left[(1-\xi)\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}+\xi\cdot\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}\right]^2 d\xi=\left|c_2=\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\quad d_2=\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}\right|=$$

$$=h_1h_2\left[\frac{1}{3}c_2^2+2c_2d_2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{3}d_2^2\right]\le\frac{h_1h_2}{2}\left(c_2^2+d_2^2\right)=\frac{h_1h_2}{2}\cdot\left[\left(\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}\right)^2\right].$$

Суммируя последнее при $i=\overline{N,N};\qquad j=\overline{-L,L}$

$$\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\left(\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}\right)^2\right]\le B_3; \tag{20}$$

Такое же неравенство можно установить и для

$$\max_{i\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\le B_3.$$

Рассмотрим в параллелепипеде $k\tau<t<(k+1)$, $ih<\alpha<(i+1)h_1$, $jh_2<y<(j+1)h_2$ следующую функцию

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,(k+1)\tau)=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)*\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_2}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j}^{k+1}}{h_2}.$$

Отсюда

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,t)=\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\tilde{u}_y(\alpha,y,k\tau)+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_\alpha(\alpha,y,(k+1)\tau). \tag{21}$$

Что и показывает линейность функции $\tilde{u}_y(\alpha,y,t)$

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,t)dady=(1-(\frac{t}{\tau}-k))\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,k\tau)dady+(\frac{t}{\tau}-k)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\,dady\le$$

$$\le\left[1-(\frac{t}{\tau}+k)+\frac{t}{\tau}+k\right]\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)\,dady\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right]^2\le B_3.$$ Таким образом, показали ограниченность и линейность кусочно-непрерывных функций $\tilde{u}(\alpha,y,t),\tilde{u}_t(\alpha,y,t),\tilde{u}_\alpha(\alpha,y,t),\tilde{u}_y(\alpha,y,t)$.

Покажем теперь существование следующих членов $\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial\alpha},\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial t},\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$, т.е. можно выбрать сходящейся подпоследовательности функций $\left\{U_{ij}^k\right\},\left\{W_{ij}^k\right\},\left\{V_{ij}^k\right\}$, которые сходятся к вышеуказанным членам.

Обозначим через $v_{ij}^k=\frac{u_{i+1j}^k-u_{ij}^k}{h_1}$. Пусть выполнены (11) и а также для (v_{ij}^k) выполнено условие (11), т.е.

$$\left\{\begin{array}{l} \max h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}(v_{ij}^k)^2 \le A; \quad \max h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{v_{ij}^k - v_{ij}^k}{\tau}\right)^2 \le B_1 \\ \max h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{v_{i+1j}^k - v_{ij}^k}{h_1}\right)^2 \le B_2; \quad \max h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left(\dfrac{v_{ij+1}^k - v_{ij}^k}{h_2}\right)^2 \le B_3. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Докажем, что справедливо $v(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}$. Пусть $\alpha_2>\alpha_1$

$$\tilde{u}(\alpha_2,y,t)-\tilde{u}(\alpha_1,y,t)=\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)-\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=$$

$$=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}\frac{u_{i+1j}^k-u_{ij}^k}{h_1}*h_1+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}v_{ij}^k h_1+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=$$

$$=\sum_{i=\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}v(\alpha,y,k\tau)d\alpha+O\left((\alpha_2-\alpha_1)\sqrt{h_1}\right)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}v(\alpha,y,k\tau)d\alpha+$$

$$+O\left((\alpha_2-\alpha_1)\sqrt{|t-k\tau|}\right)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}v(\alpha,y,t)d\alpha+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right) \quad (23)$$

Отсюда при $h_1\to 0,\ h_2\to 0,\ \tau\to 0$ имеем

$$\tilde{u}(\alpha_2,y,t)-\tilde{u}(\alpha_1,y,t)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}v(\alpha,y,t)d\alpha. \quad (24)$$

Дифференцируя последнюю формулу, получим $v(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}$.

Обозначим через $W_{ij}^k=\dfrac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^k}{\tau}$. Пусть для W_{ij}^k выполнены неравенство вида (22). Покажем, что справедливо равенство $W(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial t}$.

$$\tilde{u}(\alpha,y,t_2)-\tilde{u}(\alpha,y,t_1)=\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right)-\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right)+$$

$$+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{k=\left[\frac{t_2}{\tau}\right]+1}^{\left[\frac{t_1}{\tau}\right]-1}\frac{\widetilde{u}_{ij}^{k+1}-\widetilde{u}_{ij}^{k}}{\tau}*\tau+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right) \qquad (25)$$

Также как и выше рассуждая

$$\widetilde{u}(\alpha,y,t_2)-\widetilde{u}(\alpha,y,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}W(\alpha,y,t)dt. \qquad (26)$$

Дифференцируя формулу (26) получим $W(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial t}$.

Обозначим через $V_{ij}^{k}=\dfrac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}$. Пусть для V_{ij}^{k} также выполнены неравенства вида (22).

Покажем что $\mathrm{V}(\alpha,\mathrm{y},\mathrm{t})=\dfrac{\partial\widetilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$. $\widetilde{u}(\alpha,y_2,t)-\widetilde{u}(\alpha,y_1,t)=\widetilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_2}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)-$

$$-\widetilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_1}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{y=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]}\frac{\widetilde{u}_{ij+1}^{k}-\widetilde{u}_{ij}^{k}}{h_2}h_2+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right). \qquad (27)$$

Следовательно, $V(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$.

Таким образом, можно выбрать сходящиеся подпоследовательности сеточных функций $\left\{u_{ij}^{k}\right\},\left\{U_{ij}^{k}\right\},\left\{W_{ij}^{k}\right\},\left\{V_{ij}^{k}\right\}$ которые сходятся к функциям u, U, W, V следовательно к функциям $u,\dfrac{\partial u}{\partial\alpha},\dfrac{\partial u}{\partial\tau},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Покажем теперь существования следующих производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial y}. \qquad (28)$$

Существования производных $\dfrac{\partial u}{\partial\alpha},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}$ доказаны.

Обозначим через $v_{2ij}^{k}=\dfrac{v_{i+1j}-v_{ij}^{k}}{h_1}$. Пусть выполнены

$$\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(v_{2ij}^{k}\right)^2\le \mathrm{A},\quad \max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(v_{2ij}^{k+1}-v_{2ij}^{k}\right)^2\le B_1,$$

$$\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum\left(\frac{v_{2i+1j}^{k}-v_{2ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\quad \max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{v_{2ij+1}^{k}-v_{2ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3. \qquad (29)$$

$$\widetilde{v}(\alpha, y_2, t) - \widetilde{v}(\alpha, y_1, t) = \widetilde{v}\left(\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) - \widetilde{v}\left(\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) +$$

$$+O(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}) = \sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1} \frac{v_{i+ij}^{k} - v_{ij}^{k}}{h_1} + O(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}) =$$

$$= \sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1} v_{2ij}^{k} h_1 + O(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}).$$

Проинтегрируем от ih_1 до $(i+1)h_1$, тогда

$$\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]} \int_{ih_1}^{(i+1)h_1} v_2(\alpha, y, k\tau)d\alpha + O(|\alpha_2 - \alpha_1| * \sqrt{h_1}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha, y, k\tau)d\alpha + O(|\alpha_2 - \alpha_1|) + O(\sqrt{h_2}) +$$

$+O(|\alpha_2 - \alpha_1|)\sqrt{(t - k\tau)}.$ Следовательно $v(\alpha_2, y, t,) - v(\alpha_1, y, t,) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_2(\alpha, y, t) + O\,(\sqrt{h_1, h_2, \tau}).$

Дифференцируя последнее, получим $v_2(\alpha, y, t) = \dfrac{\partial v(\alpha, y, t)}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial^2 u(\alpha, y, t)}{\partial \alpha^2}.$

Таким же образом можно показать

$$W_2(\alpha, y, t) = \frac{\partial W(\alpha, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(\alpha, y, t)}{\partial t^2};\; V_2(\alpha, y, t) = \frac{\partial V(\alpha, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(\alpha, y, t)}{\partial y^2}.$$

Покажем существование производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial y}.$

Обозначим $P_{2ij}^{k} = \dfrac{U_{ij+1}^{k} - U_{ij}^{k}}{h_2}.$ Пусть выполнены

$$\begin{cases} \max\limits_{|i| \le k \le M} h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(P_{2ij}^{k}\right)^2 \le A, & \max\limits_{|i| \le k \le M} h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{P_{2i+j}^{k} - P_{2ij}^{k}}{h_1}\right)^2 \le B_2, \\ \max\limits_{|i| \le k \le M} h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{P_{ij}^{k+1} - P_{ij}^{k}}{\tau}\right)^2 \le B_1, & \max\limits_{|i| \le k \le M} h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{P_{ij+1}^{k+1} - P_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2 \le B_3. \end{cases} \tag{30}$$

$$v(\alpha, y_2, t) - v(\alpha, y_1, t) = \tilde{v}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y_2}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) - \tilde{v}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y_1}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) =$$

$$\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} \frac{v_{ij+1}^k - v_{ij}^k}{h_2} h_2 + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) = \sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} P_{2ij}^k h_2 + O(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}).$$

Проинтегрируем от jh_2 до $(j+1)h_2$, тогда

$$\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} \int_{ih_2}^{(j+1)h_2} P_2(\alpha, y, k\tau)dy + O\left(|y_2 - y_1|\sqrt{h_2}\right) =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} P_2(\alpha, y, k\tau)dy + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\right) + O\left(\sqrt{h_2}\right) + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\xi\sqrt{t - k\tau}\right).$$

Отсюда следует $v(\alpha, y_2, t) - v(\alpha, y_1, t) = \int_{y_1}^{y_2} P_2(\alpha, y, t)dy + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\sqrt{t - k\tau}\right).$

При $h_1 \to 0,\ h_2 \to 0,\ \ \tau \to 0$ продифференцируем последнее равенство по y

$$P_2(\alpha, y, t) = \frac{\partial v(\alpha, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(\alpha, y, t)}{\partial \alpha \partial y}, \text{ и т.д.}$$

В $L_1\vartheta(\alpha, y, t)$ также присутствует член $\dfrac{\tau(\alpha, y)}{\varepsilon(\alpha, y)}\vartheta_t'$.

Существование производной $\vartheta_t'(\alpha, y, t)$ показана вторым неравенством формулы (12) при выполнении второго условия формулы (11). Оценка и линейность этой производной даны формулами (17) и (18).

Пусть шаги τ, h_1, h_2, по t, α, y пробегают некоторые числовые последовательности $\{\tau_s\}, \{h_{1s}\}, \{h_{2s}\}$ *где* $(\tau_s, h_{1s}, h_{2s}) > 0$ *и* $\lim\limits_{s \to \infty} (\tau_s, h_{1s}, h_{2s}) \to 0.$

Пусть для каждой s построены конечно-разностные решения задачи (9).

Тогда учитывая, что все эти решения вне характеристического угла равны нулю, то существует последовательность $\left\{(u_{i,j}^k)^s\right\}$, для некоторой $u_{i,j}^k$ слабо сходится в норме $W_2^1(\Omega(T, D))$ и сильно сходится в норме $L_2(\Omega(T, D))$ к функции $u(\alpha, y, t)$, т.е.

$$\left\| u_{i,j}^{k} - u(\alpha, y, t) \right\|_{W_2(\Omega(T,D))} \xrightarrow{\text{слабо}} 0, \quad \left\| u_{i,j}^{k} - u(\alpha, y, t) \right\|_{L_2(\Omega(T,D))} \xrightarrow{\text{сильно}} 0. \quad (31)$$

Покажем, что функция $u(\alpha, y, t)$ есть обобщенное решение задачи (9), т.е. справедливость равенство (*). Для u_{ij}^{k} справедливо равенство

$$\tau h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \sum_{k=|i|}^{M} \left\{ \left[(u_{i,j}^{k})_{t\bar{t}}^{s} - (u_{i,j}^{k})_{\alpha\bar{\alpha}}^{s} - L(u_{i,j}^{k})^{s} \right] \cdot \Phi_{ij}^{k} \right\} = 0. \quad (32)$$

Используя формулу «суммирование по частям» и «дифференцирование» произведений преобразуем каждый член последнего равенства (для краткости индекс s опускаем)

$$\sum_{k=|i|}^{M} (u_{i,j}^{k})_{t\bar{t}} \cdot \Phi_{i,j}^{k} = -\sum_{k=|i|}^{M} (u_{i,j}^{k})_{t} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{t}}(k) + (u_{i,j}^{k})_{t}(M)(\Phi_{i,j}^{k})(M) - (u_{i,j}^{k})_{t}(|i|)(\Phi_{i,j}^{k})|i|;$$

$$\sum_{k=|i|}^{M} (u_{i,j}^{k})_{\alpha\bar{\alpha}} \cdot \Phi_{i,j}^{k} = \sum_{k=|i|}^{M} \left[((u_{i,j}^{k})_{\bar{\alpha}} \cdot \Phi_{i,j}^{k})_{\alpha} - (u_{i,j}^{k})_{\alpha} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha} \right] =$$

$$= -\sum_{k=|i|}^{M} \left\{ \left[(u_{i,j}^{k})_{\alpha} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{\alpha}} + (u_{i,j}^{k})_{\alpha}(M) \cdot \Phi_{i,j}^{k}(M) - (u_{i,j}^{k})(|i|) \cdot \Phi_{i,j}^{k}(|i|) \right]_{\alpha} - \right.$$

$$\left. -(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha} \right\} = -\sum_{k=|i|}^{M} \left[(u_{i,j}^{k})_{\alpha} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{\alpha}} + (u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})(i+1)(k) \right] +$$

$$+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(M)\Phi_{i,j}^{k}(M) - (u_{i,j}^{k})(|i|) \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}(|i|).$$

$$\sum_{k=|i|}^{M} \frac{C_{i,j}^{2} u_{y\bar{y}}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} \cdot \Phi_{i,j}^{k} = -\sum_{k=|i|}^{M} \left[\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{y} - \frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{y} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} \right)_{y} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \Phi_{i,j}^{k} \right] \cdot (k) = -\sum_{k=|i|}^{M} \left[\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} u_{i,j}^{k} \Phi_{i,j}^{k} + \frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} (D) u_{i,j}^{k}(D)(\Phi_{i,j}^{k})(D) - \right.$$

$$\left. - \frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} (-D)(u_{i,j}^{k})(-D)\Phi_{i,j}^{k}(-D) \right]_{y} + \frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} (u_{i,j}^{k})_{y}(\Phi_{i,j}^{k})_{y} + \left(\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}} \right)_{y} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \Phi_{i,j}^{k} =$$

$$=-\sum_{k=|i|}^{M}\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{y}\left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y}+\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{y}\Phi_{ij}^{k}(i+1);\qquad \sum_{k=|i|}^{M}\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\;u_{\overline{\alpha y}}\cdot\Phi_{ij}^{k}=$$

$$=-\sum_{k=|i|}^{M}\left\{\left[\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\left(\Phi_{ij}^{k}\right)\right]_{y}-\left(\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\right)_{y}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}-\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{y\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}-\right.$$

$$\left.-\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\cdot\left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y}\right\}(k)=-\sum_{k=|i|}^{M}\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y}+\left(\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\right)_{y}\left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}(j+1).$$

Тогда формула (32) будет

$$\tau h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\sum_{k=|i|}^{M}\left[(u_{i,j}^{k})_t(\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{t}}+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\cdot(\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha}+\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}(u_{i,j}^{k})_{y}(\Phi_{i,j}^{k})_{y}+\right.$$

$$\left.+\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{y}(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})_{y}\right]+\left[(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(\Phi_{i,j}^{k})(i+1)+\frac{C_{i,j,y}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}(u_{i,j}^{k})_{y}(\Phi_{i,j}^{k})(i+1)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{\bar{y}}\right)_{y}(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}(j+1)-\frac{C_{i,j}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\Delta\alpha_{i,j}(u_{i,j}^{k})_{\alpha}\Phi_{ij}^{k}(j+1)-\frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\left(u_{ij}{}^{k}\right)_{t}\cdot\left(\Phi_{ij}{}^{k}\right)_{t}-\right.$$

$$-h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[(u_{i,j}^{k})_t(M)\Phi_{i,j}^{k}(M)-(u_{i,j}^{k})_t(|i|)\Phi_{i,j}^{k}(|i|)+(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(M)\Phi_{i,j}^{k}(M)-(u_{i,j}^{k})_{\alpha}(|i|)\Phi_{i,j}^{k}(|i|)\right]=$$

$$=\tau h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}S_{i,j}\Phi_{i,j}^{i},\qquad k=|i|,\quad M. \tag{33}$$

Переходя к пределу, при $\tau\to0, h_1\to0, h_2\to0$, получим

$$\int_0^t\int_{-D}^{D}\int_{|\alpha|}^{t}\left[\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\tau}\left(\tilde{\Phi}_{ij}^{k}\right)_{\tau}+\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\left(\tilde{\Phi}_{ij}^{k}\right)_{\alpha}+\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{y}\left(\tilde{\Phi}_{ij}^{k}\right)_{y}+\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\alpha_{y}\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\alpha}\tilde{\Phi}_{ij}^{k}+\right.$$

$$\left.+\frac{C_{ij}^{2}}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\Delta\alpha_{ij}\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\overline{\alpha}}\cdot\tilde{\Phi}_{ij}^{k}-\frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\left(\tilde{u}_{ij}{}^{k}\right)_{t}\cdot\left(\tilde{\Phi}_{ij}{}^{k}\right)_{t}\right]d\alpha dy d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\tilde{S}_{ij}\tilde{\Phi}_{ij}^{i}d\tau dy,\ t\in(0,T)$$

где волнистой черточкой на вверху обозначены кусочно-непрерывные функции, совпадающий с соответствующей функцией в узлах сетки. Так как все эти кусочно-непрерывные функции сходятся к соответствующей функции, а также учитывая, что

$\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right), \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_t, \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_\alpha, \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_y$ сходятся слабо к функциям $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Тогда переходя к пределу, получим обобщенное решение (*).

Таким образом, доказана теорема

Теорема. Пусть выполнены условия (3),(11),(22),(29),(30) и функция $\vartheta(\alpha, y, t)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка в $\Omega(T, D)$ и пусть $S(t, y) \in L_2(\Omega(T, D))$. Тогда существует обобщенное решение задачи (9) в пространстве $W_2^1(\Omega(T, D))$.

Заключение. В данной статье мы рассматривали существования обобщенного решения двумерной задачи для телеграфного уравнения. В ходе решения задачи нами применены методы: выделения особенностей, выпрямления характеристики и конечно-разностной.

Список литературы

1. Дмитриев В.И. и др. Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики // УМН.-1976.-Т.31, вып.6. - С. 123-141.

2. Жданов М.С., Спичак В.В. Современные методы моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах. Препринт ИЗМИРАН №45(519), - М. 1984, 31с.

3. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи электродинамики. - М., 1991. – 304 с.

4. Сатыбаев А.Дж. Единственность решения прямой задачи геоэлектрики с плоской границей //Межрегиональная научно-техническая конференция «Кыргызская государственность и проблема межкультурного диалога». Сборник научных трудов. Вып. 3. - Ош-2003 г. - С. 172-175.

5. Сатыбаев А.Дж. Существование решения прямой задачи волнового уравнения с плоской границей // Материалы II Международной научно-методической конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке» II том. - Алматы, 2003 г. – С. 383-389.

6. Тихонов А.Н. и др. Некоторые общие алгоритмы решения прямых и обратных задач электродинамики//Вычислительные методы и программирование. – М.: МГУ, 1973, вып. XX. - С. 3-11.