УДК 517.968.2, 517.956.22

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Анищенко Юлия Владимировна, *преподаватель и аспирант кафедры «Информационные технологии и управление» ОшТУ, Кыргызстан, 714018, г.Ош, ул.Исанова 81, ОшТУ, +996554757202, programm85@mail.ru*

Аннотация. В данной работе созданы математические модели электромагнитных процессов системы уравнений Максвелла и геоэлектрики. Построены постановки прямой и обратной задач. Подробно изложены методы решения прямых и обратных задач и дано большое количество литературы.

Ключевые слова. Математическая модель, электромагнитные процессы, система уравнений Максвелла, уравнение геоэлектрики, прямые, обратные задачи, методы решения, анализ.

MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROMAGNETIC PROCESSES GEOELECTRICS

Anischenko Julia*, a teacher and a graduate student of the Department "Information technologies and management" Osh Technical University, Kyrgyzstan, 714 018, Osh, ul.Isanova 81 OshTU, +996554757202, programm85@mail.ru*

Annotation. In this paper, mathematical models of electromagnetic processes Maxwell's equations and geoelectric. Built posing direct and inverse problems. Details are set out methods for solving direct and inverse problems and given a large amount of literature.

Keywords. Mathematical model of electromagnetic processes, the system of Maxwell's equations, the equation geoelectric, direct, inverse problems, solution methods of analysis.

Введение. Электропроводимость среды в большом масштабе по горизонтали и по вертикали (глубины) изучается геоэлектрикой. Электрические и магнитные поля возникают при естественном или искусственном ведении тока в земной коре.

В разведке полезных ископаемых методами геоэлектрики используются магнитотеллургические зондирования.

Горные породы обладают электромагнитными свойствами и характер электромагнитных полей определяется геоэлектрическим строением среды.

В настоящее время электроразведка, основанная на электрических и магнитных свойствах горных пород, имеет более пятидесяти способов и методов.

Это объясняется тем, что, во-первых различные породы имеют различные электромагнитные свойства и во-вторых в зависимости от этих свойств задаются различные степени электрических токов. С другой стороны некоторые породы создают собственные электрические поля.

В электроразведке обычно измеряются амплитуды электрических и магнитных составляющих поля и их фазы.

Методы геоэлектрики и электроразведки составляют геоэлектромагнитные методы. Эти методы решают фундаментальные геологические, геофизические задачи и широко используются в исследовании, поиске и разведке нефтегазовых, угольных и рудных месторождений.

Методы классической геоэлектрики или методы электродинамики сплошных сред позволяют вывести интерпретацию полученных результатов на количественный уровень.

В неклассическом методе геоэлектрики изучаются наблюдаемые явления, не вписывающиеся в рамки электродинамики. К ним относятся методы естественного электрического поля и методы: высокоразрешающая электроразведка, сейсмоэлектрические, электромагнитный мониторинг.

В области геоэлектрики можно выделить следующие основные направления исследований:

- исследование геоэлектрического строения Земли;
- разработка информационно-математического обеспечения геоэлектромагнитных исследований;
- исследование геодинамических процессов в Земле;
- исследование неклассических методов геоэлектрики.

Систему уравнений Максвелла в случае макроскопической электродинамики можно привести в уравнении геоэлектрики.

Математическая модель геоэлектрики включает в себя все основные законы электромагнетизма и описывает электромагнитные поля в разных средах.

Опишем систему уравнений Максвелла.

Каноническая форма системы уравнений Максвелла связывает напряженности электрического векторного поля – E, напряженности магнитного векторного поля – H, вектора электрической индукции – D, вектора магнитной индукции – B с плотностью электрического заряда ρ и с плотностью электрического тока j:

$$rot H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \tag{1}$$

$$rot E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{2}$$

$$div B = 0, \tag{3}$$

$$div D = 4\pi\rho. \tag{4}$$

Система уравнений Максвелла (1)-(4) состоит из восьми линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Источники ρ и j не являются произвольными.

Уравнения (1)-(4) состоят из двух самостоятельных блоков. Первый блок состоит из уравнений (1) и (4), который связывает векторы H, D и источники j, ρ, второй блок состоит из уравнений (2) и (3), который связывает только E, B из источников.

Система уравнений Максвелла не является замкнутой, так как эта система связывает четыре векторные величины двумя векторными уравнениями. Для замыкания уравнений (1) – (4) необходимо добавить некоторые соотношения, связывающие первый блок со вторым блоком.

Эти соотношения определяются из свойств материальных сред, в котором происходят электромагнитные процессы. Их называют материальными уравнениями.

В макроэлектродинамике материальные уравнения находятся либо непосредственно из эксперимента, либо на основании модельных представлений.

1. Векторы E, H считаются исходными, а материальные уравнения задаются в виде $D = D(E, H), \quad B = B(E, H)$.

2. E, B считаются исходными, а материальные уравнения задаются в виде $D = D(E, B), \quad H = H(E, B)$.

Материальные уравнения можно найти с введением физических параметров: ε - диэлектрическая проницаемость среды, μ - магнитная проницаемость среды и τ - электропроводимость среды:

$$D = \varepsilon H, \tag{5}$$

$$B = \mu H. \tag{6}$$

Материальные уравнения во многом зависят от материальных сред.

ε, μ	ε, μ не зависят от поля	$\varepsilon = \varepsilon(E, B)$ $\mu = \mu(E, B)$	$\varepsilon = \varepsilon(r)$ $\mu = \mu(r)$	$\varepsilon = \varepsilon(t)$ $\mu = \mu(t)$	$\varepsilon_{ij} = \frac{D_i}{E_j}$, $\mu_{ij} = \frac{B_i}{H_j}$ $i, j = 1,2,3$
Среда	Линейная	Нелинейная	Неодно-родная	Нестацио-нарная	Анизо-тропная

Перечислим наиболее простые модели сред:

А. Однородная изотропная среда – среда с одинаковыми электромагнитными свойствами.

Б. Анизотропная среда – среда с электромагнитными свойствами, отличающимися в направлении и в крестслоистости пород.

В. Одномерная (двумерная, трехмерная) неоднородная среда – среда, в которой электромагнитные свойства меняются в одном (двух, трех) направлении.

Ток смещения. Д. Максвелл математически строго обосновал физические электромагнитные процессы и получил математические модели в виде уравнений и систематизировал их. До Д. Максвелла многие уравнения электромагнитных процессов были известны, а Д. Максвелл проанализировал и выбрал те уравнения, которые необходимы для этого явления, добавил к этому уравнению так называемый ток смещения и получил замкнутую систему уравнений. В честь его эту систему назвали системой уравнений Максвелла. До периода Максвелла были известны два основных вида токов: ток проводимости и ток переноса.

Ток смещения также как ток проводимости порождает магнитное поле. Переменные электрического поля создают магнитное поле и они существуют совместно, и такое поле будет даже в вакууме, где нет смещения электрических зарядов внутри молекул.

Математическая формулировка тока смещения:

$$I_{смещ} = I_{пров} = \frac{dq}{dt}, \tag{7}$$

Здесь $I_{смещ}$ - сила тока смещения, $I_{пров}$ - сила тока проводимости, q - заряд конденсатора $q = C \cdot \varphi = C \cdot E \cdot x = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{x} \cdot E \cdot x = |\varepsilon\varepsilon_0 \cdot E = D| = SD$.

$$q = CU = SD. \tag{8}$$

где C - электроемкость конденсатора, E - напряженность электрического поля между обкладками, x - расстояние между обкладками, ε - электрическая проницаемость, S - площадь, D - вектор смещения, U - напряжение между обкладками конденсатора.

Напряженность электрического поля и вектор смещения равны

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \left|\sigma = \frac{q}{S}\right| = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot S}, \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{E}.$$

где σ - поверхностная плотность заряда.

$$I_{смещ} = \vec{j}_{смещ} \cdot S = S \cdot \frac{dq}{dt \cdot S} = S\frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (9)$$

Отсюда получим

$$\vec{j}_{смещ} = \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad (10)$$

где $\vec{j}_{смещ}$ - плотность тока смещения.

Вектор смещения $\vec{D}$ связан с вектором напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектором поляризации $\vec{P}$ соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в формулу (10) получим

$$\vec{j}_{смещ} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (12)$$

где $\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - часть плотности тока смещения, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - часть плотности тока, обусловленную поляризацией.

Таким образом, ток смещения – это наличие связи между электрическим и магнитным полем, то есть величина, связывающая электрическое и магнитное поле, взаимосвязь на существование электромагнитного поля.

Открытие тока смещения позволило создать единую теорию электрических и магнитных процессов. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света.

Математическая модель процессов в магнитостатике и электростатике.

В практических приложениях почти всегда приходится решать уравнения Максвелла (1) – (4) в кусочно-непрерывных средах, тогда граничные условия являются неотъемлемой частью этих явлений.

В стационарных случаях электромагнитных полей будут $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$, тогда (1) – (4) распадаются на две системы

$$div\vec{D} = \rho, \qquad rot\vec{E} = 0, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad (13)$$

$$rot\vec{H} = \vec{j}, \qquad div\vec{B} = 0, \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu \cdot \vec{H}. \quad (14)$$

(13) является уравнением электростатики, (14) – магнитостатики.

Система уравнений Максвелла в макроскопической электродинамике описывается математической моделью геоэлектрики.

Из уравнений Максвелла, при определенных условиях, можно получить двумерное уравнение геоэлектрики.

$$\begin{aligned} \varepsilon(z,y)\mu(z,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{z,y} u(z,y,t) - \nabla_{z,y} \ln \mu(z,y) \nabla_{z,y} u(z,y,t) - \\ -\sigma(z,y)\mu(z,y)\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad t \in R_+, \qquad z \in R_+, \qquad y \in R, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\varepsilon(z,y), \mu(z,y)$ - диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, $\sigma(z,y)$ - электропроводимость среды, $u(z,y,t)$ - напряженности электрического магнитного поля, $\Delta_{z,y} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $\nabla_{z,y} = \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ - градиент функции.

В случае, когда геоэлектрический разрез известен, из физических условий задачи и из уравнения (1) определяется электрическая (магнитная) компонента поля, то есть решаются прямые задачи электроразведки.

Решая прямую задачу геоэлектрики, можно получить электрическую компоненту поля в средах вдали от источника с электромагнитными параметрами ε, μ, σ.

Сложность прямых задач заключается в выборе моделей, близких к реальным средам. Для этого применяется математическое моделирование с использованием математических аппаратов и современных средств компьютерных технологий.

В геоэлектрике обычно рассматриваются две среды (воздух, земля), в воздухе все физические параметры и напряженности известны, а в земле или напряженности электрического/магнитного поля неизвестны, физические параметры известны, их называют прямой задачей, или физические параметры неизвестны, напряженности на поверхности земли известны называют обратной задачей.

В геоэлектрике начальные и граничные условия обычно задаются в следующем виде:

$$u(z,y,t)\big|_{t<0} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u(z,y,t)}{\partial z}\Big|_{z=0} = h(y)\delta(t) + r(y)\theta(t), \qquad y \in (-D,D), \qquad t \in [0,T], \tag{17}$$

где $h(y), r(y)$ - функции источники, $\delta(t)$ - дельта функция Дирака, $\theta(t)$ - тета функция Хевисайда, D,T - некоторые постоянные.

Двумерная прямая задача геоэлектрики. Определить функцию $u(z,y,t)$ - напряженность электрического/магнитного поля из задачи (15) – (17) при известных значениях функций $\varepsilon(z,y), \mu(z,y), \sigma(z,y)$, а также при известных значениях функций источников $h(y), r(y)$.

Двумерная обратная задача геоэлектрики. Определить физические параметры $\varepsilon(z,y), \mu(z,y), \sigma(z,y)$ при известных значениях функции источников $h(y), r(y)$, а также при задании дополнительной информации о решении прямой задачи на поверхности земли

$$u(z,y,t)\big|_{z=0} = f(y,t), \; y \in [-D,D], t \in [0,T]. \tag{18}$$

Методы решения прямых и обратных задач геоэлектрики.

Аналитические, точные решения прямых задач, тем более обратных задач, почти невозможны.

В случае когда, в прямых задачах, на начальные, граничные условия и на коэффициенты уравнений ставятся определенные условия, например ограниченность, непрерывность, непрерывность производных можно получить аналитические формулы решения прямых задач, формула Даламбера – в одномерной, формула Пуассона – в двумерной, формула Кирхгофа – в трехмерной переменной.

Явные аналитические формулы для обратных задач почти не существуют. В редких случаях, когда ставятся жесткие условия на коэффициенты уравнений, на начальные и граничные условия, а самое главное на решение задачи, обратные задачи можно привести к интегральному уравнению Вольтера второго рода, на что и можно создать разрешающие алгоритмы.

Таким образом, для решения прямых и обратных задач, не только геоэлектрики, прибегают к решению задачи численными, приближенными методами.

Основными приближенными методами решения прямых задач гиперболического типа (уравнение (15) относится к уравнению гиперболического типа) являются: метод сеток, метод разностных схем, метод конечных элементов, метод Монте-Карло, метод Галеркина, метод Ритца и другие.

Перечислим методы решения прямых задач (см. лит. [18,15,4,3,16,14,11,5,9,12]. Разностные методы: метод сеток; интегро-интерполяционный метод; метод аппроксимации интегральных тождеств; вариационно-разностные методы, проекционный метод Галеркина, конечных элементов; граничных элементов, метод прогонки, редукции, релаксации, расщепления.

Перечислим методы решения обратных задач (см. лит. [1,2,7,10,13,19,20,6,17,8]). Метод регуляризации; метод минимизации сглаживающего функционала; итерационные методы интегральных уравнений первого рода; градиентные методы; оптимизационные методы; разностные методы, проекционно-разностные методы.

Список литературы

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итерационные методы некорректных задач. М.: Наука, 1989.
2. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы. М.: МГУ, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кабельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 2008. - 632 с.
4. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: МГТУ, 2010.
5. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные методы. М.: МГУ, 1977.
6. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
7. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск. 2009, - 457 с.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 2013. – 304 с.
10. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
12. Митчел Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
13. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
14. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 2003. - 255 с.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2007. – 316 с.
16. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 2010.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М. 2009. – 478 с.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004, 798 с.
19. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
20. Тихонов А.Н., Гончарский А.В. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.