УДК 624.071

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В БАЛОЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

***В.М. Меланич, Г.В. Паницкова***

Рассматриваются вопросы распространения акустических волн в регулярных системах. Основные параметры волнового процесса описываются с помощью собственных векторов переходной матрицы. Получены дисперсионные зависимости для различных моделей линейных балочных систем.

*Ключевые слова:* волны; регулярная система; обобщенные перемещения; переменные состояния.

# STUDY OF WAVE PROCESSES IN PERIODIC TRUSS STRUCTURES

***V.M. Melanich, G.V. Panitskova***

The article considers the issues of acoustic waves in regular systems. The main parameters of the wave process are described using proper vectors of the transition matrix. Dispersion characteristics for various models of periodic truss structures are obtained.

*Keywords:* waves; regular system; generalized displacement; variable conditions.

Регулярные системы, т. е. системы с повторяющимися однотипными элементами, формируются из подсистем, соединенных между собой дискретным образом. Предполагается, что соединение осуществляется в конечном числе узлов. Движение каждого узла в подсистеме задается посредством набора степеней свободы, включающего, например, перемещения и углы поворота. Это означает, что при распространении акустических волн в подсистеме возникают соответствующие этим степеням свободы силы, действующие на нее со стороны остальных компонент системы [1].

Конечно-элементные уравнения гармонического волнового процесса для недемпфированной подсистемы:

$$[K - \omega^2 M]q = F, \tag{1}$$

где $K$ и $M$ – матрицы жесткости и масс подсистемы; $q$– вектор обобщенных угловых перемещений подсистемы, который записывается в виде:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

где $\{q_a\}$, $\{q_b\}$ – обобщенные перемещения, соответствующие степеням свободы в точках соединений с левой и правой сторон подсистемы (рисунок 1).

Векторы соответствующих обобщенных сил (реакций в связях внешних узлов подсистемы) обозначим $\{R_a\}$ и $\{R_b\}$.

Представим матрицы $K$ и $M$ в блочном виде, в соответствии с правым и левым узлами соединения:

$$K = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix},$$

тогда уравнение волнового процесса в подсистеме приводится к виду:

$$\left( \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ba} & D_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

где $D_{aa}$, $D_{ab}$, $D_{ba}$, $D_{bb}$– блоки матрицы динамической жесткости подсистемы.

Волновые процессы рассматриваемых систем удобно описывать с помощью вектора переменных состояния для каждого текущего поперечного сечения. В этот вектор $Y_i$ $(x, \omega)$, как правило, входят перемещения, деформации, реакции в связях внешних узлов подсистем, т. е. волновой процесс описывается соотношением:

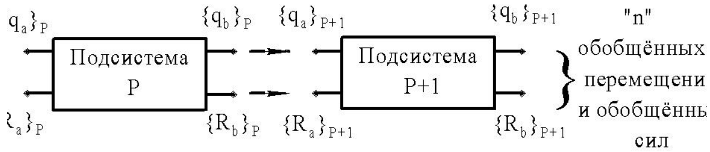


Рисунок 1 – Схема линейной регулярной системы

$$\{Y_b\}=[H]\{Y_a\} \qquad (4)$$

где $H(\omega)$ – переходная матрица, которая преобразует параметры состояния в сечении “а” в параметры состояния сечения “в” подсистемы.

Преобразуя уравнение (3) в соотношение типа (4), получим:

$$\begin{Bmatrix} q_b \\ R_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{ab}^{-1}\cdot D_{aa} & D_{ab}^{-1} \\ D_{ba}-D_{bb}\cdot D_{ab}^{-1}\cdot D_{aa} & D_{bb}\cdot D_{ab}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ R_a \end{Bmatrix}. \qquad (5)$$

Обозначив: $\{Y_b\}=\begin{Bmatrix} q_b \\ R_b \end{Bmatrix};\{Y_a\}=\begin{Bmatrix} q_a \\ R_a \end{Bmatrix};$

$$[H]=\begin{bmatrix} -D_{ab}^{-1}\cdot D_{aa} & D_{ab}^{-1} \\ D_{ba}-D_{bb}\cdot D_{ab}^{-1}\cdot D_{aa} & D_{bb}\cdot D_{ab}^{-1} \end{bmatrix},$$

приходим к соотношению (4).

Определим зависимости между обобщенными перемещениями двух соседних подсистем. (Примем направление распространения волн от “p” к “p+1”.)

$$\{q_a\}_{(p+1)}=e^{\eta}\{q_a\}_p,\ \{q_b\}_p=e^{\eta}\{q_a\}_p.$$

В узлах соединения подсистем: $\{q_a\}_{(p+1)}=\{q_b\}_p$ это выражение характеризует кинематическое условие соединения подсистем.

Окончательно имеем:

$$q_b=e^{\eta}\{q_a\}. \qquad (6)$$

Существуют аналогичные зависимости между обобщенными силами, действующими на подсистемы: $\{R_b\}=-e^{\eta}\{R_a\}$. Данное равенство выполняет требование непрерывности акустического давления.

Таким образом, уравнение волнового процесса в векторах переменных состояния запишется как:

$$\begin{Bmatrix} e^{\eta}q_a \\ -e^{\eta}R_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{ab}^{-1}\cdot D_{aa} & -D_{ab}^{-1} \\ D_{ba}-D_{bb}\cdot D_{ab}^{-1}\cdot D_{aa} & D_{bb}\cdot(-D_{ab})^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ R_a \end{Bmatrix}. \qquad (7)$$

Выполнив некоторые преобразования, получим:

$$\left[D_{aa}+D_{bb}+e^{\eta}D_{ab}+e^{-\eta}D_{ba}\right]\cdot q_a=0. \qquad (8)$$

Условие существования нетривиального решения уравнения (8) приводит к характеристическому уравнению:

$$\left[D_{aa}+D_{bb}+e^{\eta}D_{ab}+e^{-\eta}D_{ba}\right]=0. \qquad (9)$$

Вычисление определителя (9) относительно $e^{\eta}$ соответствует решению проблемы собственных значений переходной матрицы H. Собственные векторы представляют собой линейные комбинации переменных состояний текущего поперечного сечения.

Если определитель раскрыть, $e^{\eta}$ и $e^{-\eta}$ члены с и просуммировать, получим полином от ch$\eta$. Порядок полинома определяется числом обобщенных перемещений между соседними подсистемами.

В данной статье рассматривается волновые процессы в недемпфированных регулярных систе-

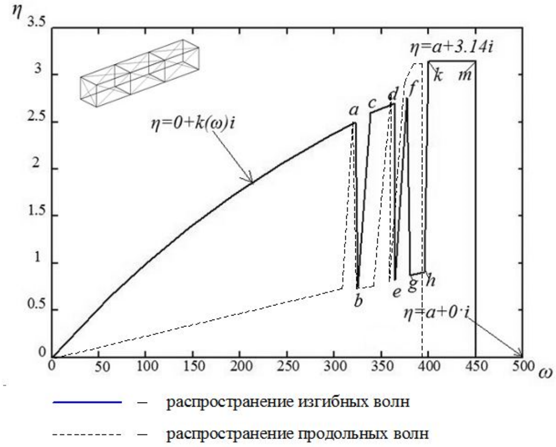


Рисунок 2 – Дисперсионные кривые балки периодической структуры

мах, элементы матрицы K и M – действительные числа, поэтому величины ch$\eta$ могут быть действительными числами или комплексно – сопряженными парами. В этом случае возникают два волновых вектора с коэффициентом распространения $\eta=\alpha\pm ik$, где $i=\sqrt{-1}$, $\alpha_j(\omega)$ – коэффициент затухания волны, $k_j(\omega)$ – волновое число.

Используя рассмотренный выше алгоритм определения коэффициентов распространения волн, получим дисперсионные зависимости решетчатой балки периодической структуры (рисунок 2).

Собственные волны существуют парами: волны одной пары распространяются во взаимно противоположных направлениях. Число типов волн в подсистеме соответствует количеству перемещений и деформаций, возникающих в рассматриваемом поперечном сечении. Волны распространяются с дисперсией, т. е. по мере распространения сигнала происходит его искажение (участок *a-k*). В балках ферменного типа наблюдается особый вид дисперсии: в них существуют диапазоны частот, в пределах которых эти конструкции практически непрозрачны, т. е. сигналы с такими частотами не распространяются вдоль элемента, а быстро затухают.

Эти “полосы непропускания” наблюдаются вблизи резонансных частот местных степеней свободы подсистем. Таким образом, элемент конструкции может играть роль пассивного виброизолирующего устройства.

***Литература***


1. *Меланич В.М.* Моделирование волновых процессов в балках / В.М. Меланич // Информационные технологии, системы автоматизированного проектирования и автоматизация: сб. науч. тр. Саратов: СГТУ, 2010. С. 154–157.